FUNCIONES EXPONENCIALES Y LOGARÍTMICAS

1. Es posible medir la concentración de alcohol en la sangre de una persona. Investigaciones médicas recientes sugieren que el riesgo R (dado como porcentaje) de tener un accidente automovilístico puede ser modelado mediante la ecuación:

$$R(x) = 6 \cdot e^{kx}$$

donde x es la concentración de alcohol en la sangre y k una constante.

a) Calcular la constante k *(con dos cifras decimales)*, sabiendo que al suponer una concentración de 0,04 de alcohol en la sangre produce un riesgo del 10% (R = 10) de sufrir un accidente.

b) Si la ley establece que las personas con un riesgo del 20% o mayor de sufrir un accidente no deben conducir vehículos ¿con cuál concentración de alcohol en la sangre debe un conductor ser arrestado y multado?

c) Representa gráficamente la función anterior. (Indicación: fíjate en su dominio, y elige una escala adecuada)

2. Un problema importante de oceanografía consiste en determinar la cantidad de luz que puede penetrar a varias profundidades oceánicas. La Ley de Beer – Lambert establece que se debe utilizar una función exponencial $I(x)$, tal que $I = I_0 \cdot a^x$, para modelar este fenómeno. Suponiendo que

$$I(x) = 10 \cdot 0,4^x$$

es la energía lumínica equivalente (en $cal \cdot \frac{s}{cm^2}$) que llega a una profundidad de x metros.

a) ¿Qué energía se tiene a una profundidad de 2 m?

b) Dibujar la gráfica de $I(x)$, desde $x = 0$ a $x = 5$.

c) ¿Qué profundidad corresponde a una energía lumínica de $1,048576 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{cal} \cdot \frac{\mathrm{s}}{\mathrm{cm}^2}$?

3. El trazador (o marcador) radiactivo ^{51}Cr (isótopo 51 del cromo) se usa para localizar la posición de la placenta de una mujer embarazada. A menudo se debe pedir esta sustancia a un laboratorio médico. Si se envían A_0 unidades (en microcuries), entonces, debido al decrecimiento radiactivo, el número de unidades $A(t)$ que quedan después de t días está dado por

$$A(t) = A_0 \cdot e^{-0,0249 \cdot t}$$

a) Si se envían 35 unidades del trazador y este tarda 2 días en llegar, ¿de cuántas unidades se dispone para el análisis?

b) Si se necesitan 49 unidades para la prueba, ¿cuántas unidades se deben enviar?

4. Los químicos usan un número denotado por pH para describir cuantitativamente la acidez de ciertas soluciones. Por definición, $pH = -\log_{10}\left[H_3O^+\right]$ donde $\left[H_3O^+\right]$ es la concentración de iones hidrógenos (hidrogeniones) en moles por litros. Aproxima el pH de las siguientes soluciones dados sus correspondientes $\left[H_3O^+\right]$:

a) Vinagre: $\left[H_3O^+\right] = 6,3 \cdot 10^{-3}$

b) Zanahoria: $\left[H_3O^+\right] = 1,0 \cdot 10^{-5}$

c) Agua de mar: $\left[H_3O^+\right] = 5,0 \cdot 10^{-9}$

Aproximar la concentración de iones hidrógenos $\left[H_3O^+\right]$ en cada una de las siguientes sustancias:

a) Manzana: $pH = 3,0$

b) Cerveza: $pH = 4,2$

c) Leche: $pH = 6,6$

5. La energía *E* (en ergios) liberada durante un terremoto de magnitud *R* está dada por la fórmula

$$\log_{10} E = 1,4 + 1,5 \cdot R$$

a) Despejar *E* en función de *R*.

b) Calcular la energía liberada durante el terremoto de Japón de 2011, que tuvo una magnitud de 8,9 en la escala Richter.

c) Representa gráficamente la función del apartado a).

Indicación general: Para la resolución de los problemas puedes usar cualquier programa que represente funciones, como Graph, Wiris, Derive, Excel… escogiendo adecuadamente la escala, el dominio, el recorrido…

SOLUCIONES

Ejercicio 1.

$R(x) = 6 \cdot e^{kx}$

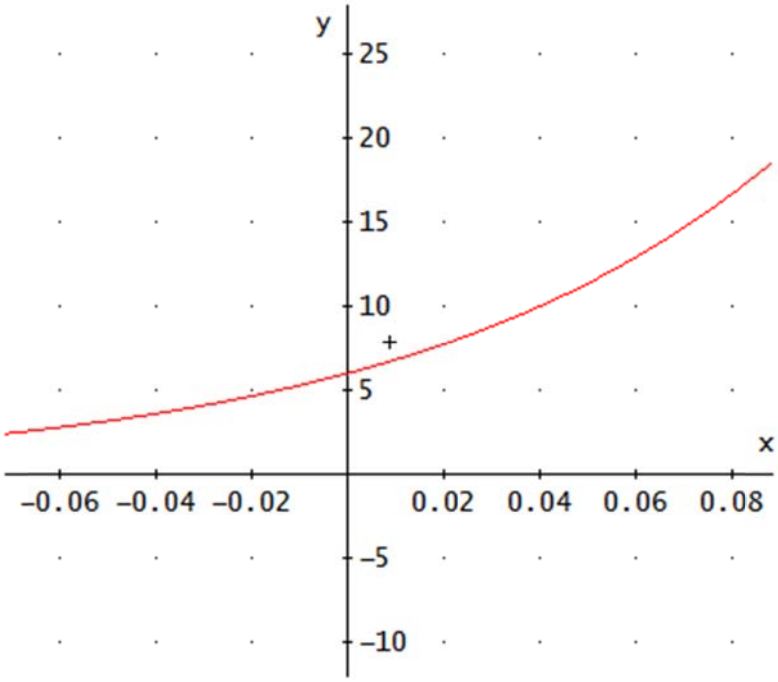
a) $\left.\begin{array}{l} R = 10 \\ x = 0,04 \end{array}\right\} 10 = 6 \cdot e^{0,04 \cdot k} \rightarrow \frac{10}{6} = e^{0,04 \cdot k} \rightarrow \log_e \frac{10}{6} = \log_e e^{0,04 \cdot k} \rightarrow \log_e \frac{10}{6} = 0,04 \cdot k \cdot \log_e e \rightarrow$

$\rightarrow k = \frac{\log_e \frac{10}{6}}{\log_e 0,04} = 12,77 \rightarrow \boxed{k = 12,77}$

b) $R \geq 20 \rightarrow 20 = 6 \cdot e^{12,77 \cdot x} \rightarrow \frac{20}{6} = e^{12,77 \cdot x} \rightarrow \log_e \frac{20}{6} = \log_e e^{12,77 \cdot x} \rightarrow \log_e \frac{20}{6} = 12,77 \cdot x \cdot \log_e e$

$\rightarrow x = \frac{\log_e \frac{20}{6}}{12,77} = 0,09 \rightarrow \boxed{x \geq 0,09}$. Por tanto, si la concentración de alcohol en la sangre es mayor o igual a 0,09 el conductor debe ser arrestado y multado.

c) Gráfica



Ejercicio 2.

$I(x) = 10 \cdot 0,4^x$

a) $x = 2 \text{ m} \rightarrow I(2) = 10 \cdot 0,4^2 = 1,6 \rightarrow \boxed{I(2) = 1,6 \text{ cal} \cdot \frac{\text{s}}{\text{cm}^2}}$

b) Gráfica

c) Teniendo en cuenta el dato del problema:

$$1,048576 \cdot 10^{-3} = 10 \cdot 0,4^x \rightarrow \frac{1,048576 \cdot 10^{-3}}{10} = 0,4^x \rightarrow x = \frac{\log_e \frac{1,048576 \cdot 10^{-3}}{10}}{\log_e 0,4} = 10 \rightarrow$$

$\rightarrow \boxed{x = 10 \text{ m}}$

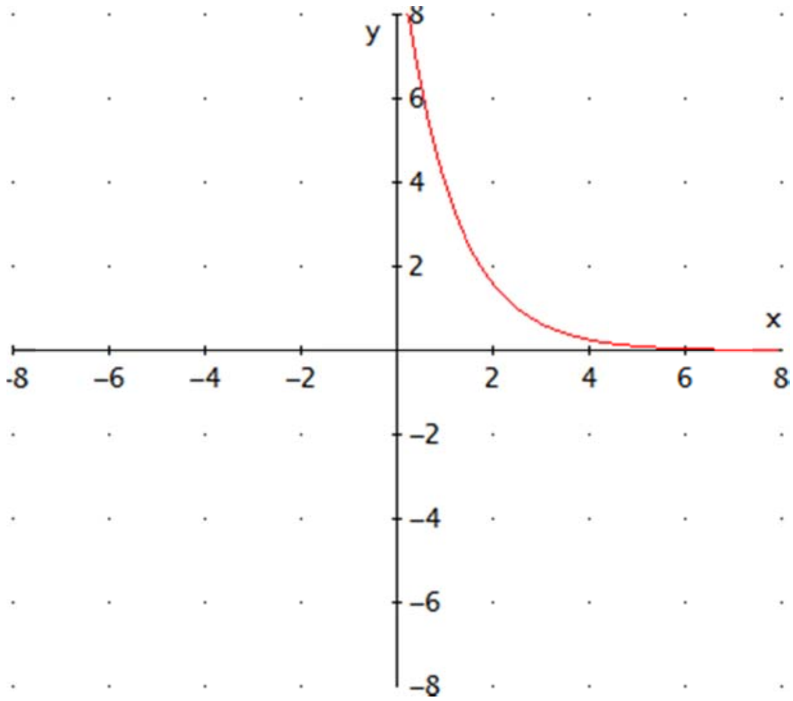
Ejercicio 3.

$A(t) = A_0 \cdot e^{-0{,}0249 \cdot t}$

a) $\left.\begin{matrix} A_0 = 35 \\ t = 2 \text{ días} \end{matrix}\right\} \rightarrow A(2) = 35 \cdot e^{-0{,}0249 \cdot 2} = 33{,}30 \simeq 33$

Así, al cabo de dos días quedan $\boxed{\text{33 unidades}}$.

b) Gráfica:



c) $\left.\begin{matrix} A(t) = 49 \\ t = 2 \text{ días} \end{matrix}\right\} \rightarrow 49 = A_0 \cdot e^{-0{,}0249 \cdot 2} \rightarrow A_0 = \dfrac{49}{e^{-0{,}0249 \cdot 2}} = 51{,}5$

Habrá que pedir $\boxed{\text{52 unidades}}$.

Ejercicio 4.

a) Vinagre: $\left[H_3O^+\right] = 6{,}3 \cdot 10^{-3} \rightarrow pH = -\log_{10} 6{,}3 \cdot 10^{-3} = 2{,}2 \rightarrow \boxed{pH = 2{,}2}$

b) Zanahoria: $\left[H_3O^+\right] = 1{,}0 \cdot 10^{-5} \rightarrow pH = -\log_{10} 1{,}0 \cdot 10^{-5} = 5 \rightarrow \boxed{pH = 5}$

c) Agua de mar: $\left[H_3O^+\right] = 5{,}0 \cdot 10^{-9} \rightarrow pH = -\log_{10} 5{,}0 \cdot 10^{-9} = 8{,}3 \rightarrow \boxed{pH = 8{,}3}$

d) Manzana: $pH = 3{,}0 \rightarrow -\log_{10}\left[H_3O^+\right] = 3{,}0 \rightarrow \log_{10}\left[H_3O^+\right] = -3{,}0 \rightarrow \boxed{\left[H_3O^+\right] = 10^{-3}}$

e) Cerveza: $pH = 4{,}2 \rightarrow -\log_{10}\left[H_3O^+\right] = 4{,}2 \rightarrow \log_{10}\left[H_3O^+\right] = -4{,}2 \rightarrow \left[H_3O^+\right] = 10^{-4{,}2}$

$$\boxed{\left[H_3O^+\right] = 6{,}31 \cdot 10^{-5}}$$

f) Leche: $pH = 6{,}6 \rightarrow -\log_{10}\left[H_3O^+\right] = 6{,}6 \rightarrow \log_{10}\left[H_3O^+\right] = -6{,}6 \rightarrow \left[H_3O^+\right] = 10^{-6{,}6}$

$$\boxed{\left[H_3O^+\right] = 2{,}51 \cdot 10^{-7}}$$

Ejercicio 5.

a) $\log_{10} E = 1,4 + 1,5 \cdot R \rightarrow \boxed{E = 10^{1,4+1,5\cdot R}}$

b) $R = 8,9 \rightarrow E = 10^{1,4+1,5\cdot 8,9} = 5,62 \cdot 10^{14} \rightarrow \boxed{E = 5,62 \cdot 10^{14} \text{ ergios}}$

c) Representación gráfica: