

EJERCICIOS DE DETERMINANTES

Ejercicio 1.-

Calcula el valor de los siguientes determinantes y di por qué son cero algunos de ellos:

$$\text{a) } \begin{vmatrix} 13 & 6 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} \quad \text{b) } \begin{vmatrix} 13 & 6 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} \quad \text{c) } \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 11 & 0 \end{vmatrix} \quad \text{d) } \begin{vmatrix} 7 & -2 \\ 7 & -2 \end{vmatrix} \quad \text{e) } \begin{vmatrix} 3 & 11 \\ 21 & 77 \end{vmatrix} \quad \text{f) } \begin{vmatrix} -140 & 7 \\ 60 & -3 \end{vmatrix}$$

$$\text{a) } \begin{vmatrix} 13 & 6 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 2 \qquad \text{b) } \begin{vmatrix} 13 & 6 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} = -50$$

$$\text{c) } \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 11 & 0 \end{vmatrix} = 0, \text{ porque tiene una columna de ceros.}$$

$$\text{d) } \begin{vmatrix} 7 & -2 \\ 7 & -2 \end{vmatrix} = 0, \text{ porque tiene sus dos filas iguales.}$$

$$\text{e) } \begin{vmatrix} 3 & 11 \\ 21 & 77 \end{vmatrix} = 0, \text{ porque sus filas son proporcionales: } (1^a) \cdot 7 = (2^a)$$

$$\text{f) } \begin{vmatrix} -140 & 7 \\ 60 & -3 \end{vmatrix} = 0, \text{ porque sus dos columnas son proporcionales: } (2^a) \cdot (-20) = (1^a)$$

Ejercicio 2.-

Calcula el valor de los siguientes determinantes teniendo en cuenta estos datos:

$$A = \begin{pmatrix} l & m \\ n & p \end{pmatrix} \quad |A| = -13$$

$$\text{a) } \begin{vmatrix} n & p \\ l & m \end{vmatrix} \quad \text{b) } |6A| \quad \text{c) } \begin{vmatrix} l & 4m \\ n & 4p \end{vmatrix} \quad \text{d) } |A^{-1}|$$

$$\text{a) } \begin{vmatrix} n & p \\ l & m \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} l & m \\ n & p \end{vmatrix} = -(-13) = 13$$

$$\text{b) } |6A| = \begin{vmatrix} 6l & 6m \\ 6n & 6p \end{vmatrix} = 6 \cdot 6 \begin{vmatrix} l & m \\ n & p \end{vmatrix} = 36 \cdot (-13) = -468$$

$$\text{c) } \begin{vmatrix} l & 4m \\ n & 4p \end{vmatrix} = 4 \begin{vmatrix} l & m \\ n & p \end{vmatrix} = 4 \cdot (-13) = -52$$

$$\text{d) } |A \cdot A^{-1}| = |A| \cdot |A^{-1}| = 1 \rightarrow |A^{-1}| = \frac{1}{|A|} = \frac{1}{-13} = -\frac{1}{13}$$

Ejercicio 3.-

Calcula los siguientes determinantes:

$$\text{a) } \begin{vmatrix} 5 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & 6 \\ 9 & 6 & 8 \end{vmatrix} \qquad \text{b) } \begin{vmatrix} 9 & 0 & 3 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\text{a) } \begin{vmatrix} 5 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & 6 \\ 9 & 6 & 8 \end{vmatrix} = -114 \qquad \text{b) } \begin{vmatrix} 9 & 0 & 3 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 3$$

Ejercicio 4.-

Halla el valor de estos determinantes:

$$\text{a) } \begin{vmatrix} 0 & 4 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\text{b) } \begin{vmatrix} 10 & 47 & 59 \\ 0 & 10 & 91 \\ 0 & 0 & 10 \end{vmatrix}$$

$$\text{a) } \begin{vmatrix} 0 & 4 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 14$$

$$\text{b) } \begin{vmatrix} 10 & 47 & 59 \\ 0 & 10 & 91 \\ 0 & 0 & 10 \end{vmatrix} = 1000$$

Ejercicio 5.-

Justifica, sin desarrollar, estas igualdades:

$$\text{a) } \begin{vmatrix} 3 & -1 & 7 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 11 & 4 \end{vmatrix} = 0$$

$$\text{b) } \begin{vmatrix} 4 & 1 & 7 \\ 2 & 9 & 1 \\ -8 & -2 & -14 \end{vmatrix} = 0$$

$$\text{c) } \begin{vmatrix} 7 & 4 & 1 \\ 2 & 9 & 7 \\ 27 & 94 & 71 \end{vmatrix} = 0$$

$$\text{d) } \begin{vmatrix} 45 & 11 & 10 \\ 4 & 1 & 1 \\ 5 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

a) Tiene una fila de ceros (propiedad 2).

b) La 3ª fila es proporcional a la 1ª ($3^a = (-2) \cdot 1^a$) (propiedad 6).

c) La 3ª fila es combinación lineal de las dos primeras ($3^a = 1^a + 10 \cdot 2^a$) (propiedad 9).

d) La 1ª fila es combinación lineal de las otras dos ($1^a = 10 \cdot 2^a + 3^a$) (propiedad 9).

Ejercicio 6.-

Teniendo en cuenta el resultado del determinante que se da, calcula el resto sin desarrollar:

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ 5 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \quad \text{a) } \begin{vmatrix} 3x & 3y & 3z \\ 5 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \quad \text{b) } \begin{vmatrix} 5x & 5y & 5z \\ 1 & 0 & 3/5 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \quad \text{c) } \begin{vmatrix} x & y & z \\ 2x+5 & 2y & 2z+3 \\ x+1 & y+1 & z+1 \end{vmatrix}$$

$$\text{a) } \begin{vmatrix} 3x & 3y & 3z \\ 5 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} x & y & z \\ 5 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 3 \cdot 1 = 3$$

$$\text{b) } \begin{vmatrix} 5x & 5y & 5z \\ 1 & 0 & 3/5 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 5 \cdot \frac{1}{5} \begin{vmatrix} x & y & z \\ 5 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 = 1$$

$$\text{c) } \begin{vmatrix} x & y & z \\ 2x+5 & 2y & 2z+3 \\ x+1 & y+1 & z+1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & y & z \\ 5 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

Ejercicio 7.-

Calcula el siguiente determinante aplicando la regla de Sarrus y desarrollándolo por cada una de sus filas y cada una de sus columnas:

$$\begin{vmatrix} 3 & 7 & -1 \\ -5 & 2 & 6 \\ 9 & 8 & 4 \end{vmatrix}$$

Comprueba que se obtiene el mismo resultado en los siete casos.

Aplicando la regla de Sarrus:

$$\begin{vmatrix} 3 & 7 & -1 \\ -5 & 2 & 6 \\ 9 & 8 & 4 \end{vmatrix} = 3 \cdot 2 \cdot 4 + (-5) \cdot 8 \cdot (-1) + 7 \cdot 6 \cdot 9 - (-1) \cdot 2 \cdot 9 - 6 \cdot 8 \cdot 3 - 7 \cdot (-5) \cdot 4 = 456$$

Desarrollando por la 1ª fila:

$$\begin{vmatrix} 3 & 7 & -1 \\ -5 & 2 & 6 \\ 9 & 8 & 4 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 8 & 4 \end{vmatrix} - 7 \begin{vmatrix} -5 & 6 \\ 9 & 4 \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} -5 & 2 \\ 9 & 8 \end{vmatrix} = 3 \cdot (-40) - 7 \cdot (-74) - 1 \cdot (-58) = -120 + 518 + 58 = 456$$

Desarrollando por la 2ª fila:

$$\begin{vmatrix} 3 & 7 & -1 \\ -5 & 2 & 6 \\ 9 & 8 & 4 \end{vmatrix} = 5 \begin{vmatrix} 7 & -1 \\ 8 & 4 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 9 & 4 \end{vmatrix} - 6 \begin{vmatrix} 3 & 7 \\ 9 & 8 \end{vmatrix} = 5 \cdot 36 + 2 \cdot 21 - 6 \cdot (-39) = 180 + 42 + 234 = 456$$

Desarrollando por la 3ª fila:

$$\begin{vmatrix} 3 & 7 & -1 \\ -5 & 2 & 6 \\ 9 & 8 & 4 \end{vmatrix} = 9 \begin{vmatrix} 7 & -1 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} - 8 \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 6 \end{vmatrix} + 4 \begin{vmatrix} 3 & 7 \\ -5 & 2 \end{vmatrix} = 9 \cdot 44 - 8 \cdot 13 + 4 \cdot 41 = 396 - 104 + 164 = 456$$

Desarrollando por la 1ª columna:

$$\begin{vmatrix} 3 & 7 & -1 \\ -5 & 2 & 6 \\ 9 & 8 & 4 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 8 & 4 \end{vmatrix} + 5 \begin{vmatrix} 7 & -1 \\ 8 & 4 \end{vmatrix} + 9 \begin{vmatrix} 7 & -1 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = 3 \cdot (-40) + 5 \cdot 36 + 9 \cdot 44 = -120 + 180 + 396 = 456$$

Desarrollando por la 2ª columna:

$$\begin{vmatrix} 3 & 7 & -1 \\ -5 & 2 & 6 \\ 9 & 8 & 4 \end{vmatrix} = -7 \begin{vmatrix} -5 & 6 \\ 9 & 4 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 9 & 4 \end{vmatrix} - 8 \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 6 \end{vmatrix} = -7 \cdot (-74) + 2 \cdot 21 - 8 \cdot 13 = 518 + 42 - 104 = 456$$

Desarrollando por la 3ª columna:

$$\begin{vmatrix} 3 & 7 & -1 \\ -5 & 2 & 6 \\ 9 & 8 & 4 \end{vmatrix} = -1 \begin{vmatrix} -5 & 2 \\ 9 & 8 \end{vmatrix} - 6 \begin{vmatrix} 3 & 7 \\ 9 & 8 \end{vmatrix} + 4 \begin{vmatrix} 3 & 7 \\ -5 & 2 \end{vmatrix} = -1 \cdot (-58) - 6 \cdot (-39) + 4 \cdot 41 =$$

$$= 58 + 234 + 164 = 456$$

Ejercicio 8.-

De las siguientes operaciones con determinantes de orden 2×2 , señala las que son correctas y, en su caso, enuncia las propiedades que se utilizan:

a) $\begin{vmatrix} a & a \\ b & b \end{vmatrix} = 0$ b) $\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = 4 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}$

c) $\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}$ d) $\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}$

a) Verdadero. Tiene las dos columnas iguales.

b) Verdadero. Si una fila está multiplicada por un número, el determinante queda multiplicado por ese número.

c) Falso; sería $\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = 4 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}$.

d) Verdadero. Si la 2ª fila está multiplicada por 2, el determinante queda multiplicado por 2.

Ejercicio 9.-

Si $\begin{vmatrix} m & n \\ p & q \end{vmatrix} = -5$, ¿cuál es el valor de cada uno de estos determinantes? Justifica las respuestas:

a) $\begin{vmatrix} m+3n & p+3q \\ n & q \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} p & m \\ q & n \end{vmatrix}$ c) $\begin{vmatrix} 3n-m \\ 3q-p \end{vmatrix}$

d) $\begin{vmatrix} p & 2m \\ q & 2n \end{vmatrix}$ e) $\begin{vmatrix} 1 & n/m \\ mp & mq \end{vmatrix}$ f) $\begin{vmatrix} m & 5m \\ p & 5p \end{vmatrix}$

a) $\begin{vmatrix} m+3n & p+3q \\ n & q \end{vmatrix} \stackrel{(1)}{=} \begin{vmatrix} m & p \\ n & q \end{vmatrix} \stackrel{(2)}{=} \begin{vmatrix} m & n \\ p & q \end{vmatrix} = -5$

b) $\begin{vmatrix} p & m \\ q & n \end{vmatrix} \stackrel{(2)}{=} \begin{vmatrix} p & q \\ m & n \end{vmatrix} \stackrel{(3)}{=} - \begin{vmatrix} m & n \\ p & q \end{vmatrix} = -(-5) = 5$

c) $\begin{vmatrix} 3n-m \\ 3q-p \end{vmatrix} \stackrel{(4)}{=} -3 \begin{vmatrix} n & m \\ q & p \end{vmatrix} \stackrel{(3)}{=} 3 \begin{vmatrix} m & n \\ p & q \end{vmatrix} = 3 \cdot (-5) = -15$

d) $\begin{vmatrix} p & 2m \\ q & 2n \end{vmatrix} \stackrel{(4)}{=} 2 \begin{vmatrix} p & m \\ q & n \end{vmatrix} \stackrel{(2)}{=} 2 \begin{vmatrix} p & q \\ m & n \end{vmatrix} \stackrel{(3)}{=} -2 \begin{vmatrix} m & n \\ p & q \end{vmatrix} = -2 \cdot (-5) = 10$

e) $\begin{vmatrix} 1 & n/m \\ mp & mq \end{vmatrix} \stackrel{(4)}{=} \frac{1}{m} \cdot m \begin{vmatrix} m & n \\ p & q \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} m & n \\ p & q \end{vmatrix} = -5$

f) $\begin{vmatrix} m & 5m \\ p & 5p \end{vmatrix} = 0$, pues las dos columnas son proporcionales.

Ejercicio 10.-

Resuelve estas ecuaciones:

$$\text{a) } \begin{vmatrix} 1+x & 1-x \\ 1-x & 1+x \end{vmatrix} = 12 \quad \text{b) } \begin{vmatrix} \operatorname{sen} x & \cos x \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{c) } \begin{vmatrix} x-2 & 1-2x \\ x & x^2 \end{vmatrix} = 0$$

$$\text{a) } \begin{vmatrix} 1+x & 1-x \\ 1-x & 1+x \end{vmatrix} = 12$$

$$\begin{vmatrix} 1+x & 1-x \\ 1-x & 1+x \end{vmatrix} = (1+x)^2 - (1-x)^2 = 1+x^2+2x - (1+x^2-2x) =$$

$$= 1+x^2+2x-1-x^2+2x = 4x = 12 \rightarrow x = 3$$

$$\text{b) } \begin{vmatrix} \operatorname{sen} x & \cos x \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} \operatorname{sen} x & \cos x \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = \operatorname{sen} x - \cos x = 0 \rightarrow \operatorname{sen} x = \cos x \rightarrow \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} = 1 \rightarrow$$

$$\rightarrow \operatorname{tg} x = 1 \begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + 2\pi k \\ x = \frac{5\pi}{4} + 2\pi k \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$\text{c) } \begin{vmatrix} x-2 & 1-2x \\ x & x^2 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} x-2 & 1-2x \\ x & x^2 \end{vmatrix} = x^2 \cdot (x-2) - x(1-2x) = x^3 - 2x^2 - x + 2x^2 = x^3 - x =$$

$$= x(x^2 - 1) = 0 \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \\ x = -1 \end{cases}$$

Ejercicio 11.-

Halla el rango de las siguientes matrices:

$$\text{a) } C = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 6 & 10 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 4 & 5 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{b) } D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & -1 \\ 4 & 5 & 6 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\text{a) } C = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 6 & 10 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 4 & 5 & 0 \end{pmatrix}$$

Tomamos un menor de orden 2 distinto de cero: $\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 5 & 0 \end{vmatrix} = -5 \neq 0 \rightarrow \operatorname{ran}(C) \geq 2$

Las dos últimas filas son linealmente independientes.

Veamos si la 2ª fila depende linealmente de las dos últimas:

$$\begin{vmatrix} 6 & 10 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 4 & 5 & 0 \end{vmatrix} = 0. \text{ La 2ª fila depende linealmente de las dos últimas.}$$

Veamos si la 1ª fila depende de las dos últimas:

$$\begin{vmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 4 & 5 & 0 \end{vmatrix} = 10 \neq 0. \text{ Por tanto, } \text{ran}(C) = 3.$$

$$\text{b) } D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & -1 \\ 4 & 5 & 6 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\text{Tomamos un menor de orden 2 distinto de cero: } \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -5 \neq 0$$

Las dos primeras columnas son linealmente independientes. Luego $\text{ran}(D) \geq 2$

Veamos si la 3ª columna depende linealmente de las dos primeras:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = -3 \neq 0. \text{ Por tanto, } \text{ran}(D) = 3.$$

Ejercicio 12.-

Halla los valores de a que anulan cada uno de los siguientes determinantes:

$$\text{a) } \begin{vmatrix} 3 & 4 & -5 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & a \end{vmatrix} \quad \text{b) } \begin{vmatrix} a-1 & 1 & -1 \\ 0 & a+6 & 3 \\ a-1 & 2 & 0 \end{vmatrix} \quad \text{c) } \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & a^2 \end{vmatrix} \quad \text{d) } \begin{vmatrix} a+1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & a \\ 1 & a & 2 \end{vmatrix}$$

🔵 **Desarrolla, iguala a 0 y resuelve la ecuación que obtengas.**

$$\text{a) } \begin{vmatrix} 3 & 4 & -5 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & a \end{vmatrix} = -3 + 5 + 4 - 5 + 3 - 4a = 4 - 4a = 0 \rightarrow a = 1$$

$$\begin{aligned} \text{b) } \begin{vmatrix} a-1 & 1 & -1 \\ 0 & a+6 & 3 \\ a-1 & 2 & 0 \end{vmatrix} &= 3(a-1) + (a-1)(a+6) - 6(a-1) = (a-1)[3 + a + 6 - 6] = \\ &= (a-1)(3+a) = 0 \begin{cases} a = 1 \\ a = -3 \end{cases} \end{aligned}$$

$$\text{c) } \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & a^2 \end{vmatrix} = 4a^2 + 4 - 4 - 12 = 4a^2 - 12 = 0 \rightarrow a^2 = 3 \begin{cases} a = \sqrt{3} \\ a = -\sqrt{3} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{d) } \begin{vmatrix} a+1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & a \\ 1 & a & 2 \end{vmatrix} &= 4(a+1) + a + a - 2 - a^2(a+1) - 2 = \\ &= 4a + 4 + 2a - 2 - a^3 - a^2 \cdot 2 = -a^3 - a^2 + 6a = -a(a^2 + a - 6) = 0 \rightarrow \\ &\begin{cases} a = 0 \\ a^2 + a - 6 = 0 \end{cases} \rightarrow a = \frac{-1 \pm \sqrt{1+24}}{2} = \frac{-1 \pm 5}{2} \begin{cases} a = 2 \\ a = -3 \end{cases} \end{aligned}$$

Ejercicio 13.-

Justifica, sin desarrollar, que los siguientes determinantes son nulos:

$$\text{a)} \begin{vmatrix} -8 & 25 & 40 \\ 2/5 & 3 & -2 \\ 0 & 27 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\text{b)} \begin{vmatrix} 5 & 5 & 5 \\ a & b & c \\ b+c & a+c & a+b \end{vmatrix}$$

a) La 1ª y la 3ª columnas son proporcionales (la 3ª es -5 por la 1ª).

b) Sumamos la 3ª fila a la 2ª:

$$\begin{vmatrix} 5 & 5 & 5 \\ a & b & c \\ b+c & a+c & a+b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 5 & 5 \\ a+b+c & a+b+c & a+b+c \\ b+c & a+c & a+b \end{vmatrix} =$$

$$= 5(a+b+c) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ b+c & a+c & a+b \end{vmatrix} = 0 \text{ (pues tiene dos filas iguales).}$$

Ejercicio 14.-

Prueba, sin desarrollar, que $|A|$ es múltiplo de 3 y $|B|$ es múltiplo de 5:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 4 & 7 & 1 \\ 8 & 2 & 5 \end{vmatrix}$$

$$|B| = \begin{vmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 4 & 7 & 6 \\ 6 & 3 & 9 \end{vmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 4 & 7 & 1 \\ 8 & 2 & 5 \end{vmatrix} \stackrel{(1)}{=} \begin{vmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 4 & 7 & 12 \\ 8 & 2 & 15 \end{vmatrix} \stackrel{(2)}{=} 3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 4 & 7 & 4 \\ 8 & 2 & 5 \end{vmatrix} \rightarrow \text{Es múltiplo de 3.}$$

(1) Sumamos a la 3ª columna las otras dos.

(2) Si una columna se multiplica por un número, el determinante queda multiplicado por ese número.

$$|B| = \begin{vmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 4 & 7 & 6 \\ 6 & 3 & 9 \end{vmatrix} \stackrel{(3)}{=} \begin{vmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 4 & 7 & 6 \\ 10 & 10 & 15 \end{vmatrix} \stackrel{(2)}{=} 5 \begin{vmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 4 & 7 & 6 \\ 2 & 2 & 3 \end{vmatrix} \rightarrow \text{Es múltiplo de 5.}$$

(3) Sumamos a la 3ª fila la 2ª.

Ejercicio 15.-

Estudia el rango de las siguientes matrices según el valor del parámetro que aparece en ellas:

$$\text{a) } A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \\ 3 & 1 & a \end{pmatrix}$$

$$\text{b) } B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & a \\ a & 3 & 4 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\text{c) } C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -3 & 8 \\ a & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\text{d) } D = \begin{pmatrix} a & -1 & 1 \\ 1 & -a & 2a-1 \end{pmatrix}$$

$$\text{a) } |A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \\ 3 & 1 & a \end{vmatrix} = 2a - 6 + 4 - a = a - 2 = 0 \rightarrow a = 2$$

$$\bullet \text{ Si } a = 2 \rightarrow \text{Como } |A| = 0 \text{ y } \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \rightarrow \text{ran}(A) = 2$$

$$\bullet \text{ Si } a \neq 2 \rightarrow |A| \neq 0 \rightarrow \text{ran}(A) = 3$$

$$\text{b) } |B| = \begin{vmatrix} 2 & -1 & a \\ a & 3 & 4 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 12 - a^2 - 12 - 9a + 8 + 2a = -a^2 - 7a + 8 = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow a = \frac{7 \pm \sqrt{49 + 32}}{-2} = \frac{7 \pm \sqrt{81}}{-2} = \frac{7 \pm 9}{-2} \begin{cases} a = -8 \\ a = 1 \end{cases}$$

$$\text{Observamos que } \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 10 \neq 0 \rightarrow \text{ran}(B) \geq 2$$

Por tanto:

$$\bullet \text{ Si } a = 1 \rightarrow |B| = 0 \rightarrow \text{ran}(B) = 2$$

$$\bullet \text{ Si } a = -8 \rightarrow |B| = 0 \rightarrow \text{ran}(B) = 2$$

$$\bullet \text{ Si } a \neq 1 \text{ y } a \neq -8 \rightarrow |B| \neq 0 \rightarrow \text{ran}(B) = 3$$

c) Por el ejercicio 11, sabemos que $|C| = 0 \rightarrow a = 2$, y que:

$$\bullet \text{ Si } a = 2 \rightarrow \text{ran}(C) = 3$$

$$\bullet \text{ Si } a \neq 2 \rightarrow \text{ran}(C) = 4$$

$$\text{d) } D = \begin{pmatrix} a & -1 & 1 \\ 1 & -a & 2a-1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} a & -1 \\ 1 & -a \end{vmatrix} = -a^2 + 1 = 0 \begin{cases} a = 1 \\ a = -1 \end{cases}$$

• Si $a = 1$, queda:

$$D = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \text{ran}(D) = 1$$

• Si $a = -1$, queda:

$$D = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = 2 \neq 0 \rightarrow \text{ran}(D) = 2$$

$$\bullet \text{ Si } a \neq 1 \text{ y } a \neq -1 \rightarrow \text{ran}(D) = 2$$

Ejercicio 16.-

Determina el rango de las siguientes matrices según los valores de t :

a) $A = \begin{pmatrix} t & 1 & 1 \\ 1 & -t & 1 \\ 1 & 1 & t \end{pmatrix}$

b) $B = \begin{pmatrix} t & 2 & 2 \\ 2 & t & 0 \\ 1 & t & t \end{pmatrix}$

c) $C = \begin{pmatrix} t+3 & 4 & 0 \\ 0 & t-1 & 1 \\ -4 & -4 & t-1 \end{pmatrix}$

d) $D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \\ -t & 6 & 3-t & 9-t \end{pmatrix}$

e) $E = \begin{pmatrix} t & t & 0 \\ 2 & t+1 & t-1 \\ -2t-1 & 0 & t+3 \end{pmatrix}$

f) $F = \begin{pmatrix} t & 1 & 1 & 2 \\ 2 & t & t^2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

a) $|A| = \begin{vmatrix} t & 1 & 1 \\ 1 & -t & 1 \\ 1 & 1 & t \end{vmatrix} = -t^3 + 1 + 1 + t - t - t = -t^3 - t + 2 = (t-1)(-t^2 - t - 2) = 0$

$\begin{cases} t = 1 \\ -t^2 - t - 2 = 0 \rightarrow t^2 + t + 2 = 0 \rightarrow t = -\frac{1 \pm \sqrt{1-8}}{-2} \notin \mathbb{R}. \end{cases}$

• Si $t = 1$, queda:

$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$; como $|A| = 0$ y $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0 \rightarrow \text{ran}(A) = 2$

• Si $t \neq 1 \rightarrow |A| \neq 0 \rightarrow \text{ran}(A) = 3$

b) $|B| = \begin{vmatrix} t & 2 & 2 \\ 2 & t & 0 \\ 1 & t & t \end{vmatrix} = t^3 + 4t - 2t - 4t = t^3 - 2t = t(t^2 - 2) = 0 \begin{cases} t = 0 \\ t = \sqrt{2} \\ t = -\sqrt{2} \end{cases}$

• Si $t = 0$, queda:

$B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Como $\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -4 \neq 0 \rightarrow \text{ran}(B) = 2$

• Si $t = \sqrt{2}$, queda:

$B = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 2 & 2 \\ 2 & \sqrt{2} & 0 \\ 1 & \sqrt{2} & \sqrt{2} \end{pmatrix}$. Como $\begin{vmatrix} \sqrt{2} & 2 \\ 2 & \sqrt{2} \end{vmatrix} = -2 \neq 0 \rightarrow \text{ran}(B) = 2$

• Si $t = -\sqrt{2}$, queda:

$$B = \begin{pmatrix} -\sqrt{2} & 2 & 2 \\ 2 & -\sqrt{2} & 0 \\ 1 & -\sqrt{2} & -\sqrt{2} \end{pmatrix}. \text{ Como } \begin{vmatrix} -\sqrt{2} & 2 \\ 2 & -\sqrt{2} \end{vmatrix} = -2 \neq 0 \rightarrow \text{ran}(B) = 2$$

• Si $t \neq 0$, $t \neq \sqrt{2}$ y $t \neq -\sqrt{2} \rightarrow |B| \neq 0 \rightarrow \text{ran}(B) = 3$

$$\begin{aligned} \text{c) } |C| &= \begin{vmatrix} t+3 & 4 & 0 \\ 0 & t-1 & 1 \\ -4 & -4 & t-1 \end{vmatrix} = (t+3)(t-1)^2 - 16 + 4(t+3) = \\ &= (t+3)(t^2 - 2t + 1) - 16 + 4t + 12 = t^3 - 2t^2 + t + 3t^2 - 6t + 3 + 4t - 4 = \\ &= t^3 + t^2 - t - 1 = (t-1)(t+1)^2 = 0 \begin{cases} t = 1 \\ t = -1 \end{cases} \end{aligned}$$

• Si $t = 1$, queda:

$$C = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -4 & -4 & 0 \end{pmatrix}. \text{ Como } \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 4 \neq 0 \rightarrow \text{ran}(C) = 2$$

• Si $t = -1$, queda:

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ -4 & -4 & -2 \end{pmatrix}. \text{ Como } \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = -4 \neq 0 \rightarrow \text{ran}(C) = 2$$

• Si $t \neq 1$ y $t \neq -1 \rightarrow |C| \neq 0 \rightarrow \text{ran}(C) = 3$

$$\text{d) } D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \\ -t & 6 & 3-t & 9-t \end{pmatrix}$$

Observamos que la 4ª columna se obtiene sumando la 2ª y la 3ª. Por tanto, para hallar el rango, podemos prescindir de una de esas tres columnas, por ejemplo de la 3ª.

Tenemos que:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -t & 6 & 9-t \end{vmatrix} = (9-t) \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = (9-t)(-1) = t-9 = 0 \rightarrow t = 9$$

• Si $t = 9 \rightarrow \text{Como } \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \rightarrow \text{ran}(D) = 2$

• Si $t \neq 9 \rightarrow \text{ran}(D) = 3$

$$\begin{aligned}
 \text{e) } |E| &= \begin{vmatrix} t & t & 0 \\ 2 & t+1 & t-1 \\ -2t-1 & 0 & t+3 \end{vmatrix} = t(t+1)(t+3) + t(t-1)(-2t-1) - 2t(t+3) = \\
 &= t^3 + 4t^2 + 3t - 2t^3 + t^2 + t - 2t^2 - 6t = -t^3 + 3t^2 - 2t = t(-t^2 + 3t - 2) = 0 \\
 &\begin{cases} t = 0 \\ -t^2 + 3t - 2 = 0 \end{cases} \rightarrow t = \frac{-3 \pm \sqrt{9-8}}{-2} = \frac{-3 \pm 1}{-2} \begin{cases} t = 1 \\ t = 2 \end{cases}
 \end{aligned}$$

• Si $t = 0$, queda:

$$E = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}. \text{ Como } \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \rightarrow \text{ran}(E) = 2$$

• Si $t = 1$, queda:

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ -3 & 0 & 4 \end{pmatrix}. \text{ Como } \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -3 & 0 \end{vmatrix} = 6 \neq 0 \rightarrow \text{ran}(E) = 2$$

• Si $t = 2$, queda:

$$E = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ -5 & 0 & 5 \end{pmatrix}. \text{ Como } \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 2 \neq 0 \rightarrow \text{ran}(E) = 2$$

• Si $t \neq 0$, $t \neq 1$ y $t \neq 2 \rightarrow |E| \neq 0 \rightarrow \text{ran}(E) = 3$

$$\text{f) } F = \begin{pmatrix} t & 1 & 1 & 2 \\ 2 & t & t^2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}. \text{ Tenemos que: } \begin{vmatrix} t & 1 & 2 \\ 2 & t & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 2t^2 + 4 + 2 - 4t - t - 4 =$$

$$= 2t^2 - 5t + 2 = 0 \rightarrow t = \frac{5 \pm \sqrt{25-16}}{4} = \frac{5 \pm \sqrt{9}}{4} = \frac{5 \pm 3}{4} \begin{cases} t = 2 \\ t = \frac{1}{2} \end{cases}$$

- Si $t = 2$, queda:

$$F = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \end{matrix} \text{iguales. Además, } \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 2 \neq 0 \rightarrow \text{ran}(F) = 2$$

- Si $t = \frac{1}{2}$, queda:

$$F = \begin{pmatrix} 1/2 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1/2 & 1/4 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\text{Sabemos que } \begin{vmatrix} 1/2 & 1 & 2 \\ 2 & 1/2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0.$$

$$\text{Tenemos que } \begin{vmatrix} 1/2 & 1 & 2 \\ 2 & 1/4 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \frac{3}{4} \neq 0 \rightarrow \text{ran}(F) = 3$$

- Si $t \neq 2$ y $t \neq \frac{1}{2} \rightarrow \text{ran}(F) = 3$

Ejercicio 17.-

Sabiendo que $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ x & y & z \end{vmatrix} = 5$, calcula el valor de los siguientes determinantes:

$$\text{a) } \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a+7 & b+7 & c+7 \\ x/2 & y/2 & z/2 \end{vmatrix} \quad \text{b) } \begin{vmatrix} a & b & c \\ x & y & z \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \quad \text{c) } \begin{vmatrix} 1-x & 1-y & 1-z \\ a+2x & b+2y & c+2z \\ 2x & 2y & 2z \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned} \text{a) } & \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a+7 & b+7 & c+7 \\ x/2 & y/2 & z/2 \end{vmatrix} \stackrel{(1)}{=} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ x/2 & y/2 & z/2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 7 & 7 & 7 \\ x/2 & y/2 & z/2 \end{vmatrix} \stackrel{(2)}{=} \\ & = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ x & y & z \end{vmatrix} + 0 = \frac{1}{2} \cdot 5 = \frac{5}{2} \end{aligned}$$

(1) Descomponemos el determinante en suma de dos.

(2) Sacamos $\frac{1}{2}$ factor común de la 3ª fila. El 2º determinante es 0, pues las dos primeras filas son proporcionales.

$$\text{b) } \begin{vmatrix} a & b & c \\ x & y & z \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \stackrel{(1)}{=} - \begin{vmatrix} a & b & c \\ 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \end{vmatrix} \stackrel{(1)}{=} - \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ x & y & z \end{vmatrix} = 5$$

(1) Cuando cambiamos de orden dos filas consecutivas, el determinante cambia de signo.

$$\begin{aligned}
 \text{c) } \begin{vmatrix} 1-x & 1-y & 1-z \\ a+2x & b+2y & c+2z \\ 2x & 2y & 2z \end{vmatrix} &= \begin{matrix} \text{FILAS} \\ 1^a \\ 2^a - 3^a \\ 3^a \end{matrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1-x & 1-y & 1-z \\ a & b & c \\ 2x & 2y & 2z \end{vmatrix} \stackrel{(1)}{=} \\
 &= 2 \begin{vmatrix} 1-x & 1-y & 1-z \\ a & b & c \\ x & y & z \end{vmatrix} = \begin{matrix} \text{FILAS} \\ 1^a + 3^a \\ 2^a \\ 3^a \end{matrix} \Rightarrow 2 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ x & y & z \end{vmatrix} = 2 \cdot 5 = 10
 \end{aligned}$$

(1) Sacamos factor común el 2 de la 3ª fila.

Ejercicio 18.-

Considera la matriz $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 2a & -b & 3c \\ 3a & 0 & 4c \end{pmatrix}$, donde a, b y c son no nulos.

a) Determina el número de columnas de A que son linealmente independientes.

b) Calcula el rango de A .

$$|A| = \begin{vmatrix} a & b & c \\ 2a & -b & 3c \\ 3a & 0 & 4c \end{vmatrix} = a \cdot b \cdot c \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 3 & 0 & 4 \end{vmatrix} = abc \cdot 0 = 0$$

$$\text{Pero } \begin{vmatrix} a & b \\ 2a & -b \end{vmatrix} = -ab + 2ab = ab \neq 0, \text{ pues } a \text{ y } b \text{ son no nulos.}$$

Por tanto:

a) Hay dos columnas en la matriz A que son linealmente independientes.

b) $\text{ran}(A) = 2$

Ejercicio 19.-

Estudia el rango de la siguiente matriz para los distintos valores de a, b y c :

$$M = \begin{pmatrix} 5 & 5 & 5 \\ a & b & c \\ b+c & a+c & a+b \end{pmatrix}$$

$$|M| = \begin{vmatrix} 5 & 5 & 5 \\ a & b & c \\ b+c & a+c & a+b \end{vmatrix} \stackrel{(1)}{=} \begin{vmatrix} 5 & 5 & 5 \\ a+b+c & a+b+c & a+b+c \\ b+c & a+c & a+b \end{vmatrix} \stackrel{(2)}{=}$$

$$= (a + b + c) \begin{vmatrix} 5 & 5 & 5 \\ 1 & 1 & 1 \\ b+c & a+c & a+b \end{vmatrix} \stackrel{(3)}{=} 0$$

(1) Sumamos a la 2ª fila la 3ª.

(2) Sacamos $(a + b + c)$ factor común de la 2ª fila.

(3) Las dos primeras filas son proporcionales.

Luego, $\text{ran}(M) \leq 2$. Tenemos que:

$$\begin{vmatrix} 5 & 5 \\ a & b \end{vmatrix} = 5b - 5a = 0 \rightarrow b = a \qquad \begin{vmatrix} 5 & 5 \\ b & c \end{vmatrix} = 5c - 5b = 0 \rightarrow c = b$$

$$\begin{vmatrix} 5 & 5 \\ a & c \end{vmatrix} = 5c - 5a = 0 \rightarrow a = c$$

Por tanto:

• Si $a = b = c \rightarrow \text{ran}(M) = 1$

• Si $a \neq b$ o $b \neq c$ o $a \neq c \rightarrow \text{ran}(M) = 2$

Ejercicio 20.-

Estudia el rango de la matriz: $A = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$|A| = \begin{vmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \stackrel{(1)}{=} \begin{vmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{vmatrix} = \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1$$

(1) Desarrollamos el determinante por la 3ª fila o por la 3ª columna.

Por tanto, como $|A| \neq 0$, tenemos que $\text{ran}(A) = 3$.

Ejercicio 21.-

Escribe dos matrices A y $B \in \mathcal{M}_{2 \times 2}$ tales que:

a) $\det(A + B) \neq \det(A) + \det(B)$

b) $\det(A + B) = \det(A) + \det(B)$

a) Por ejemplo: $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}; A + B = \begin{pmatrix} 5 & 8 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$|A| = 7; |B| = -11; |A + B| = 0 \neq |A| + |B| = -4$$

b) Por ejemplo: $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}; A + B = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}$

$$|A| = 0; |B| = 0; |A + B| = 0 = |A| + |B|$$

Ejercicio 22.-

Si A y B son dos matrices cuadradas del mismo orden, ¿se verifica que $|A \cdot B| = |B \cdot A|$?

Justifica tu respuesta.

Tendremos en cuenta que $|A \cdot B| = |A| \cdot |B|$. Entonces:

$$|A \cdot B| = |A| \cdot |B| \stackrel{(*)}{=} |B| \cdot |A| = |B \cdot A|. \text{ Por tanto, sí se verifica la igualdad.}$$

(*) Aunque el producto de matrices no es conmutativo, el producto de números (los determinantes son números), sí lo es.

Ejercicio 23.-

Demuestra, sin desarrollar el determinante, que:
$$\begin{vmatrix} a^2 & ab & b^2 \\ 2a & a+b & 2b \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (a-b)^3$$

• Haz $c_1 - c_3$ y $c_2 - c_3$. Así podrás sacar factor común $(a-b)^2$. Después, haz $c_1 - 2c_2$.

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} a^2 & ab & b^2 \\ 2a & a+b & 2b \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} &= \begin{matrix} \text{COLUMNAS} \\ \begin{vmatrix} 1^a - 3^a \\ 2^a - 3^a \\ 3^a \end{vmatrix} \end{matrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} a^2 - b^2 & ab - b^2 & b^2 \\ 2a - 2b & a - b & 2b \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \\ &= \begin{vmatrix} (a+b)(a-b) & b(a-b) & b^2 \\ 2(a-b) & (a-b) & 2b \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \stackrel{(1)}{=} (a-b)^2 \begin{vmatrix} a+b & b & b^2 \\ 2 & 1 & 2b \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \stackrel{(2)}{=} \\ &= (a-b)^2 \begin{vmatrix} a+b & b \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = (a-b)^2 (a+b-2b) = (a-b)^2 (a-b) = (a-b)^3 \end{aligned}$$

(1) Sacamos $(a-b)$ factor común de la 1^a y de la 2^a columna.

(2) Desarrollamos por la 3^a fila.

Ejercicio 24.-

Demuestra, sin desarrollar, que:
$$\begin{vmatrix} 1 & a^2 & a^3 \\ 1 & b^2 & b^3 \\ 1 & c^2 & c^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} bc & a & a^2 \\ ac & b & b^2 \\ ab & c & c^2 \end{vmatrix}$$

• En el segundo miembro multiplica y divide la primera fila por a , la segunda por b y la tercera por c .

Procediendo como se indica en la ayuda, tenemos que:

$$\begin{vmatrix} bc & a & a^2 \\ ac & b & b^2 \\ ab & c & c^2 \end{vmatrix} = \frac{1}{abc} \begin{vmatrix} bca & a^2 & a^3 \\ acb & b^2 & b^3 \\ abc & c^2 & c^3 \end{vmatrix} = \frac{abc}{abc} \begin{vmatrix} 1 & a^2 & a^3 \\ 1 & b^2 & b^3 \\ 1 & c^2 & c^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a^2 & a^3 \\ 1 & b^2 & b^3 \\ 1 & c^2 & c^3 \end{vmatrix}$$

Ejercicio 25.-

Prueba que:
$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(c-b)$$

• Este determinante se llama de *Vandermonde*.

Haz $c_2 - c_1$ y $c_3 - c_1$. Extrae el factor $(b-a)$ de la 2ª columna y $(c-a)$ de la 3ª columna.

Siguiendo las indicaciones dadas, tenemos que:

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & b-a & c-a \\ a^2 & b^2-a^2 & c^2-a^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & (b-a) & (c-a) \\ a^2 & (b+a)(b-a) & (c+a)(c-a) \end{vmatrix} = \\ &= (b-a)(c-a) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 1 \\ a^2 & b+a & c+a \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(c+a-b-a) = \\ &= (b-a)(c-a)(c-b) \end{aligned}$$

Ejercicio 26.-

Calcula la inversa de cada una de las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 3 \\ -2 & 5 & -3 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Calculamos la inversa de la matriz A :

$$|A| = -1 \neq 0 \rightarrow \text{existe } A^{-1}$$

$$\begin{aligned} \alpha_{ij} &\longrightarrow \text{Adj}(A) \longrightarrow (\text{Adj}(A))^t \longrightarrow \frac{1}{|A|}(\text{Adj}(A))^t \\ \begin{pmatrix} -15 & 9 & -5 \\ 8 & -5 & 3 \\ -3 & 2 & -1 \end{pmatrix} &\rightarrow \begin{pmatrix} -15 & -9 & -5 \\ -8 & -5 & -3 \\ -3 & -2 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -15 & -8 & -3 \\ -9 & -5 & -2 \\ -5 & -3 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 15 & 8 & 3 \\ 9 & 5 & 2 \\ 5 & 3 & 1 \end{pmatrix} = A^{-1} \end{aligned}$$

Calculamos la inversa de la matriz B :

$$|B| = -3 \neq 0 \rightarrow \text{existe } B^{-1}$$

$$\begin{aligned} \alpha_{ij} &\longrightarrow \text{Adj}(B) \longrightarrow (\text{Adj}(B))^t \longrightarrow \frac{1}{|B|}(\text{Adj}(B))^t \\ \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} &\rightarrow \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \frac{-1}{3} \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = B^{-1} \end{aligned}$$

Ejercicio 27.-

Calcula la inversa de cada una de las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \rightarrow \text{Existe } A^{-1}$$

$$\alpha_{ij} \longrightarrow \text{Adj}(A) \longrightarrow (\text{Adj}(A))^t \longrightarrow A^{-1} = \frac{1}{|A|} (\text{Adj}(A))^t$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 \\ 6 & 1 & -4 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 \\ -6 & 1 & 4 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 3 & -6 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 4 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 3 & -6 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 4 & 1 \end{pmatrix} = A^{-1}$$

$$|B| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0 \rightarrow \text{Existe } B^{-1}$$

$$\alpha_{ij} \longrightarrow \text{Adj}(B) \longrightarrow (\text{Adj}(B))^t \longrightarrow B^{-1} = \frac{1}{|B|} (\text{Adj}(B))^t$$

$$\begin{pmatrix} -2 & -6 & -2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 3 & 6 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -2 & 6 & -2 \\ -1 & 2 & 0 \\ 3 & -6 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -2 & -1 & 3 \\ 6 & 2 & -6 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & -1/2 & 3/2 \\ 3 & 1 & -3 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = B^{-1}$$

Ejercicio 28.-

Calcula la matriz inversa de cada una de las siguientes matrices para aquellos valores de a que sea posible:

$$\text{a) } \begin{pmatrix} a & -1 \\ 1 & a \end{pmatrix} \quad \text{b) } \begin{pmatrix} 3 & a \\ 1 & a \end{pmatrix} \quad \text{c) } \begin{pmatrix} a-2 & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$$

$$\text{a) } A = \begin{pmatrix} a & -1 \\ 1 & a \end{pmatrix} \rightarrow |A| = a^2 + 1 \neq 0 \text{ para cualquier valor de } a.$$

Luego, existe A^{-1} para cualquier valor de a . La calculamos:

$$\alpha_{ij} \longrightarrow \text{Adj}(A) \longrightarrow (\text{Adj}(A))^t \longrightarrow \frac{1}{|A|} (\text{Adj}(A))^t$$

$$\begin{pmatrix} a & 1 \\ -1 & a \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} a & -1 \\ 1 & a \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} a & 1 \\ -1 & a \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \frac{a}{a^2+1} & \frac{1}{a^2+1} \\ \frac{-1}{a^2+1} & \frac{a}{a^2+1} \end{pmatrix} = A^{-1}$$

b) $A = \begin{pmatrix} 3 & a \\ 1 & a \end{pmatrix} \rightarrow |A| = 2a \neq 0$ si $a \neq 0$. Solo existe A^{-1} si $a \neq 0$.

La calculamos en este caso:

$$\alpha_{ij} \longrightarrow \text{Adj}(A) \longrightarrow (\text{Adj}(A))^t \longrightarrow \frac{1}{|A|}(\text{Adj}(A))^t$$

$$\begin{pmatrix} a & 1 \\ a & 3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} a & -1 \\ -a & 3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} a & -a \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} \\ \frac{-1}{2a} & \frac{3}{2a} \end{pmatrix} = A^{-1}$$

c) $A = \begin{pmatrix} a-2 & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} \rightarrow |A| = (a-2)a \neq 0$ si $a \neq 0$ y $a \neq 2$

Existe A^{-1} solo cuando $a \neq 0$ y $a \neq 2$. La calculamos en este caso:

$$\alpha_{ij} \longrightarrow \text{Adj}(A) \longrightarrow (\text{Adj}(A))^t \longrightarrow \frac{1}{|A|}(\text{Adj}(A))^t$$

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a-2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a-2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a-2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \frac{1}{a-2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{a} \end{pmatrix} = A^{-1}$$

Ejercicio 29.-

Consideramos la matriz siguiente: $A = \begin{pmatrix} x & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ x & 1 & 1 \end{pmatrix}$

a) Halla los valores de x para los que A tiene inversa.

b) Calcula, si es posible, A^{-1} para $x = 2$.

a) Existe A^{-1} solo cuando $|A| \neq 0$.

$$|A| = \begin{vmatrix} x & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ x & 1 & 1 \end{vmatrix} = x \neq 0 \text{ si } x \neq 0$$

Luego, existe A^{-1} para todo $x \neq 0$.

b) Para $x = 2$, tenemos que $|A| = 2 \neq 0$, luego existe A^{-1} en este caso. La calculamos:

$$\alpha_{ij} \longrightarrow \text{Adj}(A) \longrightarrow (\text{Adj}(A))^t \longrightarrow \frac{1}{|A|}(\text{Adj}(A))^t$$

$$\begin{pmatrix} -2 & -6 & -2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 3 & 6 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -2 & 6 & -2 \\ -1 & 2 & 0 \\ 3 & -6 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -2 & -1 & 3 \\ 6 & 2 & -6 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & -1/2 & 3/2 \\ 3 & 1 & -3 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = A^{-1}$$

Ejercicio 30.-

Considera la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ a & 0 & b \end{pmatrix}$.

- ¿Cuándo el determinante de A es el seno de algún número real?
- Calcula A^{-1} cuando exista.
- Determina todos los pares (a, b) para los que A coincide con su inversa.

a) $|A| = b$ será el seno de algún número real cuando $-1 \leq b \leq 1$.

b) Existirá A^{-1} cuando $|A| \neq 0$, es decir, cuando $b \neq 0$. La calculamos en este caso:

$$\alpha_{ij} \longrightarrow \text{Adj}(A) \longrightarrow (\text{Adj}(A))^t \longrightarrow \frac{1}{|A|}(\text{Adj}(A))^t$$

$$\begin{pmatrix} b & 0 & -a \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} b & 0 & -a \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} b & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ -a & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -a/b & 0 & 1/b \end{pmatrix} = A^{-1}$$

$$\text{c) } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ a & 0 & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -a/b & 0 & 1/b \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} a = -\frac{a}{b} \rightarrow ab + a = 0 \rightarrow a(b + 1) = 0 \\ b = \frac{1}{b} \rightarrow b^2 = 1 \begin{cases} b = 1 \rightarrow a = 0 \\ b = -1 \rightarrow a \in \mathbb{R} \end{cases} \end{cases}$$

$$A = A^{-1} \text{ cuando } \begin{cases} \bullet a = 0 \text{ y } b = 1 \rightarrow (0, 1) \\ \bullet b = -1 \text{ y } a \text{ cualquier número real} \rightarrow (a, -1) \end{cases}$$

Ejercicio 31.-

Sean A y B inversas una de otra. Si $|A| = 4$, ¿cuánto vale $|B|$?

Si A y B son inversas una de otra, entonces $A \cdot B = I$. Así:

$$|A \cdot B| = |A| \cdot |B| = |I| = 1 \rightarrow |B| = \frac{1}{|A|} = \frac{1}{4}$$

Ejercicio 32.-

¿Existe algún valor de a para el cual la matriz $\begin{pmatrix} a & a^2 - 2 \\ 1 & a \end{pmatrix}$ no tenga inversa?

$$\begin{vmatrix} a & a^2 - 2 \\ 1 & a \end{vmatrix} = a^2 - a^2 + 2 = 2 \neq 0 \text{ para cualquier valor de } a.$$

Por tanto, no existe ningún valor de a para el que la matriz dada no tenga inversa.
