

EJERCICIOS DE REPRESENTACIÓN DE FUNCIONES

Ejercicio 1.-

Halla el dominio de estas funciones:

$$\text{a) } y = x^3 - 5x^2 + 7x + 3 \quad \text{b) } y = \frac{3x^3 + 5}{x^2 - 5x + 4} \quad \text{c) } y = \frac{x^3 + 2x}{x^2 + 1}$$

$$\text{a) } D = \mathbb{R}$$

$$\text{b) } x^2 - 5x + 4 = 0 \rightarrow x = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 16}}{2} = \frac{5 \pm \sqrt{9}}{2} = \frac{5 \pm 3}{2} \begin{cases} x = 4 \\ x = 1 \end{cases}$$

$$D = \mathbb{R} - \{1, 4\}$$

$$\text{c) } x^2 + 1 \neq 0 \text{ para todo } x \rightarrow D = \mathbb{R}$$

Ejercicio 2.-

Halla el dominio de:

$$\text{a) } y = \sqrt{x^2 - 2x} \quad \text{b) } y = \ln(x^2 + 1) \quad \text{c) } y = \ln(x^2 - 1) \quad \text{d) } y = \frac{e^x}{x^2}$$

$$\text{a) } x^2 - 2x \geq 0 \rightarrow D = (-\infty, 0] \cup [2, +\infty)$$

$$\text{b) } x^2 + 1 > 0 \text{ para todo } x \rightarrow D = \mathbb{R}$$

$$\text{c) } x^2 - 1 > 0 \rightarrow D = (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$$

$$\text{d) } x^2 = 0 \rightarrow x = 0 \rightarrow D = \mathbb{R} - \{0\}$$

Ejercicio 3.-

Halla las posibles simetrías y periodicidades, di dónde son continuas y dónde derivables:

a) $y = 3x^4 - 5x^2 - 1$

b) $y = \sqrt{x^2 - 2x}$

c) $y = \frac{x^3}{x^2 - 1}$

d) $y = \frac{x^3 - 1}{x^2}$

e) $y = \operatorname{sen} x + 1/2 (\operatorname{sen} 2x)$

a) $f(-x) = 3(-x)^4 - 5(-x)^2 - 1 = 3x^4 - 5x^2 - 1 = f(x)$

Es una función par: simétrica respecto al eje Y .

No es periódica.

Es continua y derivable en $\mathbb{R}$.

b) $\text{Dominio} = (-\infty, 0] \cup [2, +\infty)$

$f(-x) = \sqrt{x^2 - 2x}$. No es par ni impar; no es simétrica respecto al eje Y ni respecto al centro de coordenadas.

No es periódica.

Es continua en su dominio.

Es derivable en $(-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$.

c) $\text{Dominio} = \mathbb{R} - \{-1, 1\}$

$f(-x) = \frac{-x^3}{x^2 - 1} = -f(x)$. Es impar: simétrica respecto al origen de coordenadas.

No es periódica.

Es continua y derivable en su dominio.

d) $\text{Dominio} = \mathbb{R} - \{0\}$

$f(-x) = \frac{-x^3 - 1}{x^2}$. No es par ni impar: no es simétrica respecto al eje Y ni respecto al origen de coordenadas.

No es periódica.

Es continua y derivable en su dominio.

e) $\text{Dominio} = \mathbb{R}$

$$f(-x) = \operatorname{sen}(-x) + \frac{1}{2} (\operatorname{sen}(-2x)) = -\operatorname{sen} x - \frac{1}{2} (\operatorname{sen}(2x)) = -f(x)$$

Es impar: simétrica respecto al origen de coordenadas.

Es periódica de periodo 2π .

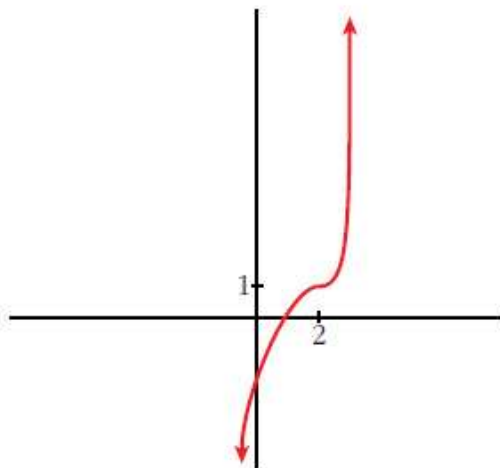
Es continua y derivable en $\mathbb{R}$.

Ejercicio 4.-

Representa una función continua y derivable en $\mathbb{R}$ tal que:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty, \quad f'(2) = 0$$

$$f(2) = 1, \quad f'(x) \geq 0 \text{ para cualquier } x.$$



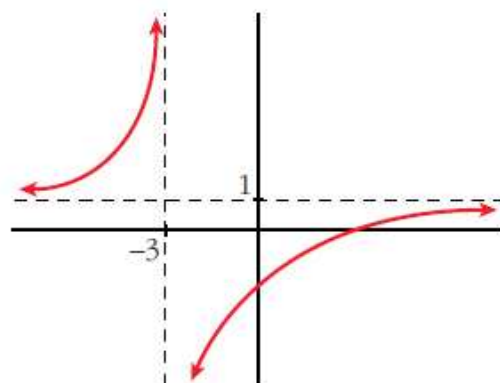
Ejercicio 5.-

Representa una función que no esté definida en $x = -3$ y tal que:

$$\lim_{x \rightarrow -3^-} f(x) = +\infty \text{ y } \lim_{x \rightarrow -3^+} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 1 \begin{cases} \text{si } x \rightarrow +\infty, f(x) < 1 \\ \text{si } x \rightarrow -\infty, f(x) > 1 \end{cases}$$

No tiene puntos singulares y es creciente.



Ejercicio 6.-

De una función $y = f(x)$ tenemos esta información:

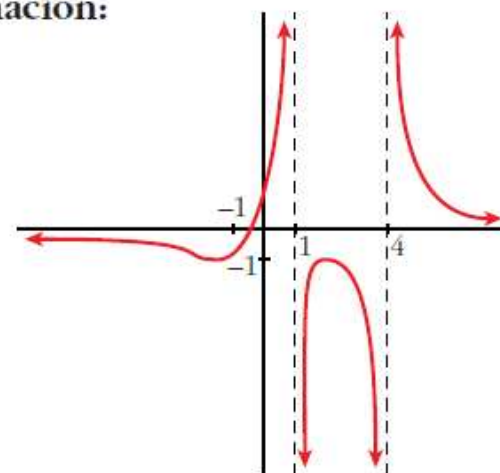
$$D = \mathbb{R} - \{1, 4\}; \quad \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = +\infty; \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) = -\infty; \quad \lim_{x \rightarrow 4^+} f(x) = +\infty; \quad \lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 0$$

$$(\text{si } x \rightarrow +\infty, f(x) > 0; \text{ si } x \rightarrow -\infty, f(x) < 0)$$

$$f'(2) = 0, \quad f(2) = -1; \quad f'(-1) = 0, \quad f(-1) = -1$$

Represéntala.



Ejercicio 7.-

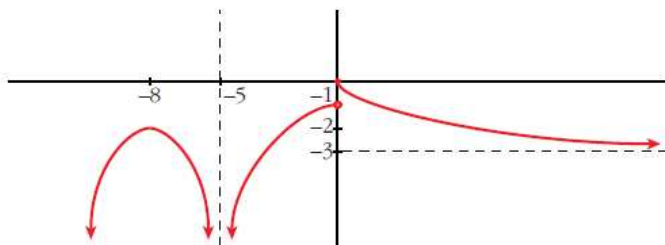
Dibuja la gráfica de una función que cumpla las siguientes propiedades:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -3, \quad \lim_{x \rightarrow -5} f(x) = -\infty$$

$f(-8) = -2$, $f(0) = 0$ es el único punto donde $f(x)$ se anula.

$f'(-8) = 0$ y la derivada no se anula en ningún otro punto. Además, $f'(x) < 0$ para todo x positivo.

La función es continua en toda la recta real, salvo en los puntos $x = -5$ y $x = 0$.



Ejercicio 8.-

Dada la función $y = x^3 - 3x + 1$, se pide:

- Intervalos de crecimiento y de decrecimiento. Extremos relativos.
- Concavidad y convexidad. Puntos de inflexión.
- Dibuja la gráfica a partir de los resultados anteriores.

a) $f'(x) = 3x^2 - 3$

$$f'(x) = 0 \rightarrow 3x^2 - 3 = 0 \begin{cases} x = -1 \\ x = 1 \end{cases}$$

Signo de $f'(x)$:



$f(x)$ es creciente en $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$

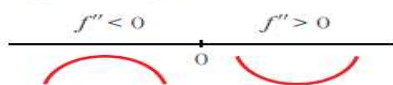
es decreciente en $(-1, 1)$

tiene un máximo en $(-1, 3)$ y un mínimo en $(1, -1)$

b) $f''(x) = 6x$

$$f''(x) = 0 \rightarrow 6x = 0 \rightarrow x = 0$$

Signo de $f''(x)$:

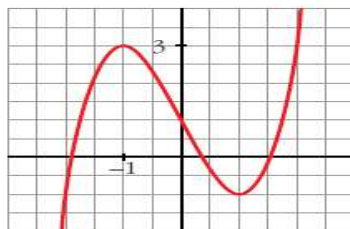


$f(x)$ es convexa en $(-\infty, 0)$

es cóncava en $(0, +\infty)$

tiene un punto de inflexión en $(0, 1)$

c)



Ejercicio 9.-

En las siguientes funciones, estudia su dominio, asíntotas y posición de la curva respecto de estas, y represéntalas a partir de los resultados obtenidos:

a) $y = \frac{1}{x^2 - 1}$

b) $y = \frac{-1}{x^2 + 1}$

c) $y = \frac{x}{x^2 - 1}$

d) $y = \frac{x^2 - 1}{x}$

e) $y = \frac{x}{1 + x^2}$

f) $y = \frac{x^2 - x + 1}{x^2 + x + 1}$

a) $y = \frac{1}{x^2 - 1}$

• **Dominio:** $\mathbb{R} - \{-1, 1\}$

• **Asíntotas:**

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$$

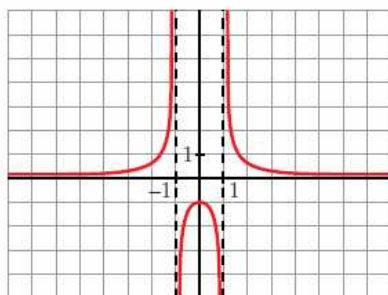
$y = 0$ es asíntota horizontal.

(si $x \rightarrow -\infty$, $f(x) > 0$; si $x \rightarrow +\infty$, $f(x) > 0$)

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = -\infty \end{array} \right\} x = -1 \text{ es asíntota vertical}$$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty \end{array} \right\} x = 1 \text{ es asíntota vertical}$$

• **Gráfica:**



b) $y = \frac{-1}{x^2 + 1}$

• **Dominio:** $\mathbb{R}$

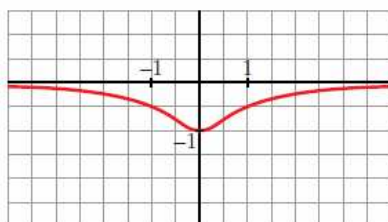
• **Asíntotas:**

No tiene asíntotas verticales.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$$

(si $x \rightarrow -\infty$, $f(x) < 0$; si $x \rightarrow +\infty$, $f(x) < 0$)

• **Gráfica:**



c) $y = \frac{x}{x^2 - 1}$

• **Dominio:** $\mathbb{R} - \{-1, 1\}$

• **Asíntotas:**

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$$

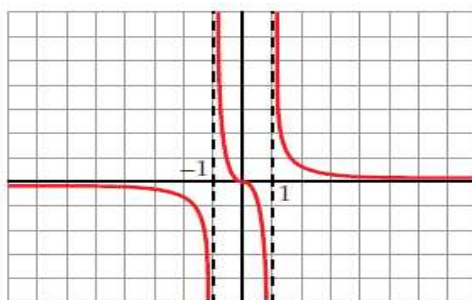
(si $x \rightarrow -\infty$, $f(x) < 0$; si $x \rightarrow +\infty$, $f(x) > 0$)

$y = 0$ es asíntota horizontal.

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = +\infty \end{array} \right\} x = -1 \text{ es asíntota vertical}$$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty \end{array} \right\} x = 1 \text{ es asíntota vertical}$$

• **Gráfica:**



d) $y = \frac{x^2 - 1}{x} = x - \frac{1}{x}$

• **Dominio:** $\mathbb{R} - \{0\}$

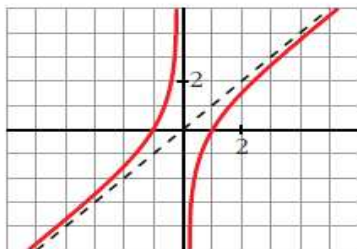
• **Asíntotas:**

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty \end{array} \right\} x = 0 \text{ es asíntota vertical}$$

$y = x$ es asíntota oblicua.

(si $x \rightarrow -\infty$, $f(x) > x$; si $x \rightarrow +\infty$, $f(x) < x$)

• **Gráfica:**



e) $y = \frac{x}{1+x^2}$

• **Dominio:** $\mathbb{R}$

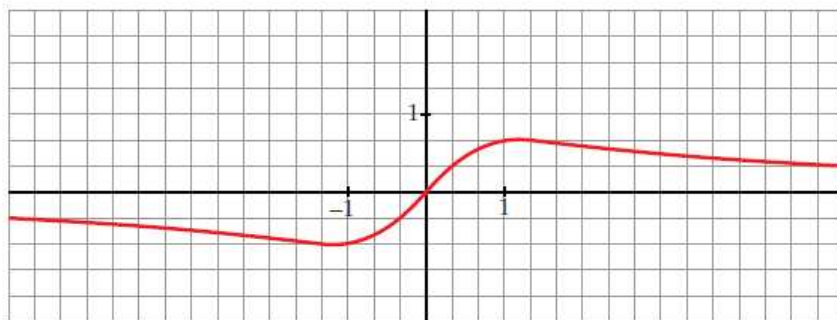
• **Asíntotas:**

No tiene asíntotas verticales.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$$

(si $x \rightarrow -\infty$, $f(x) < 0$; si $x \rightarrow +\infty$, $f(x) > 0$)

• **Gráfica:**



f) $y = \frac{x^2 - x + 1}{x^2 + x + 1}$

• **Dominio:**

$$x^2 + x + 1 = 0 \rightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4}}{2} \rightarrow \text{No tiene solución.}$$

$$D = \mathbb{R}$$

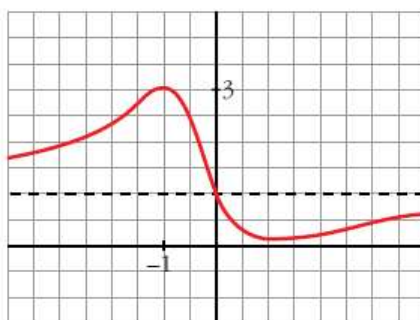
• **Asíntotas:**

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$$

(si $x \rightarrow -\infty$, $f(x) > 1$; si $x \rightarrow +\infty$, $f(x) < 1$)

$y = 1$ es asíntota horizontal.

• **Gráfica:**



Ejercicio 10.-

Representa las siguientes funciones estudiando previamente:

— Dominio de definición, asíntotas y posición de la curva respecto d

— Intervalos de crecimiento y de decrecimiento, y extremos relativo

a) $y = 2x + \frac{8}{x}$

b) $y = \frac{2x}{(x+1)^2}$

c) $y = \frac{x^3}{x^2-4}$

d) $y = \frac{x^2-2x+2}{x-1}$

e) $y = \frac{4x-12}{(x-2)^2}$

f) $y = \frac{x}{(x-2)^2}$

g) $y = \frac{(x-1)(x-3)}{x-2}$

h) $y = \frac{x^2}{9-x^2}$

i) $y = \frac{x^2+4}{x}$

j) $y = \frac{x^2}{(x-3)^2}$

k) $y = \frac{2x^3}{x^2+1}$

l) $y = \frac{x^4}{x^2-4}$

m) $y = \frac{x^3}{x+2}$

n) $y = \frac{(x-2)^2}{x-1}$

a) $y = 2x + \frac{8}{x}$

• Dominio: $\mathbb{R} - \{0\}$

• Asíntotas:

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty \end{array} \right\} x = 0 \text{ es asíntota vertical}$$

$y = 2x$ es asíntota oblicua.

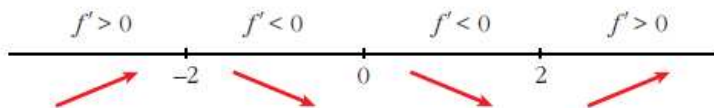
(si $x \rightarrow -\infty$, $f(x) < 2x$; si $x \rightarrow +\infty$, $f(x) > 2x$)

• Crecimiento, decrecimiento, extremos relativos:

$$f'(x) = 2 - \frac{8}{x^2}$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow \frac{2x^2-8}{x^2} = 0 \rightarrow x^2 = 4 \begin{cases} x = -2 \\ x = 2 \end{cases}$$

Signo de la derivada:



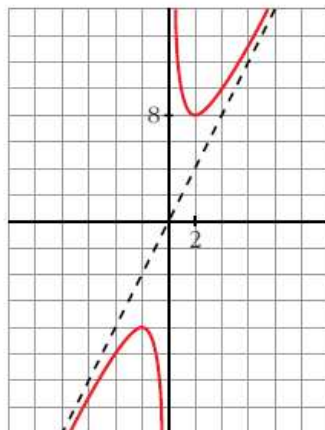
$f(x)$ es creciente en $(-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$

es decreciente en $(-2, 0) \cup (0, 2)$

tiene un máximo en $(-2, -8)$

tiene un mínimo en $(2, 8)$

• **Gráfica:**



b) $y = \frac{2x}{(x+1)^2}$

• **Dominio:** $\mathbb{R} - \{-1\}$

• **Asíntotas:**

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$$

(si $x \rightarrow -\infty$, $f(x) < 0$; si $x \rightarrow +\infty$, $f(x) > 0$)

$y = 0$ es asíntota horizontal.

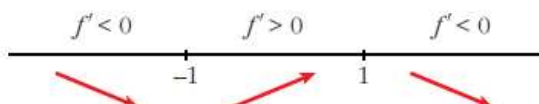
$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = -\infty \end{array} \right\} x = -1 \text{ es asíntota vertical}$$

• **Crecimiento, decrecimiento, extremos relativos:**

$$f'(x) = \frac{2(x+1)^2 - 2x \cdot 2(x+1)}{(x+1)^4} = \frac{(x+1)(2x+2-4x)}{(x+1)^4} = \frac{-2x+2}{(x+1)^3}$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow -2x+2=0 \rightarrow x=1$$

Signo de $f'(x)$:

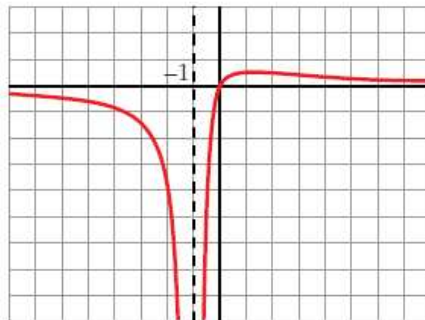


$f(x)$ es decreciente en $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$

es creciente en $(-1, 1)$

tiene un máximo en $\left(1, \frac{1}{2}\right)$

• Gráfica:



c) $y = \frac{x^3}{x^2 - 4} = x + \frac{4x}{x^2 - 4}$

• Dominio: $\mathbb{R} - \{-2, 2\}$

• Asíntotas:

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = +\infty \end{array} \right\} x = -2 \text{ es asíntota vertical}$$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = +\infty \end{array} \right\} x = 2 \text{ es asíntota vertical}$$

$y = x$ es asíntota oblicua.

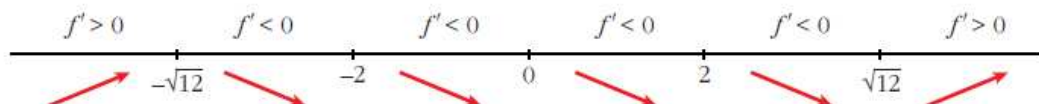
(si $x \rightarrow -\infty$, $f(x) < x$; si $x \rightarrow +\infty$, $f(x) > x$)

• Crecimiento, decrecimiento, extremos relativos:

$$f'(x) = \frac{3x^2(x^2 - 4) - x^3 \cdot 2x}{(x^2 - 4)^2} = \frac{3x^4 - 12x^2 - 2x^4}{(x^2 - 4)^2} = \frac{x^4 - 12x^2}{(x^2 - 4)^2} = \frac{x^2(x^2 - 12)}{(x^2 - 4)^2}$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow x^2(x^2 - 12) = 0 \begin{cases} x = 0 \\ x = -\sqrt{12} \\ x = \sqrt{12} \end{cases}$$

Signo de $f'(x)$:



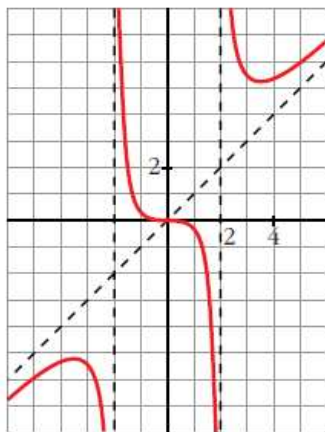
$f(x)$ es creciente en $(-\infty, -\sqrt{12}) \cup (\sqrt{12}, +\infty)$

es decreciente en $(-\sqrt{12}, -2) \cup (-2, 2) \cup (2, \sqrt{12})$

tiene un máximo en $(-\sqrt{12}, -3\sqrt{3})$

tiene un mínimo en $(\sqrt{12}, 3\sqrt{3})$

• **Gráfica:**



$$d) y = \frac{x^2 - 2x + 2}{x - 1} = x - 1 + \frac{1}{x - 1}$$

• **Dominio:** $\mathbb{R} - \{1\}$

• **Asíntotas:**

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty \end{array} \right\} x = 1 \text{ es asíntota vertical}$$

$y = x - 1$ es asíntota oblicua.

(si $x \rightarrow -\infty$, $f(x) < x - 1$; si $x \rightarrow +\infty$, $f(x) > x - 1$)

• **Crecimiento, decrecimiento, extremos relativos:**

$$\begin{aligned} f'(x) &= 1 - \frac{1}{(x-1)^2} = \frac{(x-1)^2 - 1}{(x-1)^2} = \frac{x^2 - 2x + 1 - 1}{(x-1)^2} = \\ &= \frac{x^2 - 2x}{(x-1)^2} = \frac{x(x-2)}{(x-1)^2} \end{aligned}$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow x(x-2) = 0 \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$$

Signo de $f'(x)$:



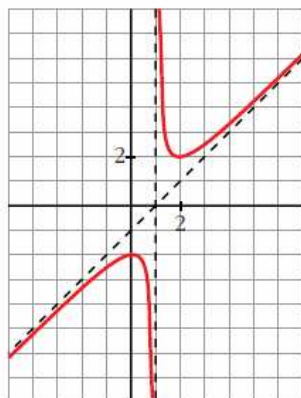
$f(x)$ es creciente en $(-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$

es decreciente en $(0, 1) \cup (1, 2)$

tiene un máximo en $(0, -2)$

tiene un mínimo en $(2, 2)$

• Gráfica:



e) $y = \frac{4x - 12}{(x - 2)^2}$

• Dominio: $\mathbb{R} - \{2\}$

• Asíntotas:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$$

(si $x \rightarrow -\infty$, $f(x) < 0$; si $x \rightarrow +\infty$, $f(x) > 0$)

$y = 0$ es asíntota oblicua.

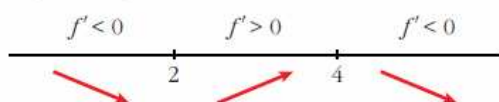
$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = -\infty \end{array} \right\} x = 2 \text{ es asíntota vertical}$$

• Crecimiento, decrecimiento, extremos relativos:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{4(x-2)^2 - (4x-12) \cdot 2(x-2)}{(x-2)^4} = \frac{4(x-2) - 2(4x-12)}{(x-2)^3} = \\ &= \frac{4x - 8 - 8x + 24}{(x-2)^3} = \frac{-4x + 16}{(x-2)^3} \end{aligned}$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow -4x + 16 = 0 \rightarrow x = 4$$

Signo de $f'(x)$:

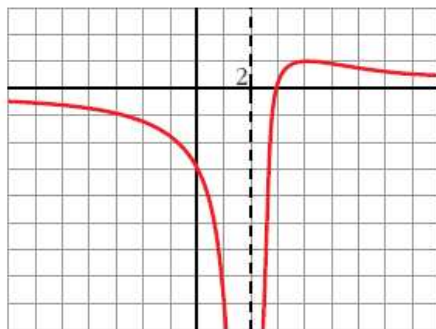


$f(x)$ es decreciente en $(-\infty, 2) \cup (4, +\infty)$

es creciente en $(2, 4)$

tiene un máximo en $(4, 1)$

• **Gráfica:**



f) $y = \frac{x}{(x-2)^2}$

• **Dominio:** $\mathbb{R} - \{2\}$

• **Asíntotas:**

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$$

(si $x \rightarrow -\infty$, $f(x) < 0$; si $x \rightarrow +\infty$, $f(x) > 0$)

$y = 0$ es asíntota horizontal.

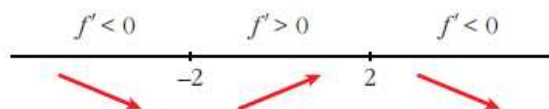
$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = +\infty \end{array} \right\} x = 2 \text{ es asíntota vertical}$$

• **Crecimiento, decrecimiento, extremos relativos:**

$$f'(x) = \frac{(x-2)^2 - x \cdot 2(x-2)}{(x-2)^4} = \frac{x-2-2x}{(x-2)^3} = \frac{-x-2}{(x-2)^3}$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow -x-2 = 0 \rightarrow x = -2$$

Signo de $f'(x)$:

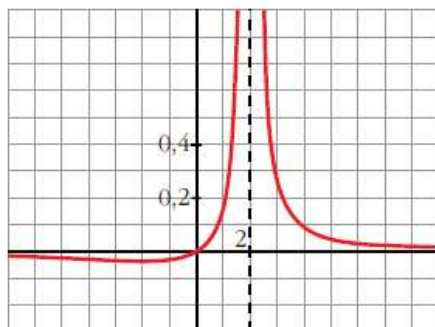


$f(x)$ es decreciente en $(-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$

es creciente en $(-2, 2)$

tiene un mínimo en $\left(-2, \frac{-1}{8}\right)$

• **Gráfica:**



$$g) y = \frac{(x-1)(x-3)}{x-2} = \frac{x^2 - 4x + 3}{x-2} = x - 2 - \frac{1}{x-2}$$

• **Dominio:** $\mathbb{R} - \{2\}$

• **Asíntotas:**

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = -\infty \end{array} \right\} x = 2 \text{ es asíntota vertical}$$

$y = x - 2$ es asíntota oblicua.

(si $x \rightarrow -\infty$, $f(x) > x - 2$; si $x \rightarrow +\infty$, $f(x) < x - 2$)

• **Crecimiento, decrecimiento, extremos relativos:**

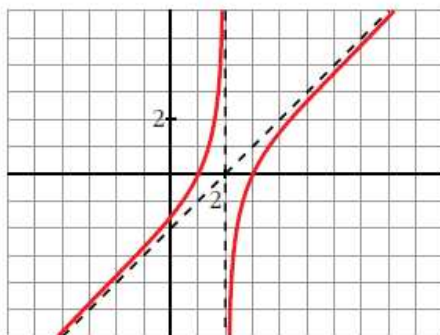
$$f'(x) = 1 + \frac{1}{(x-2)^2}$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow (x-2)^2 + 1 = 0 \rightarrow \text{no tiene solución}$$

$f(x)$ no tiene extremos relativos.

$f'(x) > 0$ para todo $x \rightarrow f(x)$ es creciente en todo su dominio.

• **Gráfica:**



$$h) y = \frac{x^2}{9-x^2}$$

• **Dominio:** $\mathbb{R} - \{-3, 3\}$

• **Asíntotas:**

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -1, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -1$$

(si $x \rightarrow -\infty$, $f(x) < -1$; si $x \rightarrow +\infty$, $f(x) < -1$)

$y = -1$ es asíntota horizontal.

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -3^-} f(x) = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow -3^+} f(x) = +\infty \end{array} \right\} x = -3 \text{ es asíntota vertical}$$

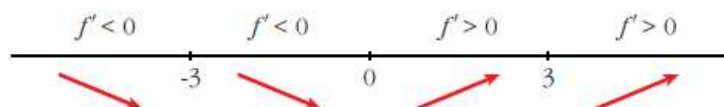
$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = -\infty \end{array} \right\} x = 3 \text{ es asíntota vertical}$$

• **Crecimiento, decrecimiento, extremos relativos:**

$$f'(x) = \frac{2x(9-x^2) - x^2 \cdot (-2x)}{(9-x^2)^2} = \frac{18x - 2x^3 + 2x^3}{(9-x^2)^2} = \frac{18x}{(9-x^2)^2}$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow 18x = 0 \rightarrow x = 0$$

Signo de $f'(x)$:

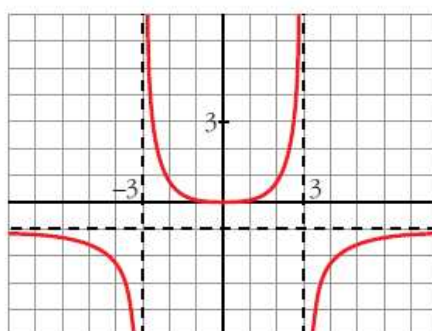


$f(x)$ es decreciente en $(-\infty, -3) \cup (-3, 0)$

es creciente en $(0, 3) \cup (3, +\infty)$

tiene un mínimo en $(0, 0)$

• **Gráfica:**



i) $y = \frac{x^2 + 4}{x} = x + \frac{4}{x}$

• **Dominio:** $\mathbb{R} - \{0\}$

• **Asíntotas:**

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty \end{array} \right\} x = 0 \text{ es asíntota vertical}$$

$y = x$ es asíntota oblicua.

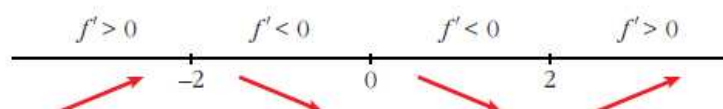
(si $x \rightarrow -\infty$, $f(x) < x$; si $x \rightarrow +\infty$, $f(x) > x$)

• **Crecimiento, decrecimiento, extremos relativos:**

$$f'(x) = 1 - \frac{4}{x^2}$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow x^2 - 4 = 0 \begin{cases} x = -2 \\ x = 2 \end{cases}$$

Signo de $f'(x)$:



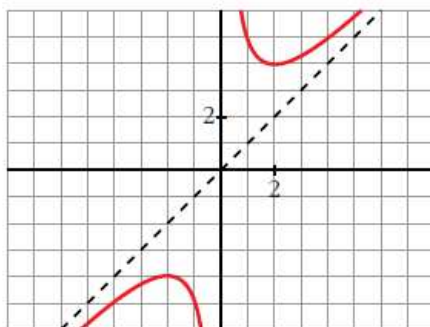
$f(x)$ es creciente en $(-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$

es decreciente en $(-2, 0) \cup (0, 2)$

tiene un máximo en $(-2, -4)$

tiene un mínimo en $(2, 4)$

• **Gráfica:**



j) $y = \frac{x^2}{(x-3)^2}$

• **Dominio:** $\mathbb{R} - \{3\}$

• **Asíntotas:**

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$$

(si $x \rightarrow -\infty$, $f(x) < 1$; si $x \rightarrow +\infty$, $f(x) > 1$)

$y = 1$ es asíntota horizontal.

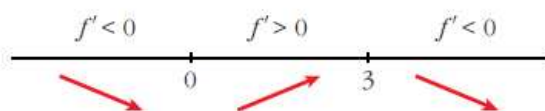
$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = +\infty \end{array} \right\} x = 3 \text{ es asíntota vertical}$$

• **Crecimiento, decrecimiento, extremos relativos:**

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{2x(x-3)^2 - x^2 \cdot 2(x-3)}{(x-3)^4} = \frac{2x(x-3) - 2x^2}{(x-3)^3} = \\ &= \frac{2x^2 - 6x - 2x^2}{(x-3)^3} = \frac{-6x}{(x-3)^3} \end{aligned}$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow -6x = 0 \rightarrow x = 0$$

Signo de $f'(x)$:

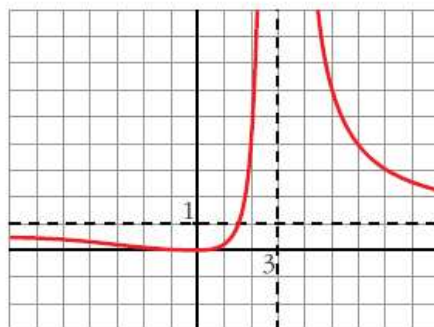


$f(x)$ es decreciente en $(-\infty, 0) \cup (3, +\infty)$

es creciente en $(0, 3)$

tiene un mínimo en $(0, 0)$

• **Gráfica:**



$$k) \ y = \frac{2x^3}{x^2 + 1} = 2x - \frac{2x}{x^2 + 1}$$

• **Dominio:** $\mathbb{R}$

• **Asíntotas:**

No tiene asíntotas verticales.

$y = 2x$ es asíntota oblicua.

(Si $x \rightarrow -\infty$, $f(x) > 2x$; si $x \rightarrow +\infty$, $f(x) < 2x$).

• **Crecimiento, decrecimiento, extremos relativos:**

$$f'(x) = \frac{6x^2(x^2 + 1) - 2x^3 \cdot 2x}{(x^2 + 1)^2} = \frac{6x^4 + 6x^2 - 4x^4}{(x^2 + 1)^2} = \frac{2x^4 + 6x^2}{(x^2 + 1)^2}$$

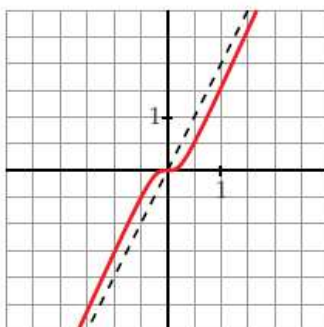
$$f'(x) = 0 \rightarrow 2x^2(x^2 + 3) = 0 \rightarrow x = 0$$

Signo de $f'(x)$:

$f'(x) > 0$ para todo $x \neq 0$

$f(x)$ es creciente en todo $\mathbb{R}$.

• **Gráfica:**



$$l) \ y = \frac{x^4}{x^2 - 4}$$

• **Dominio:** $\mathbb{R} - \{-2, 2\}$

• **Asíntotas:**

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = -\infty \end{array} \right\} x = -2 \text{ es asíntota vertical}$$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = +\infty \end{array} \right\} x = 2 \text{ es asíntota vertical}$$

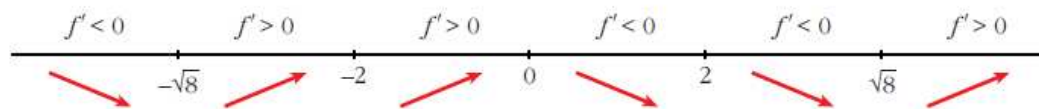
$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty; \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty \end{array} \right\} \text{Ramas parabólicas}$$

• **Crecimiento, decrecimiento, extremos relativos:**

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{4x^3(x^2 - 4) - x^4 \cdot 2x}{(x^2 - 4)^2} = \frac{4x^5 - 16x^3 - 2x^5}{(x^2 - 4)^2} = \frac{2x^5 - 16x^3}{(x^2 - 4)^2} = \\ &= \frac{2x^3(x^2 - 8)}{(x^2 - 4)^2} \end{aligned}$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow 2x^3(x^2 - 8) = 0 \begin{cases} x = 0 \\ x = -\sqrt{8} \\ x = \sqrt{8} \end{cases}$$

Signo de $f'(x)$:



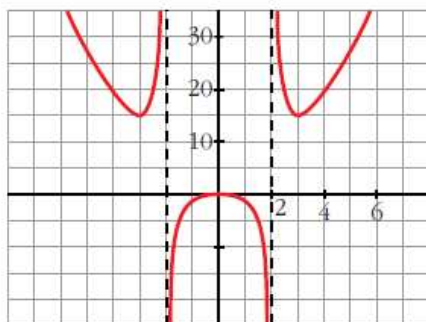
$f(x)$ es decreciente en $(-\infty, -\sqrt{8}) \cup (0, 2) \cup (2, \sqrt{8})$

es creciente en $(-\sqrt{8}, -2) \cup (-2, 0) \cup (\sqrt{8}, +\infty)$

tiene un mínimo en $(-\sqrt{8}, 16)$ y otro en $(\sqrt{8}, 16)$

tiene un máximo en $(0, 0)$

• **Gráfica:**



$$m) y = \frac{x^3}{x+2}$$

• **Dominio:** $\mathbb{R} - \{-2\}$

• **Asíntotas:**

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = -\infty \end{array} \right\} x = -2 \text{ es asíntota vertical}$$

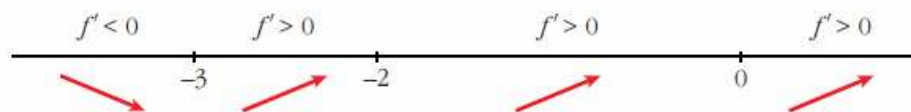
$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty; \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty \end{array} \right\} \text{Ramas parabólicas}$$

• **Crecimiento, decrecimiento, extremos relativos:**

$$f'(x) = \frac{3x^2(x+2) - x^3}{(x+2)^2} = \frac{3x^3 + 6x^2 - x^3}{(x+2)^2} = \frac{2x^3 + 6x^2}{(x+2)^2}$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow 2x^2(x+3) = 0 \begin{cases} x = 0 \\ x = -3 \end{cases}$$

Signo de $f'(x)$:



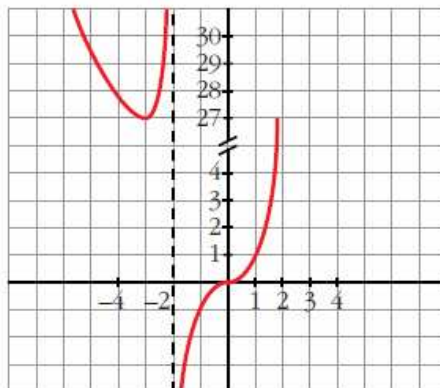
$f(x)$ es decreciente en $(-\infty, -3)$

es creciente en $(-3, -2) \cup (-2, +\infty)$

tiene un mínimo en $(-3, 27)$

tiene un punto de inflexión en $(0, 0)$

• **Gráfica:**



$$n) y = \frac{(x-2)^2}{x-1} = x - 3 + \frac{1}{x-1}$$

• **Dominio:** $\mathbb{R} - \{1\}$

• **Asíntotas:**

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty \end{array} \right\} x = 1 \text{ es asíntota vertical}$$

$y = x - 3$ es asíntota oblicua.

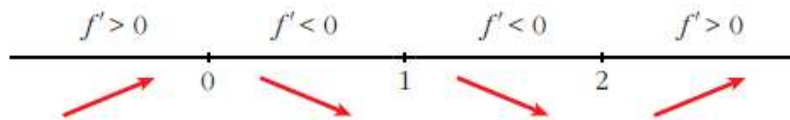
(Si $x \rightarrow -\infty$, $f(x) < x - 3$; si $x \rightarrow +\infty$, $f(x) > x - 3$).

• **Crecimiento, decrecimiento, extremos relativos:**

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{(x-1)^2} = \frac{(x-1)^2 - 1}{(x-1)^2} = \frac{x^2 - 2x}{(x-1)^2}$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow x(x-2) = 0 \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$$

Signo de $f'(x)$:



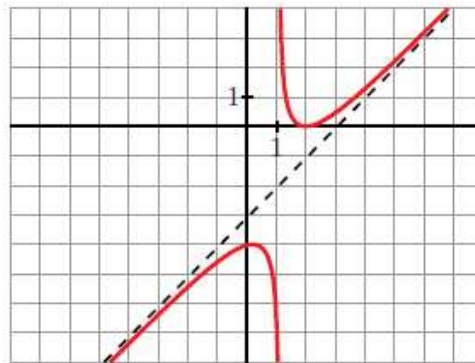
$f(x)$ es creciente en $(-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$

es decreciente en $(0, 1) \cup (1, 2)$

tiene un máximo en $(0, -4)$

tiene un mínimo en $(2, 0)$

• **Gráfica:**



Ejercicio 11.-

Dadas las siguientes funciones, halla sus asíntotas, estudia el crecimiento y la existencia de máximos y mínimos. Dibuja su gráfica:

a) $y = \frac{e^x}{x^2 - 3}$

b) $y = \frac{x^3}{4x^2 + 1}$

c) $y = x + \frac{4}{(x-1)^2}$

d) $y = \sqrt{x^2 - 4} - x - 2$

a) $y = \frac{e^x}{x^2 - 3}$

• **Dominio:** $\mathbb{R} - \{-\sqrt{3}, \sqrt{3}\}$

• **Asíntotas:**

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -\sqrt{3}^-} f(x) = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow -\sqrt{3}^+} f(x) = -\infty \end{array} \right\} x = -\sqrt{3} \text{ es asíntota vertical}$$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow \sqrt{3}^-} f(x) = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow \sqrt{3}^+} f(x) = +\infty \end{array} \right\} x = \sqrt{3} \text{ es asíntota vertical}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x}{x^2 - 3} = 0 \rightarrow y = 0 \text{ es asíntota horizontal cuando } x \rightarrow -\infty$$

$(f(x) > 0)$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty \rightarrow \text{Rama parabólica}$$

• **Crecimiento, máximos y mínimos:**

$$f'(x) = \frac{e^x(x^2 - 3) - e^x \cdot 2x}{(x^2 - 3)^2} = \frac{e^x(x^2 - 2x - 3)}{(x^2 - 3)^2}$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow x^2 - 2x - 3 = 0 \rightarrow x = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 12}}{2} = \frac{2 \pm 4}{2} \begin{cases} x = 3 \\ x = -1 \end{cases}$$

Signo de $f'(x)$:



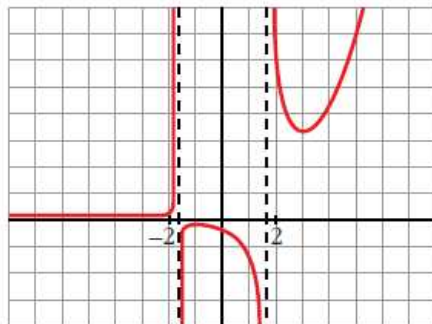
$f(x)$ es creciente en $(-\infty, -\sqrt{3}) \cup (-\sqrt{3}, -1) \cup (3, +\infty)$

es decreciente en $(-1, \sqrt{3}) \cup (\sqrt{3}, 3)$

tiene un máximo en $\left(-1, \frac{-1}{2e}\right)$

tiene un mínimo en $\left(3, \frac{e^3}{6}\right)$

• **Gráfica:**



$$b) y = \frac{x^3}{4x^2 + 1} = \frac{1}{4}x - \frac{(1/4)x}{4x^2 + 1}$$

• **Dominio:** $\mathbb{R}$

• **Asíntotas:**

No tiene asíntotas verticales.

$y = \frac{1}{4}x$ es asíntota oblicua.

(Si $x \rightarrow -\infty$, $f(x) > \frac{1}{4}x$; si $x \rightarrow +\infty$, $f(x) < \frac{1}{4}x$)

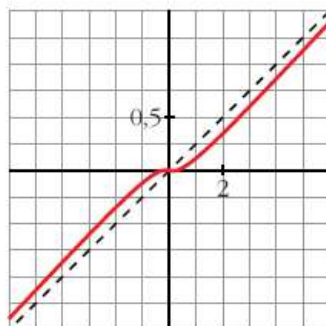
• **Crecimiento, máximos y mínimos:**

$$f'(x) = \frac{3x^2(4x^2 + 1) - x^3 \cdot 8x}{(4x^2 + 1)^2} = \frac{12x^4 + 3x^2 - 8x^4}{(4x^2 + 1)^2} = \frac{4x^4 + 3x^2}{(4x^2 + 1)^2}$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow x^2(4x^2 + 3) = 0 \rightarrow x = 0 \rightarrow (0, 0)$$

$f'(x) > 0$ si $x \neq 0 \rightarrow f(x)$ es creciente (tiene un punto de inflexión en $(0, 0)$)

• **Gráfica:**



$$c) y = x + \frac{4}{(x-1)^2}$$

• **Dominio:** $\mathbb{R} - \{1\}$

• **Asíntotas:**

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty \end{array} \right\} x = 1 \text{ es asíntota vertical}$$

$y = x$ es asíntota oblicua.

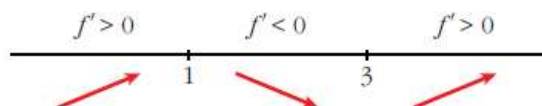
(Si $x \rightarrow -\infty$, $f(x) > x$; si $x \rightarrow +\infty$, $f(x) > x$).

- **Crecimiento, decrecimiento, extremos relativos:**

$$f'(x) = 1 - \frac{8}{(x-1)^3} = \frac{(x-1)^3 - 8}{(x-1)^3}$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow (x-1)^3 = 8 \rightarrow x-1 = 2 \rightarrow x = 3$$

Signo de $f'(x)$:

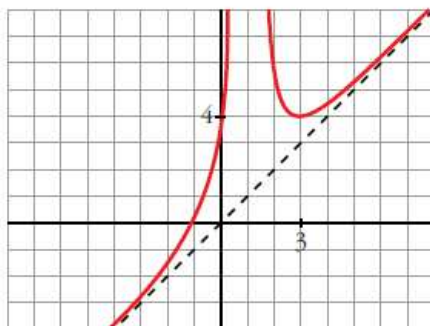


$f(x)$ es creciente en $(-\infty, 1) \cup (3, +\infty)$

es decreciente en $(1, 3)$

tiene un mínimo en $(3, 4)$

- **Gráfica:**



d) $y = \sqrt{x^2 - 4} - x - 2$

- **Dominio:** $(-\infty, -2] \cup [2, +\infty)$

- **Asíntotas:**

No tiene asíntotas verticales.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} [\sqrt{x^2 - 4} + x - 2] = +\infty$$

$$m = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 - 4} + x - 2}{-x} = \frac{2}{-1} = -2$$

$$n = \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) + 2x] = \lim_{x \rightarrow +\infty} [\sqrt{x^2 - 4} + x - 2 - 2x] =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} [\sqrt{x^2 - 4} - x - 2] = \lim_{x \rightarrow +\infty} [\sqrt{x^2 - 4} - (x + 2)] =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{[\sqrt{x^2 - 4} - (x + 2)][\sqrt{x^2 - 4} + (x + 2)]}{[\sqrt{x^2 - 4} + (x + 2)]} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 4 - (x + 2)^2}{\sqrt{x^2 - 4} + x + 2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 4 - x^2 - 4x - 4}{\sqrt{x^2 - 4} + x + 2} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-4x - 8}{\sqrt{x^2 - 4} + x + 2} = \frac{-4}{2} = -2$$

$y = -2x - 2$ es asíntota oblicua cuando $x \rightarrow -\infty$.

$$(f(x) < -2x - 2)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} [\sqrt{x^2 - 4} - x - 2] = -2$$

$y = -2$ es asíntota horizontal.

$$(f(x) < -2)$$

• **Crecimiento, máximos y mínimos:**

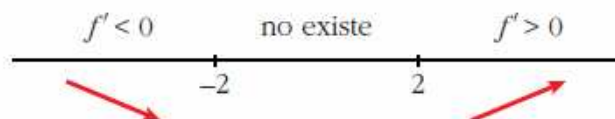
$$f'(x) = \frac{2x}{2\sqrt{x^2 - 4}} - 1 = \frac{x - \sqrt{x^2 - 4}}{\sqrt{x^2 - 4}}$$

$f(x)$ no es derivable en $x = -2$ ni en $x = 2$.

$$f'(x) = 0 \rightarrow x - \sqrt{x^2 - 4} = 0 \rightarrow x = \sqrt{x^2 - 4} \rightarrow x = x^2 - 4 \rightarrow$$

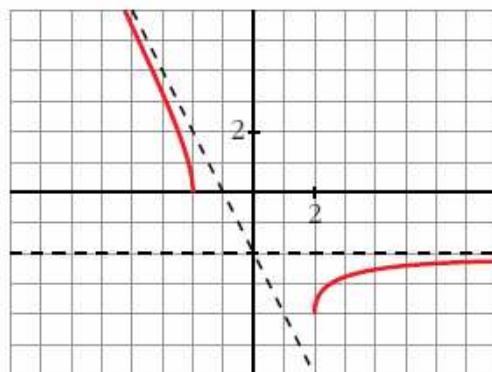
$$\rightarrow \text{no tiene solución} \rightarrow \text{no hay puntos singulares}$$

Signo de $f'(x)$:



$f(x)$ es decreciente en $(-\infty, -2)$ y es creciente en $(2, +\infty)$.

• **Gráfica:**



Ejercicio 12.-

Estudia los máximos, mínimos y puntos de inflexión de las siguientes funciones y represéntalas gráficamente:

a) $y = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ b) $y = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$

a) $y = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \sinh x$. Esta función se denomina seno hiperbólico de x .

• $f'(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$

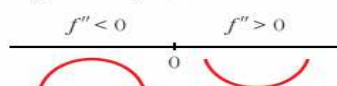
$f'(x) = 0 \rightarrow e^x + e^{-x} = 0 \rightarrow$ no tiene solución $\rightarrow$
 $\rightarrow$ no hay máximos ni mínimos

$f'(x) > 0$ para todo $x \rightarrow f(x)$ es creciente

• $f''(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$

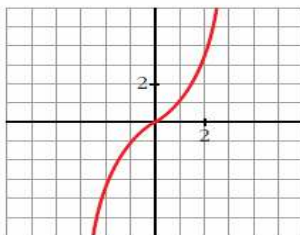
$f''(x) = 0 \rightarrow e^x - e^{-x} = 0 \rightarrow e^x - \frac{1}{e^x} = 0 \rightarrow e^{2x} - 1 = 0$
 $e^{2x} = 1 \rightarrow 2x = 0 \rightarrow x = 0 \rightarrow y = 0$

Signo de $f''(x)$:



Hay un punto de inflexión en $(0, 0)$.

• Gráfica:

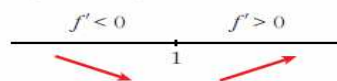


b) $y = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \cosh x$. Esta función se denomina coseno hiperbólico de x .

• $f'(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$

$f'(x) = 0 \rightarrow e^x - e^{-x} = 0 \rightarrow x = 0 \rightarrow y = 1$

Signo de $f'(x)$:

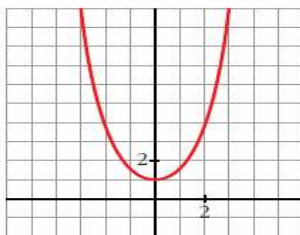


Hay un mínimo en $(0, 1)$.

• $f''(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$

$f''(x) = 0 \rightarrow$ no tiene solución $\rightarrow$ no hay puntos de inflexión

• Gráfica:



Ejercicio 13.-

Representa las siguientes funciones:

a) $y = \frac{x}{e^x}$

b) $y = \frac{\ln x}{x}$

c) $y = x \ln x$

d) $y = (x-1)e^x$

e) $y = e^{-x^2}$

f) $y = x^2 e^{-x}$

g) $y = \frac{x^3}{\ln x}$

h) $y = \ln(x^2 - 1)$

a) $y = \frac{x}{e^x}$

• Dominio: $\mathbb{R}$

• Asíntotas:

No tiene asíntotas verticales.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty; \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty \rightarrow \text{Rama parabólica}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^x} = 0$$

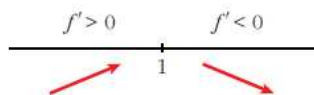
$y = 0$ es asíntota horizontal cuando $x \rightarrow +\infty$ ($f(x) > 0$).

• Puntos singulares:

$$f'(x) = \frac{e^x - xe^x}{e^{2x}} = \frac{e^x(1-x)}{e^{2x}} = \frac{1-x}{e^x}$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow 1-x=0 \rightarrow x=1$$

Signo de $f'(x)$



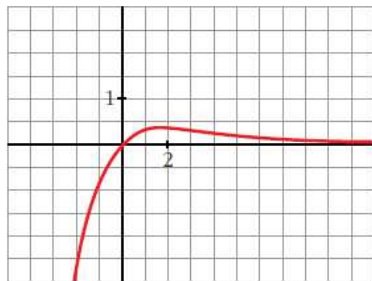
$f(x)$ es creciente en $(-\infty, 1)$

es decreciente en $(1, +\infty)$

tiene un máximo en $\left(1, \frac{1}{e}\right)$

• Corta a los ejes en el punto $(0, 0)$.

• Gráfica:



b) $y = \frac{\ln x}{x}$

• Dominio: $(0, +\infty)$

• Asíntotas:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty \rightarrow x=0 \text{ es asíntota vertical}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1/x}{x} = 0$$

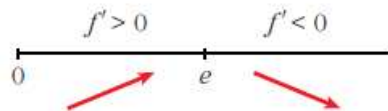
$y = 0$ es asíntota horizontal cuando $x \rightarrow +\infty$ ($f(x) > 0$).

• **Puntos singulares:**

$$f'(x) = \frac{(1/x) \cdot x - \ln x}{x^2} = \frac{1 - \ln x}{x^2}$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow \ln x = 1 \rightarrow x = e$$

Signo de $f'(x)$:



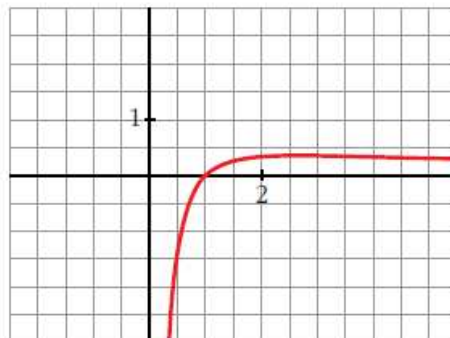
$f(x)$ es creciente en $(0, e)$

es decreciente en $(e, +\infty)$

tiene un máximo en $\left(e, \frac{1}{e}\right)$

- Corta al eje X en $(1, 0)$.

• **Gráfica:**



c) $y = x \ln x$

- **Dominio:** $(0, +\infty)$

• **Asíntotas:**

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{1/x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1/x}{-1/x^2} = \lim_{x \rightarrow 0^+} (-x) = 0$$

No tiene asíntotas verticales.

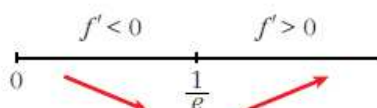
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty \rightarrow \text{Rama parabólica}$$

• **Puntos singulares:**

$$f'(x) = \ln x + x \cdot \frac{1}{x} = \ln x + 1$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow \ln x = -1 \rightarrow x = e^{-1} = \frac{1}{e}$$

Signo de $f'(x)$:



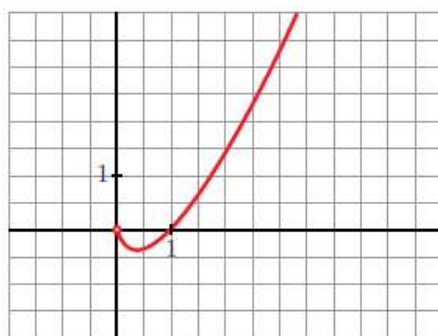
$f(x)$ es decreciente en $\left(0, \frac{1}{e}\right)$

es creciente en $\left(\frac{1}{e}, +\infty\right)$

tiene un mínimo en $\left(\frac{1}{e}, -\frac{1}{e}\right)$

- Corta al eje X en $(1, 0)$.

- **Gráfica:**



d) $y = (x - 1)e^x$

- **Dominio:** $\mathbb{R}$

- **Asíntotas:**

No tiene asíntotas verticales.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (-x - 1)e^{-x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x - 1}{e^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-1}{e^x} = 0$$

$y = 0$ es asíntota horizontal cuando $x \rightarrow -\infty$ ($f(x) < 0$).

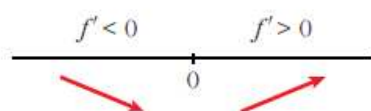
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty \rightarrow \text{Rama parabólica}$$

- **Puntos singulares:**

$$f'(x) = e^x + (x - 1)e^x = e^x(1 + x - 1) = xe^x$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow x = 0$$

Signo de $f'(x)$:



$f(x)$ es decreciente en $(-\infty, 0)$
 es creciente en $(0, +\infty)$
 tiene un mínimo en $(0, -1)$

• Corta al eje X en $(1, 0)$.

• **Gráfica:**



e) $y = e^{-x^2}$

• **Dominio:** $\mathbb{R}$

• **Asíntotas:**

No tiene asíntotas verticales.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$$

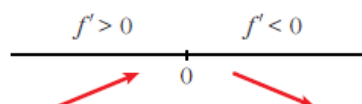
$y = 0$ es asíntota horizontal ($f(x) > 0$ para todo x).

• **Puntos singulares:**

$$f'(x) = -2xe^{-x^2}$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow -2x = 0 \rightarrow x = 0$$

Signo de $f'(x)$:

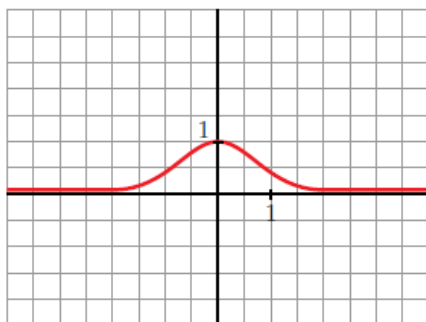


$f(x)$ es creciente en $(-\infty, 0)$

es decreciente en $(0, +\infty)$

tiene un máximo en $(0, 1)$

• **Gráfica:**



f) $y = x^2 e^{-x}$

• **Dominio:** $\mathbb{R}$

• **Asíntotas:**

No tiene asíntotas verticales.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty; \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = -\infty \rightarrow \text{Rama parabólica}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{e^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{e^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{e^x} = 0$$

$y = 0$ es asíntota horizontal cuando $x \rightarrow +\infty$ ($f(x) > 0$).

• **Puntos singulares:** $y = \frac{x^2}{e^x}$

$$f'(x) = \frac{2xe^x - x^2 e^x}{e^{2x}} = \frac{e^x (2x - x^2)}{e^{2x}} = \frac{2x - x^2}{e^x}$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow 2x - x^2 = 0 \rightarrow x(2 - x) = 0 \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$$

Signo de $f'(x)$:



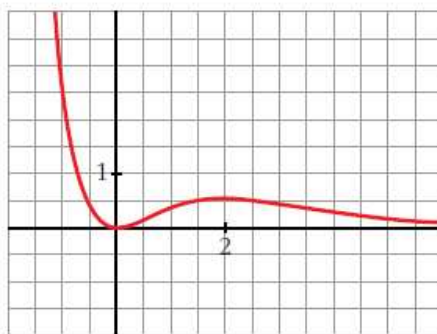
$f(x)$ es decreciente en $(-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$

es creciente en $(0, 2)$

tiene un mínimo en $(0, 0)$

tiene un máximo en $\left(2, \frac{4}{e^2}\right)$

• **Gráfica:**



g) $y = \frac{x^3}{\ln x}$

• **Dominio:**

$\ln x = 0 \rightarrow x = 1$. Además, ha de ser $x > 0$.

$$D = (0, 1) \cup (1, +\infty)$$

• **Asíntotas:**

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0$$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty \end{array} \right\} x = 1 \text{ es asíntota vertical}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty \rightarrow \text{Rama parabólica}$$

• **Puntos singulares:**

$$f'(x) = \frac{3x^2 \ln x - x^3 \cdot (1/x)}{(\ln x)^2} = \frac{3x^2 \ln x - x^2}{(\ln x)^2} = \frac{x^2(3 \ln x - 1)}{(\ln x)^2}$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow x^2(3 \ln x - 1) = 0 \begin{cases} x = 0 \text{ (no vale)} \\ \ln x = 1/3 \rightarrow x = e^{1/3} \end{cases}$$

Signo de $f'(x)$:

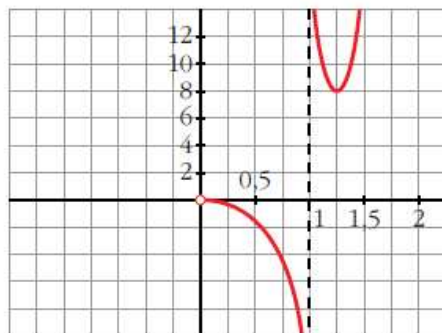


$f(x)$ es decreciente en $(0, 1) \cup (1, e^{1/3})$

es creciente en $(e^{1/3}, +\infty)$

tiene un mínimo en $(e^{1/3}, 3e)$

• **Gráfica:**



h) $y = \ln(x^2 - 1)$

• **Dominio:** $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$

• **Asíntotas:**

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = -\infty \rightarrow x = -1 \text{ es asíntota vertical}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = -\infty \rightarrow x = 1 \text{ es asíntota vertical}$$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty; \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0 \end{array} \right\} \text{ Ramas parabólicas}$$

• **Puntos singulares:**

$$f'(x) = \frac{2x}{x^2 - 1}$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow 2x = 0 \rightarrow x = 0$$

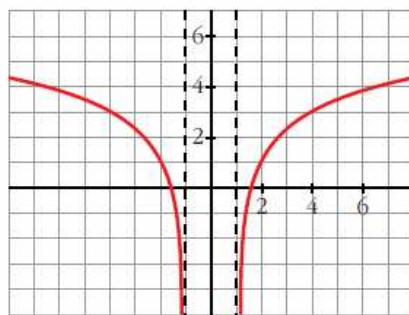
No hay puntos singulares ($x = 0$ no pertenece al dominio).

• **Puntos de corte con el eje X:**

$$\ln(x^2 - 1) = 0 \rightarrow x^2 - 1 = 1 \rightarrow x^2 = 2 \begin{cases} x = -\sqrt{2} \\ x = \sqrt{2} \end{cases}$$

Puntos: $(-\sqrt{2}, 0)$ y $(\sqrt{2}, 0)$

• **Gráfica:**



Ejercicio 14.-

Estudia y representa las siguientes funciones:

a) $y = \sqrt[3]{4 - x^2}$

b) $y = \sqrt{x^2 - x}$

c) $y = \sqrt{x^2 - 4x + 5}$

d) $y = \frac{x^2}{\sqrt{x^2 - 1}}$

a) $y = \sqrt[3]{4 - x^2}$

• **Dominio:** $\mathbb{R}$

• **Asíntotas:**

No tiene asíntotas verticales.

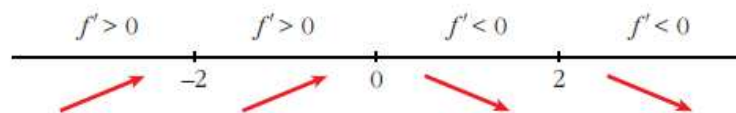
$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty; \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0 \end{array} \right\} \text{ Ramas parabólicas}$$

• **Puntos singulares:**

$$f'(x) = \frac{-2x}{3\sqrt[3]{(4 - x^2)^2}} \rightarrow f(x) \text{ NO es derivable en } x = -2 \text{ ni en } x = 2$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow -2x = 0 \rightarrow x = 0$$

Signo de $f'(x)$



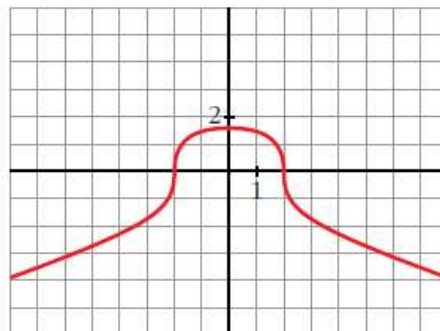
$f(x)$ es creciente en $(-\infty, 0)$

es decreciente en $(0, +\infty)$

tiene un máximo en $(0, \sqrt[3]{4})$

- Corta al eje X en $(-2, 0)$ y en $(2, 0)$.

- **Gráfica:**



b) $y = \sqrt{x^2 - x}$

- **Dominio:** $(-\infty, 0] \cup [1, +\infty)$

- **Asíntotas:**

No tiene asíntotas verticales.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 + x}}{-x} = -1$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) + x] &= \lim_{x \rightarrow +\infty} [\sqrt{x^2 + x} - x] = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{[\sqrt{x^2 + x} - x][\sqrt{x^2 + x} + x]}{(\sqrt{x^2 + x} + x)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + x - x^2}{\sqrt{x^2 + x} + x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2 + x} + x} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$y = -x + \frac{1}{2}$ es asíntota oblicua cuando $x \rightarrow -\infty$ $\left(f(x) < -x + \frac{1}{2}\right)$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 - x}}{x} = 1$$

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - x] &= \lim_{x \rightarrow +\infty} [\sqrt{x^2 - x} - x] = \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{[\sqrt{x^2 - x} - x][\sqrt{x^2 - x} + x]}{(\sqrt{x^2 - x} + x)} = \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - x - x^2}{\sqrt{x^2 - x} + x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x}{\sqrt{x^2 - x} + x} = -\frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

$y = x - \frac{1}{2}$ es asíntota oblicua cuando $x \rightarrow +\infty$ $\left(f(x) < x - \frac{1}{2}\right)$.

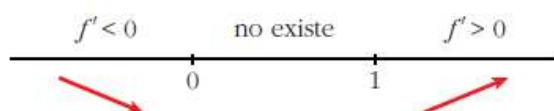
• **Puntos singulares:**

$$f'(x) = \frac{2x - 1}{2\sqrt{x^2 - x}}$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow 2x - 1 = 0 \rightarrow x = \frac{1}{2}$$

No tiene puntos singulares (en $x = \frac{1}{2}$ no está definida $f(x)$).

Signo de $f'(x)$:

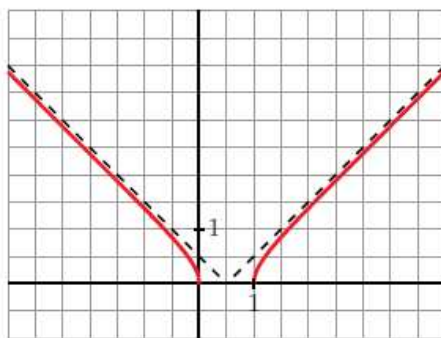


$f(x)$ es decreciente en $(-\infty, 0]$

es creciente en $[1, +\infty)$

• Pasa por $(0, 0)$ y $(1, 0)$.

• **Gráfica:**



c) $y = \sqrt{x^2 - 4x + 5}$

• **Dominio:**

$$x^2 - 4x + 5 = 0 \rightarrow x = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 20}}{2} \rightarrow \text{no tiene solución}$$

$f(x) > 0$ para todo x

$$D = \mathbb{R}$$

• **Asíntotas:**

No tiene asíntotas verticales.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 4x + 5}}{-x} = -1$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) + x] &= \lim_{x \rightarrow +\infty} [\sqrt{x^2 + 4x + 5} - x] = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{x^2 + 4x + 5} - x)(\sqrt{x^2 + 4x + 5} + x)}{(\sqrt{x^2 + 4x + 5} + x)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 4x + 5 - x^2}{\sqrt{x^2 + 4x + 5} + x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x + 5}{\sqrt{x^2 + 4x + 5} + x} = \\ &= \frac{4}{2} = 2 \end{aligned}$$

$y = -x + 2$ es asíntota oblicua cuando $x \rightarrow -\infty$ ($f(x) > -x + 2$).

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 - 4x + 5}}{x} = 1$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - x] &= \lim_{x \rightarrow +\infty} [\sqrt{x^2 - 4x + 5} - x] = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{x^2 - 4x + 5} - x)(\sqrt{x^2 - 4x + 5} + x)}{(\sqrt{x^2 - 4x + 5} + x)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 4x + 5 - x^2}{\sqrt{x^2 - 4x + 5} + x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-4x + 5}{\sqrt{x^2 - 4x + 5} + x} = \\ &= \frac{-4}{2} = -2 \end{aligned}$$

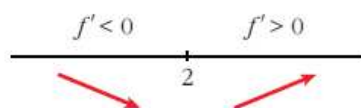
$y = x - 2$ es asíntota oblicua cuando $x \rightarrow +\infty$ ($f(x) > x - 2$).

• **Puntos singulares:**

$$f'(x) = \frac{2x - 4}{2\sqrt{x^2 - 4x + 5}} = \frac{x - 2}{\sqrt{x^2 - 4x + 5}}$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow x - 2 = 0 \rightarrow x = 2$$

Signo de $f'(x)$

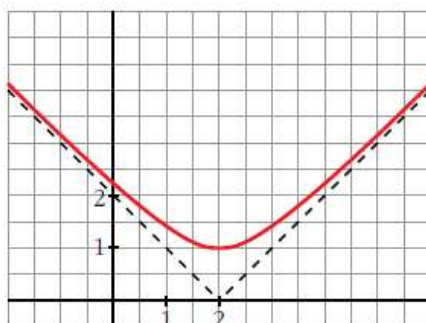


$f(x)$ es decreciente en $(-\infty, 2)$

es creciente en $(2, +\infty)$

tiene un mínimo en $(2, 1)$

• **Gráfica:**



$$d) y = \frac{x^2}{\sqrt{x^2 - 1}}$$

• **Dominio:** $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$

• **Simetrías:** $f(-x) = f(x) \rightarrow f(x)$ es par: simétrica respecto al eje Y .

• **Asíntotas:**

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = +\infty \rightarrow x = -1 \text{ es asíntota vertical}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty \rightarrow x = 1 \text{ es asíntota vertical}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x}{\sqrt{x^2 - 1}} = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) + x] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{x^2}{\sqrt{x^2 - 1}} - x \right] =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - x\sqrt{x^2 - 1}}{\sqrt{x^2 - 1}} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x^2 - x\sqrt{x^2 - 1})(x^2 + x\sqrt{x^2 - 1})}{(\sqrt{x^2 - 1})(x^2 + x\sqrt{x^2 - 1})} =$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^4 - x^2(x^2 - 1)}{(\sqrt{x^2 - 1})(x^2 + x\sqrt{x^2 - 1})} = \\
&= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^4 - x^4 + x^2}{(\sqrt{x^2 - 1})(x^2 + x\sqrt{x^2 - 1})} = \\
&= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x^2\sqrt{x^2 - 1} + x(x^2 - 1)} = \\
&= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x^2\sqrt{x^2 - 1} + x^3 - x} = 0
\end{aligned}$$

$y = -x$ es asíntota oblicua cuando $x \rightarrow -\infty$ ($f(x) > -x$).

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}} = 1$$

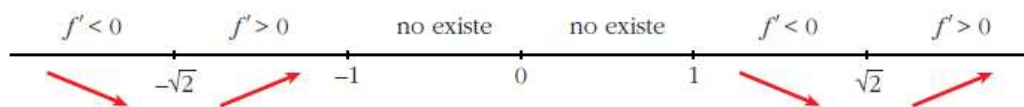
Como $f(x)$ es par, la recta $y = x$ es asíntota oblicua cuando $x \rightarrow +\infty$ ($f(x) > x$).

• **Puntos singulares:**

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{2x\sqrt{x^2 - 1} - x^2 \cdot \frac{2x}{2\sqrt{x^2 - 1}}}{(x^2 - 1)} = \frac{2x(x^2 - 1) - x^3}{\sqrt{(x^2 - 1)^3}} = \frac{2x^3 - 2x - x^3}{\sqrt{(x^2 - 1)^3}} = \\
&= \frac{x^3 - 2x}{\sqrt{(x^2 - 1)^3}}
\end{aligned}$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow x(x^2 - 2) = 0 \begin{cases} x = 0 \text{ (no vale)} \\ x = -\sqrt{2} \\ x = \sqrt{2} \end{cases}$$

Signo de $f'(x)$



$f(x)$ es decreciente en $(-\infty, -\sqrt{2}) \cup (1, \sqrt{2})$

es creciente en $(-\sqrt{2}, -1) \cup (\sqrt{2}, +\infty)$

tiene un mínimo en $(-\sqrt{2}, 2)$ y otro en $(\sqrt{2}, 2)$

• **Gráfica:**

