

# LOGARITMOS

1. Definición:  $\log_a x = N \Leftrightarrow x = a^N$

2. Tipos de logaritmos importantes

a) Logaritmo decimal: Es el logaritmo de base 10, y se escribe  $\log x$  (sin especificar la base).

b) Logaritmo neperiano: Es el logaritmo de base e (e es un número irracional similar a  $\pi$  de valor aproximado 2.718). Se escribe  $\ln x$ .

3. Consecuencias de la definición de logaritmo

I.  $\log_a 1 = 0$  (puesto que  $a^0 = 1$ )

II.  $\log_a a = 1$  (puesto que  $a^1 = a$ )

III.  $\log_a a^n = n$  (puesto que  $a^n = a^n$ )

IV. No existe  $\log_a x$  si  $x \leq 0$  (puesto que  $a > 0$  y cualquier potencia de base positiva es siempre mayor que 0)

4. Propiedades de los logaritmos

I.  $\boxed{\log_a(x \cdot y) = \log_a x + \log_a y}$

Demostración:

Por definición de logaritmo,  $\log_a x = N \Leftrightarrow x = a^N$  y  $\log_a y = M \Leftrightarrow y = a^M$

Sustituyendo x e y en el primer término:  $\log_a(x \cdot y) = \log_a(a^N \cdot a^M) = \log_a(a^{N+M}) = N + M$

Ejemplo:  $\log_a 6 = \log_a(2 \cdot 3) = \log_a 2 + \log_a 3$

II.  $\boxed{\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y}$

Demostración:

Por definición de logaritmo,  $\log_a x = N \Leftrightarrow x = a^N$  y  $\log_a y = M \Leftrightarrow y = a^M$

Sustituyendo x e y en el primer término:  $\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a\left(\frac{a^N}{a^M}\right) = \log_a(a^{N-M}) = N - M$

Ejemplo:  $\log_a 5 = \log_a\left(\frac{10}{2}\right) = \log_a 10 - \log_a 2$

III.  $\boxed{\log_a(x^q) = q \cdot \log_a x}$  para cualquier valor de q (incluidos los exponentes fraccionarios que resultan de los radicales)

Demostración:

Por definición de logaritmo,  $\log_a x = N \Leftrightarrow x = a^N$

Sustituyendo x e y en el primer término:  $\log_a(x^q) = \log_a((a^N)^q) = \log_a(a^{q \cdot N}) = q \cdot N$

Ejemplos:  $\log_a 25 = \log_a(5^2) = 2 \cdot \log_a 5$

$\log_a \sqrt[3]{5} = \log_a\left(5^{\frac{1}{3}}\right) = \frac{1}{3} \cdot \log_a 5$

## EJERCICIOS

**1. Calcula los siguientes logaritmos**

a)  $\log_2 32$

b)  $\log_2 0'5$

SOL: a) 5 b) -1 c) -4 d) -4 e) -1 f) -2 g) -3 h) 3 i) 3 j) 4

c)  $\log_3 \frac{1}{81}$

d)  $\log_{\frac{1}{2}} 16$

e)  $\log 0'1$

f)  $\log_5 0'04$

g)  $\log_6 \frac{1}{216}$

h)  $\log_5 125$

i)  $\log_4 64$

j)  $\log_{\frac{1}{5}} \frac{1}{625}$

**2. Calcula el valor de N en cada caso**

SOL: a) 81 b) 1000 c) 8 d)  $\sqrt[3]{100}$  e)  $e^2$  f)  $\frac{1}{2}$  g)  $\frac{1}{2}$  h) 4 i) 3 j)  $\frac{1}{3}$

a)  $\log_3 N = 4$

b)  $\log N = 3$

c)  $\log_{\frac{1}{2}} N = -3$

d)  $\log N = \frac{2}{3}$

e)  $\ln N = 2$

f)  $\log_N \sqrt[4]{8} = -\frac{3}{4}$

g)  $\log_N 32 = -5$

h)  $\log_N 16 = 2$

i)  $\log_N \sqrt[5]{9} = \frac{2}{5}$

j)  $\log_N \frac{1}{27} = 3$

**3. Calcula el valor de N y M para que sean ciertas las siguientes igualdades.**

a)  $\log N + \log 3 = \log 21$

b)  $\log 16 = N \cdot \log 2$

c)  $\log \sqrt{8} = N \cdot \log 2$

d)  $\log N = 2 \cdot \log 3$

e)  $\log 8 - \log 2 = \log N$

f)  $\log N + M \cdot \log 2 = \log 28$

SOL: a) N=7 b) N=4 c) N=3/2 d) N=9 e) N=4 f) N=7, M=2

**4. Expresa como un solo logaritmo.**

a)  $\log 6 + \log 2 - \log 3$

b)  $2 \log 2 + \log 36 - \log 12$

c)  $\log 3 + \log 25 - \left( \frac{1}{2} \log 3 + \log 5 \right)$

d)  $3 \cdot (\log 8 - \log 4) + \log 3$

e)  $3 \log 2 - 4 \log 3 + 5 \log 15$

f)  $3 \log 5 + \frac{1}{2} \log 9 - 3 \log 3 - \log 25$

g)  $\log 5 + \frac{7}{3} \log 9 - 3 \log x$

h)  $2 \log x - 3 \log y + 2$

i)  $\frac{1}{2} \log N - 2 \log T - \log P + \frac{5}{2} \log H$

j)  $\log(xy) - 2 \log \left( \frac{x}{y} \right)$

k)  $2 \log(a-b) + \log(a^2 - b^2)$

l)  $(5 \log x - 4 \log y) + (3 \log x - \log y)$

SOL: a)  $\log 4$  b)  $\log 12$  c)  $\log(5\sqrt{3})$  d)  $\log 24$  e)  $\log 25000$  f)  $\log \frac{5}{9}$  g)  $\log \frac{5 \cdot \sqrt[3]{97}}{x^3}$

h)  $\log \frac{100x^2}{y^3}$  i)  $\log \frac{\sqrt{N \cdot H^5}}{T^2 \cdot P}$  j)  $\log \frac{y^3}{x}$  k)  $\log \frac{a-b}{a+b}$  l)  $\log \frac{x^8}{y^5}$

**5. Aplica las propiedades de los logaritmos para desarrollar las siguientes expresiones**

a)  $\log \left( \frac{a^2 b^3}{c^4} \right)$

b)  $\log \left( \frac{\sqrt{a^3}}{b^2 c^{-4}} \right)$

c)  $\log \left( \sqrt[5]{\frac{a^4 b^3}{c^2}} \right)$

SOL: a)  $2 \log a + 3 \log b - 4 \log c$

b)  $\frac{3}{2} \log a - 2 \log b + 4 \log c$

c)  $\frac{4}{5} \log a + \frac{3}{5} \log b - \frac{2}{5} \log c$

**6. Sabiendo que  $\log 2 \approx 0'3$  y  $\log 3 \approx 0'5$ , calcular los siguientes logaritmos**

a)  $\log 6$

b)  $\log 144$

c)  $\log \frac{8}{81}$

d)  $\log 15$

e)  $\log \frac{4}{45}$

f)  $\log \sqrt[4]{48}$

SOL: a) 0'8

b) 2'2

c) -1'1

d) 1'2

e) -1'1

f) 0'425