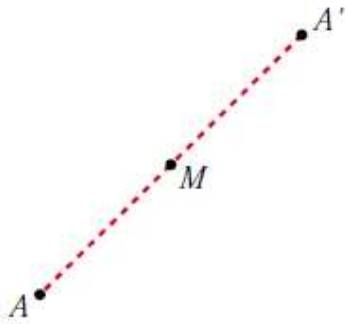


EJERCICIOS DE GEOMETRÍA EUCLÍDEA. PRODUCTO ESCALAR

Ejercicio 1.-

Halla el simétrico del punto $A(-2, 3, 0)$ respecto del punto $M(1, -1, 2)$.



Sea $A'(x, y, z)$ el simétrico de A respecto del punto M .

Como M es el punto medio del segmento AA' , entonces:

$$\left(\frac{x-2}{2}, \frac{y+3}{2}, \frac{z}{2} \right) = (1, -1, 2)$$

$$\frac{x-2}{2} = 1 \rightarrow x=4; \frac{y+3}{2} = -1 \rightarrow y=-5; \frac{z}{2} = 2 \rightarrow z=4$$

Por tanto: $A'(4, -5, 4)$

Ejercicio 2.-

¿Cuál es el vector normal del plano $x = -1$?

Escribe las ecuaciones de una recta perpendicular a ese plano que pase por $A(2, 3, 0)$.

El vector normal al plano $x = -1$ es $\vec{n}(1, 0, 0)$.

$$\text{Recta: } \begin{cases} x = 2 + \lambda \\ y = 3 \\ z = 0 \end{cases}$$

Ejercicio 3.-

Dado el plano $\pi: 2x - 3y + z = 0$ y la recta $r: \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z+1}{2}$,

halla la ecuación del plano que contiene a la recta r y es perpendicular al plano π .

El plano será paralelo a $(2, -3, 1)$ y a $(1, -1, 2)$.

Un vector normal al plano es: $(2, -3, 1) \times (1, -1, 2) = (-5, -3, 1) \rightarrow \vec{n}(5, 3, -1)$

El punto $(1, 2, -1)$ pertenece al plano.

La ecuación del plano es: $5(x-1) + 3(y-2) - 1(z+1) = 0$

$$5x + 3y - z - 12 = 0$$

Ejercicio 4.-

Escribe la ecuación del plano que pasa por los puntos $A(1, -3, 2)$ y $B(0, 1, 1)$ y es paralelo a la recta:

$$r: \begin{cases} 3x - 2y + 1 = 0 \\ 2y + 3z - 3 = 0 \end{cases}$$

Un vector dirección de r es: $(3, -2, 0) \times (0, 2, 3) = (-6, -9, 6) // (2, 3, -2)$
 $\vec{AB}(-1, 4, -1)$

El plano que buscamos es paralelo a $(2, 3, -2)$ y a $(-1, 4, -1)$.

Un vector normal al plano es: $\vec{n} = (2, 3, -2) \times (-1, 4, -1) = (5, 4, 11)$

La ecuación del plano es: $5(x - 0) + 4(y - 1) + 11(z - 1) = 0$

$$5x + 4y + 11z - 15 = 0$$

Ejercicio 5.-

Dados la recta $r: \begin{cases} x - 2z + 3 = 0 \\ y - z - 4 = 0 \end{cases}$ y el plano $\pi: x + 2y + 3z - 1 = 0$,

halla la ecuación de una recta s contenida en el plano π que pase por el punto $P(2, 1, -1)$ y sea perpendicular a r .

➡ El vector dirección de s ha de ser perpendicular al vector dirección de r y al vector normal del plano.

Un vector dirección de r es: $\vec{d} = (1, 0, -2) \times (0, 1, -1) = (2, 1, 1)$

Un vector normal al plano es $\vec{n} = (1, 2, 3)$.

Un vector dirección de la recta que buscamos es: $(2, 1, 1) \times (1, 2, 3) = (1, -5, 3)$

La recta es:
$$\begin{cases} x = 2 + \lambda \\ y = 1 - 5\lambda \\ z = -1 + 3\lambda \end{cases}$$

Ejercicio 6.-

Halla la ecuación de la recta paralela a $r: \begin{cases} x + 2z = 5 \\ y + 3z = 5 \end{cases}$ que pase por

el punto de intersección de la recta $s: \frac{x-1}{4} = \frac{y+3}{2} = \frac{z+2}{3}$ con el plano $\pi: x - y + z = 7$.

Un vector dirección de la recta es: $(1, 0, 2) \times (0, 1, 3) = (-2, -3, 1) // (2, 3, -1)$

Escribimos la recta s en forma paramétrica para hallar el punto de corte de s y π :

$$s: \begin{cases} x = 1 + 4\lambda \\ y = -3 + 2\lambda \\ z = -2 + 3\lambda \end{cases} \quad \pi: \begin{aligned} x - y + z &= 7 \\ 1 + 4\lambda + 3 - 2\lambda - 2 + 3\lambda &= 7 \\ 5\lambda &= 5 \rightarrow \lambda = 1 \end{aligned}$$

El punto de corte de s y π es $(5, -1, 1)$.

Por tanto, la recta que buscamos es:

$$\begin{cases} x = 5 + 2\lambda \\ y = -1 + 3\lambda \\ z = 1 - \lambda \end{cases} \quad \text{o bien} \quad \frac{x-5}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-1}{-1}$$

Ejercicio 7.-

Halla la ecuación de la recta que pasa por el punto $P(1, 2, 3)$ y es perpendicular al plano que pasa por el origen y por los puntos $B(1, 1, 1)$ y $C(1, 2, 1)$.

Un vector normal al plano es: $\vec{OB} \times \vec{OC} = (1, 1, 1) \times (1, 2, 1) = (-1, 0, 1)$

Este vector es un vector dirección de la recta que buscamos.

Las ecuaciones de la recta son:

$$\begin{cases} x = 1 - \lambda \\ y = 2 \\ z = 3 + \lambda \end{cases}$$

Ejercicio 8.-

Escribe la ecuación del plano que contiene a la recta r : $\begin{cases} x+y-1=0 \\ 2x-y+z=0 \end{cases}$

y es paralelo a s : $\frac{1-x}{-2} = \frac{y}{3} = \frac{z+2}{-4}$.

Un vector dirección de r es: $(1, 1, 0) \times (2, -1, 1) = (1, -1, -3)$

El plano que buscamos es paralelo a $(1, -1, -3)$ y a $(-2, 3, -4)$. Un vector normal al plano es: $\vec{n} = (1, -1, -3) \times (-2, 3, -4) = (13, 10, 1)$

Obtenemos un punto de r haciendo $x = 0$:

$$\left. \begin{array}{l} y-1=0 \rightarrow y=1 \\ -y+z=0 \rightarrow z=y=1 \end{array} \right\} P(0, 1, 1)$$

La ecuación del plano es: $13(x-0) + 10(y-1) + 1(z-1) = 0$

$$13x + 10y + z - 11 = 0$$

Ejercicio 9.-

Dados el plano $\pi: ax + y + z + 1 = 0$ y las rectas:

$$r_1: \begin{cases} x = 1 \\ y = z \end{cases} \quad r_2: \begin{cases} x = 2 \\ y = 2z \end{cases} \quad r_3: \begin{cases} x = 3 \\ y = 3z \end{cases}$$

Calcula el valor de a para que los puntos de corte del plano con cada una de las rectas estén alineados.

➡ *Halla, en función de a , los puntos de corte P , Q y R . Expresa después la dependencia lineal entre los vectores $\vec{PQ}$ y $\vec{QR}$.*

Hallamos los puntos de corte del plano con cada una de las tres rectas:

$$\pi \text{ con } r_1: \quad a + 2z + 1 = 0 \rightarrow z = \frac{-1 - a}{2}$$

$$P\left(1, \frac{-1 - a}{2}, \frac{-1 - a}{2}\right)$$

$$\pi \text{ con } r_2: \quad 2a + 3z + 1 = 0 \rightarrow z = \frac{-1 - 2a}{3}$$

$$Q\left(2, \frac{-2 - 4a}{3}, \frac{-1 - 2a}{3}\right)$$

$$\pi \text{ con } r_3: \quad 3a + 4z + 1 = 0 \rightarrow z = \frac{-1 - 3a}{4}$$

$$R\left(3, \frac{-3 - 9a}{4}, \frac{-1 - 3a}{4}\right)$$

Los vectores $\vec{PQ}$ y $\vec{QR}$ han de tener sus coordenadas proporcionales:

$$\vec{PQ}\left(1, \frac{-1 - 5a}{6}, \frac{1 - a}{6}\right); \quad \vec{QR}\left(1, \frac{-1 - 11a}{12}, \frac{1 - a}{12}\right)$$

$$\frac{-1 - 5a}{6} = \frac{-1 - 11a}{12} \rightarrow -2 - 10a = -1 - 11a \rightarrow a = 1$$

$$\frac{1 - a}{6} = \frac{1 - a}{12} \rightarrow a = 1$$

Por tanto, $a = 1$.

Ejercicio 10.-

Calcula el ángulo que forma la recta: $\frac{x-3}{7} = \frac{y}{-1} = \frac{z-2}{3}$ con el plano $x + 3y - z + 1 = 0$.

Llamamos $90^\circ - \alpha$ al ángulo formado por las direcciones de $\vec{d}$ y $\vec{n}$ sin tener en cuenta sus sentidos.

$$\vec{d}(7, -1, 3) // r \quad \vec{n}(1, 3, -1) \perp \pi$$

$$\cos(90^\circ - \alpha) = \frac{|\vec{d} \cdot \vec{n}|}{|\vec{d}| \cdot |\vec{n}|} = \frac{|7 - 3 - 3|}{\sqrt{59} \cdot \sqrt{11}} = \frac{1}{\sqrt{649}} \approx 0,039$$

$$90^\circ - \alpha = 87^\circ 45' 1'' \rightarrow \alpha = 2^\circ 14' 59''$$

Ejercicio 11.-

Determina la ecuación de la recta r que pasa por el punto A y es perpendicular al plano π :

$$A(3, 0, -1)$$

$$\pi: 2x - 3y - z + 1 = 0$$

Un vector dirección de la recta es el vector normal al plano: $(2, -3, -1)$.

$$\text{Las ecuaciones paramétricas de } r \text{ son: } \begin{cases} x = 3 + 2\lambda \\ y = -3\lambda \\ z = -1 - \lambda \end{cases}$$

Ejercicio 12.-

Halla la distancia del punto $P(8, 5, -6)$ al plano $\pi: x + 2y - 2z + 3 = 0$.

$$\text{dist}(P, \pi) = \frac{|8 + 10 + 12 + 3|}{\sqrt{1 + 4 + 4}} = \frac{33}{3} = 11u$$

Ejercicio 13.-

Calcula la distancia entre la recta y el plano:

$$r: (1 - 3\lambda, 2 + \lambda, 1 - \lambda) \quad \pi: x + 3y = 0$$

$$\left. \begin{array}{l} \vec{d}(-3, 1, -1) // r \\ \vec{n}(1, 3, 0) \perp \pi \end{array} \right\} \vec{d} \cdot \vec{n} = -3 + 3 = 0 \Rightarrow \vec{d} \perp \vec{n} \Rightarrow r // \pi$$

Puesto que la recta es paralela al plano (o, acaso, contenida en él), la distancia de r a π se obtiene calculando la distancia de cualquier punto de r a π :

$$\text{dist}(r, \pi) = \text{dist}[(1, 2, 1), \pi] = \frac{|1 + 6|}{\sqrt{1 + 9}} = \frac{7}{\sqrt{10}} \approx 2,21$$

Ejercicio 14.-

Hallar, en cada caso, el ángulo que forma la recta y el plano:

$$\text{a) } r: \frac{x+1}{-2} = \frac{y+3}{4} = \frac{z}{2} \quad \pi: x - 2y - z + 1 = 0$$

$$\text{b) } r: x = \lambda, y = 1 + 2\lambda, z = -2 \quad \pi: 2x - y + z = 0$$

$$\text{c) } r: \frac{x-1}{2} = \frac{y-3}{1} = \frac{z}{1} \quad \pi: x + z = 17$$

$$\text{a) } \vec{d}(-2, 4, 2); \vec{n}(1, -2, -1)$$

$$\cos(90^\circ - \alpha) = \frac{|\vec{d} \cdot \vec{n}|}{|\vec{d}| |\vec{n}|} = \frac{|-2 - 8 - 2|}{\sqrt{24} \cdot \sqrt{6}} = \frac{12}{12} = 1 \rightarrow 90^\circ - \alpha = 0 \rightarrow \alpha = 90^\circ$$

Observación: Los vectores $\vec{d}$ y $\vec{n}$ tienen la misma dirección; luego la recta y el plano son perpendiculares, es decir, $\alpha = 90^\circ$.

$$\text{b) } \vec{d}(1, 2, 0); \vec{n}(2, -1, 1)$$

$$\cos(90^\circ - \alpha) = \frac{|\vec{d} \cdot \vec{n}|}{|\vec{d}| |\vec{n}|} = \frac{|2 - 2 + 0|}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{6}} = 0 \rightarrow 90^\circ - \alpha = 90^\circ \rightarrow \alpha = 0^\circ$$

$$\text{c) } \vec{d}(2, 1, 1); \vec{n}(1, 0, 1)$$

$$\begin{aligned} \cos(90^\circ - \alpha) &= \frac{|\vec{d} \cdot \vec{n}|}{|\vec{d}| |\vec{n}|} = \frac{|2 + 1|}{\sqrt{6} \cdot \sqrt{2}} = \frac{3}{\sqrt{12}} = \frac{3}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \rightarrow \\ &\rightarrow 90^\circ - \alpha = 30^\circ \rightarrow \alpha = 60^\circ \end{aligned}$$

Ejercicio 15.-

Calcula el ángulo que forman los planos $\alpha: z = 3$ y $\beta: x - y + 2z + 4 = 0$.

$$\vec{n}_\alpha(0, 0, 1); \vec{n}_\beta(1, -1, 2)$$

$$\cos \alpha = \frac{|\vec{n}_\alpha \cdot \vec{n}_\beta|}{|\vec{n}_\alpha| |\vec{n}_\beta|} = \frac{2}{1\sqrt{6}} = 0,816 \rightarrow \alpha = 35^\circ 15' 52''$$

Ejercicio 16.-

Calcula la distancia del punto dado a la recta, en los siguientes casos:

a) $P(0, 7, 0)$; $r: \begin{cases} x = -5 + 4\lambda \\ y = 5 + \lambda \\ z = -10 + 3\lambda \end{cases}$

b) $P(1, 0, 0)$; $r: x - 1 = \frac{y + 1}{2} = z$

c) $A(1, 2, 3)$; $r: \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$

a) $R(-5, 5, -10) \in r$, $\vec{d}(4, 1, 3) \parallel r$

$$\vec{RP}(5, 2, 10)$$

$$\vec{RP} \times \vec{d} = (5, 2, 10) \times (4, 1, 3) = (-4, 25, -3)$$

$$\text{dist}(P, r) = \frac{\text{Área}}{\text{Base}} = \frac{|\vec{RP} \times \vec{d}|}{|\vec{d}|} = \frac{\sqrt{650}}{\sqrt{26}} = \sqrt{25} = 5$$

b) $R(1, -1, 0) \in r$, $\vec{d}(1, 2, 1) \parallel r$

$$\vec{RP}(0, 1, 0)$$

$$\vec{RP} \times \vec{d} = (0, 1, 0) \times (1, 2, 1) = (1, 0, -1)$$

$$\text{dist}(P, r) = \frac{\text{Área}}{\text{Base}} = \frac{|\vec{RP} \times \vec{d}|}{|\vec{d}|} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{6}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \approx 0,577$$

c) $R(0, 0, 1) \in r$, $\vec{d}(0, 0, 1) \parallel r$

$$\vec{RA}(1, 2, 2)$$

$$\vec{RA} \times \vec{d} = (1, 2, 2) \times (0, 0, 1) = (2, -1, 0)$$

$$\text{dist}(A, r) = \frac{\text{Área}}{\text{Base}} = \frac{|\vec{RA} \times \vec{d}|}{|\vec{d}|} = \frac{\sqrt{5}}{1} = \sqrt{5} \approx 2,24$$

Ejercicio 17.-

a) Halla p para que las rectas r_1 y r_2 sean perpendiculares:

$$r_1: \frac{x}{4} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z}{2} \qquad r_2: \frac{x-1}{1} = \frac{y-p}{p-1} = \frac{z-3}{3}$$

b) Calcula su punto de intersección y la ecuación del plano que las contiene.

a) $(4, -2, 2) \cdot (1, p-1, 3) = 4 - 2p + 2 + 6 = 12 - 2p = 0 \rightarrow p = 6$

b) $r_1: \begin{cases} x = 4\lambda \\ y = 1 - 2\lambda \\ z = 2\lambda \end{cases} \qquad r_2: \begin{cases} x = 1 + \mu \\ y = 6 + 5\mu \\ z = 3 + 3\mu \end{cases}$

• Punto de intersección:

$$\left. \begin{array}{l} 4\lambda = 1 + \mu \\ 1 - 2\lambda = 6 + 5\mu \\ 2\lambda = 3 + 3\mu \end{array} \right\} \text{ Sumando las dos últimas ecuaciones:}$$

$$1 = 9 + 8\mu \rightarrow -8 = 8\mu \rightarrow \mu = -1$$

$$\lambda = \frac{3 + 3\mu}{2} = \frac{3 - 3}{2} = 0$$

1ª ecuación: $4 \cdot 0 = 1 - 1$. Luego $\lambda = 0$, $\mu = -1$.

Sustituyendo $\lambda = 0$ en las ecuaciones de r_1 (o bien $\mu = -1$ en las de r_2), obtenemos el punto de corte: $(0, 1, 0)$.

• Ecuación del plano que las contiene:

$$(4, -2, 2) \times (1, 5, 3) = (-16, -10, 22) \rightarrow (8, 5, -11) \text{ es un vector normal al plano.}$$

$$\text{Ecuación: } 8(x - 0) + 5(y - 1) - 11(z - 0) = 0$$

$$8x + 5y - 11z - 5 = 0$$

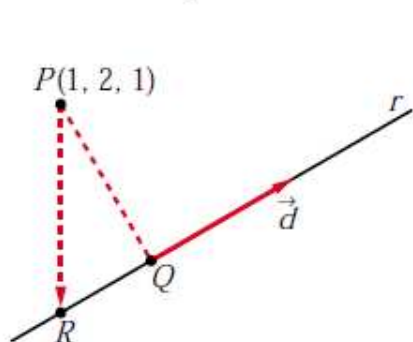
Ejercicio 18.-

Halla la ecuación de la recta que pasa por el punto $(1, 2, 1)$ y corta perpendicularmente a la recta $r: \begin{cases} x - y - z = 1 \\ x + z = 2 \end{cases}$

Escribimos r en forma paramétrica:

$$r: \begin{cases} x - y - z = 1 \\ x + z = 2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = x - z - 1 = 2 - z - z - 1 = 1 - 2z \\ x = 2 - z \end{cases}$$

$$r: \begin{cases} x = 2 - \lambda \\ y = 1 - 2\lambda \\ z = \lambda \end{cases} \rightarrow \text{Un punto genérico de } r \text{ es: } R(2 - \lambda, 1 - 2\lambda, \lambda)$$



Si llamamos al punto $P(1, 2, 1)$, el vector $\overrightarrow{PR}$ ha de ser perpendicular a r , es decir, perpendicular a $\vec{d}(-1, -2, 1)$.

Por tanto, como $\overrightarrow{PR}(1 - \lambda, -1 - 2\lambda, -1 + \lambda)$:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{PR} \cdot \vec{d} &= 0 \rightarrow (1 - \lambda, -1 - 2\lambda, -1 + \lambda) \cdot (-1, -2, 1) = 0 \\ -1 + \lambda + 2 + 4\lambda - 1 + \lambda &= 0 \rightarrow 6\lambda = 0 \rightarrow \lambda = 0 \end{aligned}$$

La recta que buscamos pasa por el punto $P(1, 2, 1)$ y por el punto $Q(2, 1, 0)$ (Q se obtiene sustituyendo $\lambda = 0$ en las ecuaciones de r).

Un vector dirección será: $\overrightarrow{PQ}(1, -1, -1)$

$$\text{La recta es: } \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 2 - \lambda \\ z = 1 - \lambda \end{cases}$$

Ejercicio 19.-

Halla el punto P de la recta $r: \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z}{3}$ que equidiste de los planos:

$$\alpha: x + y + z = -3 \quad \text{y} \quad \beta: \begin{cases} x = -3 + \lambda \\ y = -\lambda + \mu \\ z = -6 + \mu \end{cases}$$

- Un punto genérico de la recta r es: $R(1 + 2\lambda, -1 + \lambda, 3\lambda)$

- Escribimos el plano β en forma implícita:

$$\begin{vmatrix} x+3 & 1 & 0 \\ y & -1 & 1 \\ z+6 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow \beta: x+y-z-3=0$$

- La distancia de R a α y a β ha de ser la misma: $\text{dist}(R, \alpha) = \text{dist}(R, \beta)$

$$\frac{|1+2\lambda-1+\lambda+3\lambda+3|}{\sqrt{1+1+1}} = \frac{|1+2\lambda-1+\lambda-3\lambda-3|}{\sqrt{1+1+1}}, \text{ es decir:}$$

$$|6\lambda+3|=3 \begin{cases} 6\lambda+3=3 \rightarrow 6\lambda=0 \rightarrow \lambda=0 \\ 6\lambda+3=-3 \rightarrow 6\lambda=-6 \rightarrow \lambda=-1 \end{cases}$$

Hay dos soluciones: $P(1, -1, 0)$ y $P'(-1, -2, -3)$

Ejercicio 20.-

Halla la ecuación del plano cuyo punto más próximo al origen es $(1, 3, 2)$.

Si el punto más próximo al origen es $P(1, 3, 2)$, el vector $\vec{OP}(1, 3, 2)$ es normal al plano. Por tanto, la ecuación del plano es:

$$1(x-1) + 3(y-3) + 2(z-2) = 0$$

$$x + 3y + 2z - 14 = 0$$

Ejercicio 21.-

a) Encuentra los puntos de $r: \begin{cases} x+y=0 \\ x-z=0 \end{cases}$ que disten $\frac{1}{3}$ del plano $\pi: 2x-y+2z+1=0$.

b) Obtén los puntos de π que distan $\frac{1}{3}$ de los puntos hallados en el apartado anterior.

a) Escribimos r en forma paramétrica:

$$\begin{cases} y = -x \\ z = x \end{cases} \rightarrow r: \begin{cases} x = \lambda \\ y = -\lambda \\ z = \lambda \end{cases} \rightarrow \text{Un punto de } r \text{ es de la forma } R(\lambda, -\lambda, \lambda)$$

$$\text{dist}(R, \pi) = \frac{|2\lambda + \lambda + 2\lambda + 1|}{\sqrt{4+1+4}} = \frac{|5\lambda + 1|}{3} = \frac{1}{3} \begin{cases} 5\lambda + 1 = 1 \rightarrow \lambda = 0 \\ 5\lambda + 1 = -1 \rightarrow \lambda = -2/5 \end{cases}$$

Hay dos puntos: $(0, 0, 0)$ y $\left(-\frac{2}{5}, \frac{2}{5}, -\frac{2}{5}\right)$

b) Los dos puntos obtenidos están a distancia $\frac{1}{3}$ de π .

Se trata de encontrar la proyección de estos puntos sobre el plano π .

• Para $(0, 0, 0)$:

Obtenemos la recta que pasa por $(0, 0, 0)$ y es perpendicular a π :

$$\begin{cases} x = 2\lambda \\ y = -\lambda \\ z = 2\lambda \end{cases}$$

Hallamos el punto de corte de esta recta con π :

$$4\lambda + \lambda + 4\lambda + 1 = 0 \rightarrow 9\lambda = -1 \rightarrow \lambda = -\frac{1}{9}$$

El punto es $\left(-\frac{2}{9}, \frac{1}{9}, -\frac{2}{9}\right)$.

• Para $\left(-\frac{2}{5}, \frac{2}{5}, -\frac{2}{5}\right)$:

Hallamos la recta que pasa por este punto y es perpendicular a π :

$$\begin{cases} x = -2/5 + 2\lambda \\ y = 2/5 - \lambda \\ z = -2/5 + 2\lambda \end{cases}$$

Obtenemos el punto de corte de esta recta con π :

$$2\left(-\frac{2}{5} + 2\lambda\right) - \left(\frac{2}{5} - \lambda\right) + 2\left(-\frac{2}{5} + 2\lambda\right) + 1 = 0$$

$$-\frac{4}{5} + 4\lambda - \frac{2}{5} + \lambda - \frac{4}{5} + 4\lambda + 1 = 0$$

$$9\lambda - 1 = 0 \rightarrow \lambda = \frac{1}{9}$$

El punto es $\left(-\frac{8}{45}, \frac{13}{45}, -\frac{8}{45}\right)$.

Ejercicio 22.-

Ejercicio 23.-

Determina la ecuación continua de la recta r que es perpendicular y corta a las rectas s y t de ecuaciones:

$$s: (1 + 2\lambda, 2 - \lambda, 1 + \lambda) \quad t: (4 + \mu, 6 + \mu, 5 - 2\mu)$$

Un vector genérico de origen en s y extremo en t es:

$$\overrightarrow{ST}(3 - 2\lambda + \mu, 4 + \lambda + \mu, 4 - \lambda - 2\mu)$$

Este vector ha de ser perpendicular a las dos rectas:

$$\left. \begin{array}{l} \overrightarrow{ST} \cdot (2, -1, 1) = 0 \rightarrow 6 - 4\lambda + 2\mu - 4 - \lambda - \mu + 4 - \lambda - 2\mu = 0 \rightarrow 6\lambda + \mu = 6 \\ \overrightarrow{ST} \cdot (1, 1, -2) = 0 \rightarrow 3 - 2\lambda + \mu + 4 + \lambda + \mu - 8 + 2\lambda + 4\mu = 0 \rightarrow \lambda + 6\mu = 1 \end{array} \right\}$$

$$\lambda = 1, \mu = 0$$

La recta que buscamos, corta a s en $S(3, 1, 2)$, y corta a t en $T(4, 6, 5)$.

Un vector dirección es $\overrightarrow{ST}(1, 5, 3)$.

$$\text{Su ecuación continua es: } \frac{x-3}{1} = \frac{y-1}{5} = \frac{z-2}{3}$$

Ejercicio 24.-

Halla los puntos simétricos de $P(1, 2, 3)$ respecto del plano

$$\alpha: x - 3y - 2z + 4 = 0 \text{ y respecto de la recta } r: \begin{cases} x - y + 3 = 0 \\ 4x - z = 0 \end{cases}$$

■ Simétrico respecto del plano:

- Ecuación de la recta que pasa por P y es perpendicular a α :

$$\begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 2 - 3\lambda \\ z = 3 - 2\lambda \end{cases}$$

- Punto de corte de α con la recta anterior:

$$(1 + \lambda) - 3(2 - 3\lambda) - 2(3 - 2\lambda) + 4 = 0$$

$$1 + \lambda - 6 + 9\lambda - 6 + 4\lambda + 4 = 0$$

$$14\lambda - 7 = 0 \rightarrow \lambda = \frac{1}{2}$$

La recta y el plano se cortan en $\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, 2\right)$. Este es el punto medio del segmento PP' , siendo P' el simétrico de P respecto del plano α . Luego, si $P'(x, y, z)$, entonces: $\left(\frac{x+1}{2}, \frac{y+2}{2}, \frac{z+3}{2}\right) = \left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, 2\right) \rightarrow P'(2, -1, 1)$

■ Simétrico respecto de la recta:

- Escribimos la recta en paramétricas:

$$\left\{ \begin{array}{l} x - y + 3 = 0 \rightarrow y = x + 3 \\ 4x - z = 0 \rightarrow z = 4x \end{array} \right\} \rightarrow r: \begin{cases} x = \lambda \\ y = 3 + \lambda \\ z = 4\lambda \end{cases}$$

- Hallamos la ecuación del plano perpendicular a r que pasa por P :

$$1(x - 1) + 1(y - 2) + 4(z - 3) = 0$$

$$x + y + 4z - 15 = 0$$

- Obtenemos el punto de intersección de la recta r con el plano:

$$\lambda + 3 + \lambda + 16\lambda - 15 = 0$$

$$18\lambda - 12 = 0 \rightarrow \lambda = \frac{2}{3}$$

El punto de corte es $\left(\frac{2}{3}, \frac{11}{3}, \frac{8}{3}\right)$. Este es el punto medio del segmento PP'' , siendo P'' el simétrico de P respecto de la recta r . Así, si $P''(a, b, c)$, entonces: $\left(\frac{a+1}{2}, \frac{b+2}{2}, \frac{c+3}{2}\right) = \left(\frac{2}{3}, \frac{11}{3}, \frac{8}{3}\right) \rightarrow P''\left(\frac{1}{3}, \frac{16}{3}, \frac{7}{3}\right)$

Ejercicio 25.-

Halla la distancia entre el punto $P(2, 1, 3)$ y la recta r :
$$\begin{cases} 2x - y - z - 3 = 0 \\ x - y + z - 2 = 0 \end{cases}$$

- Escribimos la recta r en forma paramétrica:

$$\left. \begin{array}{l} 2x - y = 3 + z \\ x - y = 2 - z \end{array} \right\} \text{Restando: } \left. \begin{array}{l} x = 1 + 2z \\ y = x + z - 2 = -1 + 3z \end{array} \right\} r: \begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = -1 + 3\lambda \\ z = \lambda \end{cases}$$

- Hallamos la ecuación del plano que pasa por P y es perpendicular a r :

$$2(x - 2) + 3(y - 1) + 1(z - 3) = 0$$

$$\pi: 2x + 3y + z - 10 = 0$$

- Obtenemos el punto de corte de r con π :

$$2(1 + 2\lambda) + 3(-1 + 3\lambda) + \lambda - 10 = 0$$

$$2 + 4\lambda - 3 + 9\lambda + \lambda - 10 = 0$$

$$14\lambda - 11 = 0 \rightarrow \lambda = \frac{11}{14}$$

El punto de corte es $Q\left(\frac{18}{7}, \frac{19}{14}, \frac{11}{14}\right)$.

- Calculamos la distancia:

$$\text{dist}(P, r) = \text{dist}(P, Q) = |\vec{PQ}| = \left| \left(\frac{4}{7}, \frac{5}{14}, \frac{-31}{14} \right) \right| = \sqrt{\frac{1050}{196}} = \sqrt{\frac{75}{14}} \approx 2,31$$

Ejercicio 26.-

Determina la ecuación de un plano π paralelo al plano de la ecuación $x - 2y + 3z + 6 = 0$ y que dista 12 unidades del origen.

Un plano paralelo a $x - 2y + 3z + 6 = 0$ es de la forma $\pi: x - 2y + 3z + k = 0$. Tenemos que hallar k para que la distancia al origen sea de 12 unidades:

$$\text{dist}[(0, 0, 0), \pi] = \frac{|k|}{\sqrt{1 + 4 + 9}} = \frac{|k|}{\sqrt{14}} = 12 \begin{cases} k = 12\sqrt{14} \\ k = -12\sqrt{14} \end{cases}$$

Hay dos planos: $x - 2y + 3z + 12\sqrt{14} = 0$ y $x - 2y + 3z - 12\sqrt{14} = 0$

Ejercicio 27.-

Sean los puntos $P(5, 1, 3)$ y $Q(3, 7, -1)$. Por el punto medio del segmento PQ trazamos un plano π perpendicular a dicho segmento.

Este plano corta a los ejes coordenados en los puntos A, B y C :

a) Escribe la ecuación del plano π .

b) Calcula el volumen del tetraedro de vértices O, A, B y C (O es el origen de $\mathbb{R}^3$).

a) El plano es perpendicular a $\overrightarrow{PQ}(-2, 6, -4) \parallel (1, -3, 2)$. Pasa por el punto medio del segmento PQ : $M = (4, 4, 1)$.

La ecuación del plano es: $1(x - 4) - 3(y - 4) + 2(z - 1) = 0$

$$\pi: x - 3y + 2z + 6 = 0$$

b) Hallamos los vértices del tetraedro:

$$y = z = 0 \rightarrow x + 6 = 0 \rightarrow x = -6 \rightarrow A(-6, 0, 0)$$

$$x = z = 0 \rightarrow -3y + 6 = 0 \rightarrow y = 2 \rightarrow B(0, 2, 0)$$

$$x = y = 0 \rightarrow -2z + 6 = 0 \rightarrow z = -3 \rightarrow C(0, 0, -3)$$

$$\text{Volumen} = \frac{1}{6} (6 \cdot 2 \cdot 3) = 6 \text{ u}^3$$

Ejercicio 28.-

Halla el punto del plano de ecuación $x - z = 3$ que está más cerca del punto $P(3, 1, 4)$, así como la distancia entre el punto P y el plano dado.

• Hallamos la ecuación de la recta perpendicular al plano que pasa por $P(3, 1, 4)$:

$$r: \begin{cases} x = 3 + \lambda \\ y = 1 \\ z = 4 - \lambda \end{cases}$$

• El punto que buscamos es el punto de corte de r y el plano:

$$(3 + \lambda) - (4 - \lambda) = 3$$

$$3 + \lambda - 4 + \lambda = 3 \rightarrow 2\lambda = 4 \rightarrow \lambda = 2$$

El punto es $P'(5, 1, 2)$

• La distancia entre P y el plano es igual a la distancia entre P y P' :

$$\text{dist}(P, P') = |\overrightarrow{PP'}| = |(2, 0, -2)| = \sqrt{4 + 4} = \sqrt{8} \approx 2,83$$

Ejercicio 29.-

Dadas las rectas r y s :

$$r: \frac{x-3}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{1} \quad s: \begin{cases} x = \mu \\ y = -\mu \\ z = -\mu \end{cases}$$

Halla los puntos que dan la mínima distancia y determina la ecuación de la perpendicular común a r y s .

Un punto genérico de r es $R(3 + 2\lambda, \lambda, 1 + \lambda)$

Un punto genérico de s es $S(\mu, -\mu, -\mu)$

Un vector genérico de origen en r y extremo en s es:

$$\overrightarrow{RS}(-3 - 2\lambda + \mu, -\lambda - \mu, -1 - \lambda - \mu)$$

Este vector debe ser perpendicular a r y a s .

$$\begin{cases} \overrightarrow{RS} \cdot (2, 1, 1) = 0 \rightarrow -6\lambda - 7 = 0 \rightarrow \lambda = -\frac{7}{6} \\ \overrightarrow{RS} \cdot (1, -1, -1) = 0 \rightarrow -2 + 3\mu = 0 \rightarrow \mu = \frac{2}{3} \end{cases}$$

Los puntos que dan la mínima distancia son:

$$R\left(\frac{2}{3}, -\frac{7}{6}, -\frac{1}{6}\right) \text{ y } S\left(\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right)$$

La perpendicular común es la recta que pasa por R y S :

$$\overrightarrow{RS}\left(0, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right) \rightarrow \vec{d}(0, 1, -1)$$

$$\text{La recta es: } \begin{cases} x = \frac{2}{3} \\ y = -\frac{7}{6} + \lambda \\ z = -\frac{1}{6} - \lambda \end{cases}$$

Ejercicio 30.-

Halla la ecuación de la proyección ortogonal r' de la recta

$$r: \frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-2}{2} \text{ sobre el plano } \alpha: x-3y+2z+12=0.$$

La proyección ortogonal de r sobre α es la recta intersección del plano α con otro plano π , perpendicular a α y que contiene a r .

$$P(1, 1, 2); \vec{d}_r(2, 1, 2); \vec{n}(1, -3, 2)$$

$$\vec{d}_r \times \vec{n} = (2, 1, 2) \times (1, -3, 2) = (8, -2, -7)$$

La ecuación de π es: $8(x-1) - 2(y-1) - 7(z-2) = 0$

$$\pi: 8x - 2y - 7z + 8 = 0$$

La proyección ortogonal de r sobre α es:

$$r': \begin{cases} x - 3y + 2z + 12 = 0 \\ 8x - 2y - 7z + 8 = 0 \end{cases}$$

Ejercicio 31.-

Halla el plano de la familia: $mx + y + z - (m+1) = 0$ que está situado a distancia 1 del origen.

Hallamos la distancia del origen, $(0, 0, 0)$, al plano y la igualamos a 1:

$$dist = \frac{|m \cdot 0 + 0 + 0 - (m+1)|}{\sqrt{m^2 + 1 + 1}} = \frac{|m+1|}{\sqrt{m^2 + 2}} = 1$$

$$|m+1| = \sqrt{m^2 + 2} \rightarrow (m+1)^2 = m^2 + 2 \rightarrow m^2 + 1 + 2m = m^2 + 2$$

$$2m = 1 \rightarrow m = \frac{1}{2}$$

$$\text{El plano es: } \frac{1}{2}x + y + z - \frac{3}{2} = 0; \text{ es decir: } x + 2y + 2z - 3 = 0$$

Ejercicio 32.-

La ecuación $ax + by + cz + d = 0$ representa un plano del espacio. Explica qué característica tiene ese plano en cada uno de estos casos:

i) $a = 0, b = 0$ ii) $b = 0, c = 0$

iii) $a = 0, c = 0$ iv) $d = 0$

i) Es perpendicular al eje OZ . (Paralelo al plano OXY).

ii) Es perpendicular al eje OX . (Paralelo al plano OYZ).

iii) Es perpendicular al eje OY . (Paralelo al plano OXZ).

iv) Pasa por el origen, $(0, 0, 0)$.

Ejercicio 33.-

Dada una recta r y un punto P de ella, ¿cuántas rectas perpendiculares a r que pasen por el punto P se pueden trazar?

Infinitas. Todas las que, pasando por P , están contenidas en el plano perpendicular a r que pasa por P .

Ejercicio 34.-

Dadas las rectas r, s y t :

$$r: \begin{cases} x = -2 \\ y - z = 0 \end{cases} \quad s: \begin{cases} 2x + z = -2 \\ x + y = 0 \end{cases} \quad t: \begin{cases} x - z = 0 \\ y + z = -1 \end{cases}$$

Halla las coordenadas de un punto P que está en la recta t y que determina con la recta s un plano que contiene a r .

- Escribimos las ecuaciones de r, s y t en forma paramétrica:

$$r: \begin{cases} x = -2 \\ y = \lambda \\ z = \lambda \end{cases} \quad s: \begin{cases} x = \mu \\ y = -\mu \\ z = -2 - 2\mu \end{cases} \quad t: \begin{cases} x = k \\ y = -1 - k \\ z = k \end{cases}$$

- Hallamos la ecuación del plano, π , que contiene a r y a s :

Las rectas r y s se cortan en el punto $(-2, 2, 2)$, luego el plano π contiene a este punto.

Un vector normal al plano es:

$$\vec{d}_r \times \vec{d}_s = (0, 1, 1) \times (1, -1, -2) = (-1, 1, -1) \rightarrow \vec{n}(1, -1, 1)$$

Luego el plano es: $\pi: 1(x+2) - 1(y-2) + 1(z-2) = 0$

$$\pi: x - y + z + 2 = 0$$

- P es el punto de corte de π con la recta t :

$$k - (-1 - k) + k + 2 = 0 \rightarrow k + 1 + k + k + 2 = 0 \rightarrow 3k + 3 = 0 \rightarrow k = -1$$

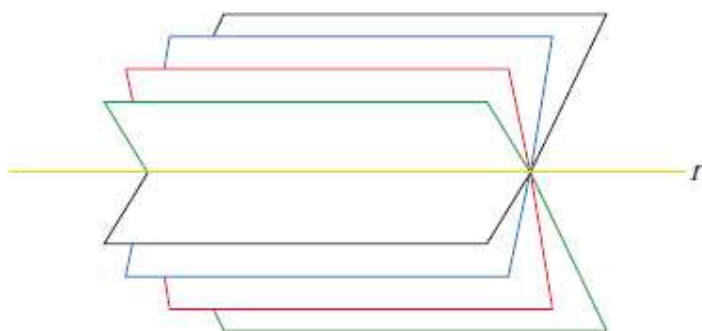
El punto es $P(-1, 0, -1)$

Ejercicio 35.-

Haz de planos

La recta $r: \begin{cases} \pi: 2x + 3y - z - 4 = 0 \\ \sigma: x - 2y + z + 1 = 0 \end{cases}$ es la intersección de los planos π y σ .

El conjunto de todos los planos que contienen a r se llama *HAZ DE PLANOS* de arista r , y su expresión analítica es: $a(2x + 3y - z - 4) + b(x - 2y + z + 1) = 0$



Para cada par de valores de a y b (salvo para $a = 0$ y $b = 0$) se obtiene la ecuación de un plano del haz.

- Halla el plano del haz que pasa por el origen de coordenadas.
- ¿Para qué valor de k uno de los planos del haz es perpendicular a la recta

$$t: \frac{x}{3} = \frac{y-2}{5} = \frac{z}{k} \text{? ¿Cuál es ese plano del haz?}$$

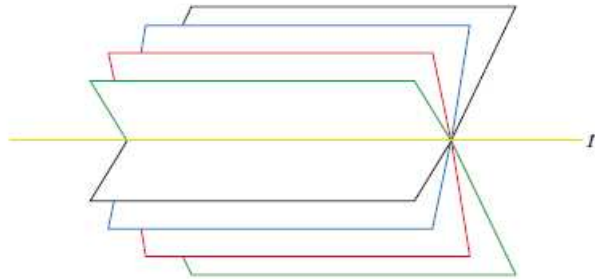
- Halla dos puntos que pertenezcan a todos los planos del haz anterior.
- Pon la expresión del haz de planos cuya arista es la recta s :

$$s: \frac{x-5}{3} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z-3}{1}$$

Haz de planos

La recta r : $\begin{cases} \pi: 2x + 3y - z - 4 = 0 \\ \sigma: x - 2y + z + 1 = 0 \end{cases}$ es la intersección de los planos π y σ .

El conjunto de todos los planos que contienen a r se llama *HAZ DE PLANOS* de arista r , y su expresión analítica es: $a(2x + 3y - z - 4) + b(x - 2y + z + 1) = 0$



Para cada par de valores de a y b (salvo para $a = 0$ y $b = 0$) se obtiene la ecuación de un plano del haz.

a) Halla el plano del haz que pasa por el origen de coordenadas.

b) ¿Para qué valor de k uno de los planos del haz es perpendicular a la recta

$$t: \frac{x}{3} = \frac{y-2}{5} = \frac{z}{k} \quad ? \text{ ¿Cuál es ese plano del haz?}$$

c) Halla dos puntos que pertenezcan a todos los planos del haz anterior.

d) Pon la expresión del haz de planos cuya arista es la recta s :

$$s: \frac{x-5}{3} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z-3}{1}$$

Para que el plano sea perpendicular a la recta, el vector normal del plano y el vector dirección de la recta han de ser paralelos, es decir, sus coordenadas deben ser proporcionales:

$$\frac{2a+b}{3} = \frac{3a-2b}{5} = \frac{-a+b}{k}$$

$$\left. \begin{aligned} 10a + 5b &= 9a - 6b \\ 2ka + kb &= -3a + 3b \end{aligned} \right\} \begin{aligned} a + 11b &= 0 \rightarrow a = -11b \\ (2k+3)a + (k-3)b &= 0 \end{aligned}$$

$$-11(2k+3) + (k-3) = 0 \rightarrow -22k - 33 + k - 3 = 0$$

$$-21k - 36 = 0 \rightarrow k = \frac{-36}{21} = \frac{-12}{7} \rightarrow k = \frac{-12}{7}$$

El plano del haz es:

$$-11b(2x + 3y - z - 4) + b(x - 2y + z + 1) = 0$$

$$-11(2x + 3y - z - 4) + (x - 2y + z + 1) = 0$$

$$-22x - 33y + 11z + 44 + x - 2y + z + 1 = 0$$

$$-21x - 35y + 12z + 45 = 0$$

Otra resolución:

Si la recta es perpendicular a un cierto plano del haz, será perpendicular a todas las rectas contenidas en ese plano, y, en concreto, a la recta r , arista del haz.

Vector dirección de r : $\vec{d} = (2, 3, -1) \times (1, -2, 1) = (1, -3, -7)$

Vector dirección de t : $\vec{d'} = (3, 5, k)$

$$\vec{d} \cdot \vec{d'} = 0 \rightarrow (1, -3, -7) \cdot (3, 5, k) = 3 - 15 - 7k = 0 \rightarrow k = \frac{-12}{7}$$

A partir de aquí, obtendríamos la relación entre a y b , y el plano del haz como en el caso anterior.

c) Los puntos que pertenecen a todos los planos del haz son los puntos de la recta r . Por ejemplo: $(1, 0, -2)$ y $(0, 3, 5)$.

d) Escribimos la recta s en forma implícita:

$$\frac{x-5}{3} = \frac{y+1}{-2} \rightarrow -2x+10 = 3y+3 \rightarrow -2x-3y+7=0$$

$$\frac{x-5}{3} = \frac{z-3}{1} \rightarrow x-5 = 3z-9 \rightarrow x-3z+4=0$$

$$s: \begin{cases} 2x+3y-7=0 \\ x-3z+4=0 \end{cases}$$

La expresión del haz de planos cuya arista es s es:

$$a(2x+3y-7) + b(x-3z+4) = 0$$

- e) Es el plano que contiene a la recta (puesto que es del haz) y es perpendicular a $\overrightarrow{OO'}$, siendo $O(0, 0, 0)$ y O' la proyección de O sobre la recta.

Lo calculamos en el caso de la recta s :

Un punto genérico de la recta s es:

$$P(5 + 3\lambda, -1 - 2\lambda, 3 + \lambda)$$

Un vector dirección de s es $\vec{d}_s(3, -2, 1)$.

El vector $\overrightarrow{OP}$ ha de ser perpendicular a $\vec{d}_s$:

$$\overrightarrow{OP} \cdot \vec{d}_s = 0 \rightarrow 3(5 + 3\lambda) - 2(-1 - 2\lambda) + (3 + \lambda) = 0$$

$$15 + 9\lambda + 2 + 4\lambda + 3 + \lambda = 0 \rightarrow 14\lambda + 20 = 0 \rightarrow \lambda = \frac{-20}{14} = \frac{-10}{7}$$

Luego: $O'\left(\frac{5}{7}, \frac{13}{7}, \frac{11}{7}\right)$; y el vector normal al plano es $\overrightarrow{OO'}\left(\frac{5}{7}, \frac{13}{7}, \frac{11}{7}\right)$; o bien $(5, 13, 11)$.

El plano será: $5\left(x - \frac{5}{7}\right) + 13\left(y - \frac{13}{7}\right) + 11\left(z - \frac{11}{7}\right) = 0$

$$5x + 13y + 11z - 45 = 0$$

