EJERCICIOS DE CONTINUIDAD

Ejercicio 1.-

Halla los puntos de discontinuidad de la función $y = \dfrac{2}{x-3} - \dfrac{12}{x^2-9}$ y di si en alguno de ellos la discontinuidad es evitable.

$$y = \frac{2}{x-3} - \frac{12}{x^2-9} = \frac{2(x+3)-12}{(x-3)(x+3)} = \frac{2x+6-12}{(x-3)(x+3)} = \frac{2x-6}{(x-3)(x+3)} =$$

$$= \frac{2(x-3)}{(x-3)(x+3)}$$

La función es discontinua en $x = 3$ y en $x = -3$; pues no está definida para esos valores.

- En $x = -3$: $\lim\limits_{x \to -3^-} \dfrac{2(x-3)}{(x-3)(x+3)} = -\infty$; $\lim\limits_{x \to -3^+} \dfrac{2}{(x+3)} = +\infty$

  Hay una asíntota vertical en $x = -3$, la discontinuidad no es evitable.

- En $x = 3$: $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{2(x-3)}{(x-3)(x+3)} = \lim\limits_{x \to 3} \dfrac{2}{(x+3)} = \dfrac{2}{6} = \dfrac{1}{3}$

  Luego, en $x = 3$, la discontinuidad es evitable.

Ejercicio 2.-

Calcula el valor que debe tener k para que las siguientes funciones sean continuas:

a) $f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{si } x \le 2 \\ k-x & \text{si } x > 2 \end{cases}$ **b)** $f(x) = \begin{cases} x+k & \text{si } x \le 0 \\ x^2-1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$

a) • Si $x \neq 2$, la función es continua.

• En $x = 2$:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^-} (x+1) = 3 \\ \lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^+} (k-x) = k-2 \\ f(2) = 2+1 = 3 \end{array}\right\} \text{Para que sea continua, ha de ser: } k-2 = 3 \rightarrow k = 5$$

b) • Si $x \neq 0$, la función es continua.

• En x = 0:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} (x+k) = k \\ \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} (x^2-1) = -1 \\ f(0) = 0+k = k \end{array}\right\} \text{Para que sea continua, ha de ser: } k = -1$$

Ejercicio 3.-

Calcula el valor de k para que cada una de las siguientes funciones sea continua:

a) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^4 - 1}{x - 1} & \text{si } x \neq 1 \\ k & \text{si } x = 1 \end{cases}$ **b)** $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{x - 1}}{x - 1} & \text{si } x \neq 1 \\ k & \text{si } x = 1 \end{cases}$

a) • Si $x \neq 1$, la función es continua.

• Si $x = 1$:

$$\lim_{x \to 1} f(x) = \lim_{x \to 1} \frac{x^4 - 1}{x - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{(x^3 + x^2 + x + 1)(x - 1)}{(x - 1)} =$$

$$= \lim_{x \to 1} (x^3 + x^2 + x + 1) = 4$$

$f(1) = k$

Para que sea continua, ha de ser $k = 4$.

b) • Si $x \neq 1$, la función es continua.

• Si $x = 1$:

$$\lim_{x \to 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 1)}{(x - 1)(\sqrt{x} + 1)} = \lim_{x \to 1} \frac{(x - 1)}{(x - 1)(\sqrt{x} + 1)} =$$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{1}{\sqrt{x} + 1} = \frac{1}{2}$$

$f(1) = k$

Para que sea continua, ha de ser $k = \dfrac{1}{2}$.

Ejercicio 4.-

Estudia la continuidad de cada una de las siguientes funciones para los distintos valores del parámetro a:

a) $f(x) = \begin{cases} x^2 + ax & \text{si } x \le 2 \\ a - x^2 & \text{si } x > 2 \end{cases}$ **b)** $f(x) = \begin{cases} e^{ax} & \text{si } x \le 0 \\ x + 2a & \text{si } x > 0 \end{cases}$

a) • En $x \neq 2$, la función es continua.

• En $x = 2$:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^-} (x^2 + ax) = 4 + 2a \\ \lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^+} (a - x^2) = a - 4 \\ f(2) = 4 + 2a \end{array}\right\} \begin{array}{l} \text{Para que sea continua, ha de ser:} \\ 4 + 2a = a - 4 \quad \to \quad a = -8 \end{array}$$

Por tanto, la función es continua si $a = -8$, y es discontinua (en $x = 2$) si $a \neq -8$.

b) • En $x \neq 0$, la función es continua.

• En $x = 0$:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} e^{ax} = 1 \\ \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} (x + 2a) = 2a \\ f(0) = 1 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \text{Para que sea continua, ha de ser:} \\ 1 = 2a \quad \to \quad a = \dfrac{1}{2} \end{array}$$

Por tanto, la función es continua si $a = \frac{1}{2}$, y es discontinua (en $x = 0$) si $a \neq \frac{1}{2}$.

Ejercicio 5.-

Estudia la continuidad de esta función:

$$f(x)=\begin{cases} |x+2| & \text{si } x<-1 \\ x^2 & \text{si } -1\le x<1 \\ 2x+1 & \text{si } x>1 \end{cases}$$

- Si $x \neq -1$ y $x \neq 1$ $\rightarrow$ la función es continua.

- Si $x=-1$:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to -1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to -1^-} |x+2| = 1 \\ \lim\limits_{x\to -1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to -1^+} x^2 = 1 \\ f(-1)=1 \end{array}\right\} \text{La función es continua en } x=-1.$$

- Si $x=1$ $\rightarrow$ No es continua, pues no está definida en $x=1$; no existe $f(1)$.
  Además:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} x^2 = 1 \\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} (2x+1) = 3 \end{array}\right\} \text{La discontinuidad es de salto (finito).}$$

Ejercicio 6.-

Dada la función $f(x)=\begin{cases} e^x & \text{si } x<0 \\ 1-x & \text{si } x\ge 0 \end{cases}$**:**

a) Estudia su continuidad.

b) Halla $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$ **y** $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)$**.**

a) • Si $x \neq 0$, la función es continua.

- En $x=0$:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} e^x = 1 \\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} (1-x) = 1 \\ f(0)=1-0=1 \end{array}\right\} \text{También es continua en } x=0.$$

Por tanto, $f(x)$ es continua.

b) $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to +\infty} (1-x) = -\infty$

$$\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to -\infty} e^x = e^{-\infty} = \frac{1}{e^{+\infty}} = 0$$

Ejercicio 7.-

Se define la función f del modo siguiente:

$$f(x) = \begin{cases} \ln x - 1 & \text{si } x > 1 \\ 2x^2 + ax + b & \text{si } x \leq 1 \end{cases}$$

Encuentra los valores de a y b para que la función sea continua y su gráfica pase por el origen de coordenadas.

- Para que la gráfica de $f(x)$ pase por el origen de coordenadas, ha de ser $f(0) = 0$, es decir: $f(0) = b = 0$
- Para que la función sea continua (para $x \neq 1$, es una función continua), tenemos que:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} (2x^2 + ax) = 2 + a \\ \\ \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} (\ln x - 1) = -1 \\ \\ f(1) = 2 + a \end{array}\right\} \begin{array}{l} \text{Han de ser iguales, es decir:} \\ 2 + a = -1 \quad \to \quad a = -3 \end{array}$$

Por tanto, si $a = -3$ y $b = 0$, la función es continua; y su gráfica pasa por el origen de coordenadas.

Ejercicio 8.-

Estudia la continuidad en $x = 0$ de la función: $y = 2x + \dfrac{|x|}{x}$

¿Qué tipo de discontinuidad tiene?

En $x = 0$, la función no está definida, luego es discontinua. Como:

$$y = \begin{cases} 2x - 1 & \text{si } x < 0 \\ 2x + 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}, \text{ entonces:}$$

$$\lim_{x \to 0^-} (2x - 1) = -1; \quad \lim_{x \to 0^+} (2x + 1) = 1$$

Por tanto, hay una discontinuidad de salto (finito) en $x = 0$.

Ejercicio 9.-

Considera la función $f(x) = \dfrac{x}{|x|}$. Determina su dominio. Dibuja su gráfica y razona si se puede asignar un valor a $f(0)$ para que la función sea continua en todo $\mathbb{R}$.

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x > 0 \end{cases} \qquad \text{Dominio} = \mathbb{R} - \{0\}$$

Como $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = -1 \neq \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = 1$, no podemos asignar ningún valor a $f(0)$ para que la función sea continua en todo $\mathbb{R}$ (pues en $x = 0$ no lo es).

Gráfica: