NOMBRE Y APELLIDOS: 1ºB.C.N.

Límites, asíntotas y continuidad CORRECCIÓN 30-1-2014

1.-- Calcular los siguientes límites:

a) $\lim_{x \to +\infty} \left(2x^3 - \sqrt{4x^6 - 2x^3} \right) = [\infty - \infty]$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{(2x^3)^2 - \left(\sqrt{4x^6 - 2x^3}\right)^2}{2x^3 + \sqrt{4x^6 - 2x^3}} = \lim_{x \to \infty} \frac{\cancel{4x^6} - \cancel{4x^6} + 2x^3}{2x^3 + \sqrt{4x^6 - 2x^3}} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right]$$

$$= \lim_{x \to \infty} \frac{\frac{2x^3}{x^3} \to 2}{\underbrace{\frac{2x^3}{x^3}}_{2} + \sqrt{\underbrace{\frac{4x^6}{x^6}}_{4} - \underbrace{\frac{2x^3}{x^6}}_{0}}} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

b) $\lim_{x \to -\infty} \left(\frac{-2x^6 + 2\sqrt{9x^{12} + x^2}}{\sqrt{4x^{12} + 1}} \right)^{\frac{+x^3+1}{x^2}} = \left[\frac{\infty - \infty}{\infty}\right]^{\infty} =$

dividimos pr x^6

$$\lim_{x \to +\infty} \left[\frac{-2x^6 + 2\sqrt{9x^{12} + x^2}}{\sqrt{4x^{12} + 1}} \right]^{\frac{-x^3+1}{x^2}} \underset{\left[\frac{\infty - \infty}{\infty}\right]}{=} \lim_{x \to \infty} \left[\frac{-\frac{2x^6}{x^6} + 2\sqrt{\frac{9x^{12}}{x^{12}} + \frac{x^2}{x^{12}}}}{\sqrt{\frac{4x^{12}}{x^{12}} + \frac{1}{x^{12}}}} \right]^{-\infty}$$

$$= \left(\frac{-2 + 2 \cdot 3}{2} \right)^{-\infty} = 2^{-\infty} = \frac{1}{2^{\infty}} = 0$$

2.-Dada la función: (2 puntos)

$$f(x)\begin{cases} \dfrac{-x^2+x+2}{2\sqrt{x+2}-4} & x>2 \\ \dfrac{x^4-2x^2-8}{4-x^2} & 1\leq x\leq 2 \\ \dfrac{x}{1+x^2} & 1>x \end{cases}$$

Estudiar la continuidad en x=2 y x=1 indicando donde proceda el tipo de discontinuidad.

x=2 Discontinuidad Evitable

1) $f(2)=\left[\frac{0}{0}\right]\ \nexists$

0'75

2) $\lim_{x\to 2^+}\dfrac{-x^2+x+2}{2\sqrt{x+2}-4}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 2^+}\dfrac{-(x-2)(x+1).(2\sqrt{x+2}+4)}{4x+8-16=4(x-2)}=-\dfrac{3.8}{4}=-6$ //

3) $\lim_{x\to 2^-}\dfrac{x^4-2x^2-8}{4-x^2}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 2^-}\dfrac{\overset{-1}{(x-2)}(x+2)(x^2+2)}{(2-x)(2+x)}=-6$ // 0'5

tiene límite $\lim_{x\to 2}f(x)=-6$

	1	0	-2	0	-8
2		2	4	4	8
	1	2	2	4	0
-2		-2	0	-4	
	1	0	2	0	

0'5

x=1 Discontinuidad de salto finito

1) $f(1)=\dfrac{-9}{3}=-3$ //

0'75

2) $\lim_{x\to 1^-}\dfrac{x^4-2x^2-8}{4-x^2}=-3$

$\neq$

$\lim_{x\to 1^+}\dfrac{x}{1+x^2}=\dfrac{1}{2}$ //

3.-Dada la función f (x)= $\dfrac{x^3-x^2+x-1}{x^4-2x^3+2x^2-2x+1}$ a) Estudiar donde es continua, y en sus puntos de discontinuidad razona de que tipo se trata b) Determinar sus asíntotas horizontales y verticales

Es continua en todo $\mathbb{R}$ menos en los valores que se anula el denominador. $x^4-2x^3+2x^2-2x+1=0$.

$$
\begin{array}{c|ccccc}
 & 1 & -2 & 2 & -2 & 1 \\
1 & & 1 & -1 & 1 & -1 \\
\hline
 & 1 & -1 & 1 & -1 & \boxed{0} \\
1 & & 1 & 0 & 1 & \\
\hline
 & 1 & 0 & 1 & \boxed{0} &
\end{array}
$$

$x^4-2x^3+2x^2-2x+1=(x-1)^2\cdot(x^2+1)$

Es continua en $\mathbb{R}-\{1\}$ //

- $x=1$. Discontinuidad de salto infinito. 0'5

$f(1)=\left[\frac{0}{0}\right]$.

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3-x^2+x-1}{x^4-2x^3+2x^2-2x+1}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 1}\frac{\cancel{(x-1)}\cancel{(x^2+1)}}{(x-1)^2\cancel{(x^2+1)}}$$

$\nearrow \lim_{x\to 1^+}\frac{1}{x-1}=+\infty$

$\searrow \lim_{x\to 1^-}\frac{1}{x-1}=-\infty$

0'5

b)

Asíntota vertical $x=1$ ya que el limite es ∞.

0'5

Asíntota horizontal $y=0$ ya que $\lim_{x\to\infty}\frac{x^3-x^2+x-1}{x^4-2x^3+2x^2-2x+1}=0$ //

0'5

4.- ¿Es $x=2^+$, asíntota vertical de la función $f(x)=\left(\frac{-x^2+5x-6}{2-x}\right)^{\frac{1}{x-2}}$? Razona la respuesta

Vamos si el límite de $f(x)$ cuando $x\to 2^+$ tiende a ∞.

$$\lim_{x\to 2^+}\left(\frac{-x^2+5x-6}{2-x}\right)^{\frac{1}{x-2}\to+\infty}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 2^+}\left(\frac{-(\cancel{x-2})(x-3)}{(\cancel{2-x})}\right)^{\frac{1}{x-2}}=\lim_{x\to 2^+}(-x+3)^{\frac{1}{x-2}}=1^{+\infty}(n^oe)$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(1+3-x-1\right)^{\frac{1}{x-2}}=\lim_{x\to\infty}\left(1+2-x\right)^{\frac{1}{x-2}}=\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{\frac{1}{2-x}}\right)^{\frac{1}{2-x}}\right]^{\frac{2-x}{x-2}}$$

$=e^{-1}=\frac{1}{e}$ // $\Rightarrow$ $x=2^+$ no es una asíntota vertical de $f(x)$ ya que el límite no es ∞.

5.- Hallar k y p para que la función sea continua en x=1, razonando el proceso

$$f(x)=\begin{cases}\frac{x^2-5x+k}{x^2-1} & x\neq 1\\ p & x=1\end{cases}$$

$x=1$ continua.

1) $x=1 \Rightarrow f(1)=p$

2) $\lim_{x\to 1}\frac{x^2-5x+k}{x^2-1}=\frac{-4+k}{0}\Rightarrow$ Si $k=4\Rightarrow\lim_{x\to 1}\frac{x^2-5x+4}{x^2-1}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 1}\frac{\cancel{(x-1)}(x-4)}{\cancel{(x-1)}(x+1)}$

$=\frac{-3}{2}$ //

3) Para $k=4\Rightarrow$ el límite de $f(x)$ valdría $-\frac{3}{2}$ y para que este límite coincidiera con $f(1)=p$, tendría que ser $p=-3/2$.

$$p=f(1)=\lim_{x\to 1}f(x)=-\frac{3}{2} \quad \text{si} \quad k=4$$

Sol.: $k=4$ y $p=-3/2\Rightarrow f(x)$ continua en $x=1$