NÚMEROS COMPLEJOS

La necesidad de resolver ecuaciones del tipo $x^2+3 = 0$ obligó a ampliar el conjunto de los números reales (racionales e irracionales) conocido hasta el momento, ya que sus soluciones ($x = \pm\sqrt{-3}$) no se corresponden con ningún número real. Como, por otra parte, $\sqrt{-3} = \sqrt{3}\cdot\sqrt{-1}$, toda la novedad quedaba reducida a la expresión $\sqrt{-1}$.

BOMBELLI, en su obra "Álgebra" (1572), empezó a considerar $\sqrt{-1}$ como un número, aunque su idea fue rechazada en los siglos posteriores por grandes matemáticos. No es hasta el siglo XVIII, cuando son reconocidos por la comunidad matemática a través de Euler (1707-1783) que los utilizó sin reparos bajo el apelativo de "imaginarios" por su carácter *no real*. Es por eso que EULER utilizó la letra i (imaginario) para referirse a $\sqrt{-1}$.

1. Definiciones

Definición 1: Se llama **" unidad imaginaria"** y se designa con la letra **i**, a la expresión:

$$\boxed{i = \sqrt{-1}}$$

de donde se deduce: $\boxed{i^2 = -1}$

La ampliación del conjunto de los números reales (R) al conjunto de los **números complejos (C)** se produce al "cruzar" (o mezclar) la unidad imaginaria i con los n^{os} reales, a través de las operaciones suma, resta, multiplicación y división. De esta manera obtendremos números de la forma:

5i, 3 – i, 2+3i etc.

Definición 2: Se llama **número complejo** en forma binómica a toda expresión de la forma: $z = a + bi$ siendo $a,b \in R$, donde a representa la parte real y b la parte imaginaria

$$C = \{a + bi \;/\; a, b \in R\}$$

Ejemplo: el nº complejo 2–5i tiene parte real 2 y parte imaginaria -5

Intuitivamente, **a+bi** sería equivalente a: **a·1 + b·i** y significaría que el nº contiene **a** unidades reales(unos) y **b** unidades imaginarias (íes), es decir, "mezcla" **a** partes reales con **b** partes imaginarias.

Observa, además, que se verifica lo siguiente:

a) Si $b = 0$ $a+0i = a$ es un nº real. Por eso $R \subset C$.
b) Si $a = 0$ $0+bi = bi$ es un nº imaginario puro.
c) Si $a = b = 0$ $0+0i = 0$ (nº complejo 0)

Ejemplo: El nº 3i (0+3i) es imaginario puro y el nº -2 (-2+0i) es real

Definición 3: Dos números complejos $z_1 = a+bi$ y $z_2 = c+di$ son iguales si tienen la misma parte real y la misma parte imaginaria, es decir, $a = c$ y $b = d$.

De la definición se deduce que no puede haber 2 n^{os} complejos distintos con la misma notación.

Definición 4: Dado el nº complejo $z = a+bi$, llamamos **opuesto** de z al nº:
$$-z = -a-bi.$$

Ejemplo: el opuesto de $z = 3-2i$ es $-z = -3+2i$

Definición 5: Dado el nº complejo $z = a+bi$, llamamos **conjugado** de z al nº:
$$\bar{z} = a-bi$$

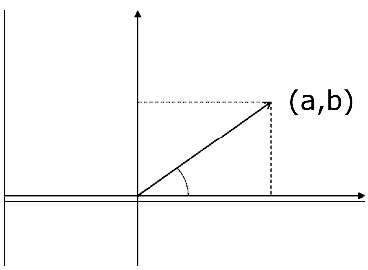
Ejemplo: el conjugado de $z = -3-2i$ es $\bar{z} = -3+2i$

Definición 6: Se llama **afijo** de $z = a+bi$ al par (a,b)

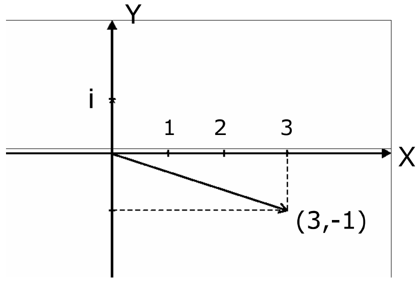
2. REPRESENTACIÓN GRÁFICA DE N^{os} COMPLEJOS

Cada nº complejo $z=a+bi$ se representa mediante su afijo en el plano complejo, de forma que el eje X será el eje real, donde se representa la parte real **a**, y el eje Y será el eje imaginario donde se representa la parte imaginaria **b**.

A cada nº $z = a+bi$ le corresponde un **vector** de posición (a,b) que será su representación gráfica, cuyo extremo coincide con su afijo.



Ejemplo: la representación del nº 3-i es:



Actividades

1.- Representa gráficamente los siguientes números complejos y di cuáles son reales, cuáles imaginarios y, de éstos, cuáles son imaginarios puros:

$$5 - 3i\ ,\quad \frac{1}{2}+\frac{5}{4}i\ ,\quad -5i\ ,\quad 7\ ,\quad \sqrt{3}\,i\ ,\quad 0\ ,\quad -1-i\ ,\quad 4i$$

2.- Obtén las soluciones de las siguientes ecuaciones y represéntalas

a) $x^2 + 6x + 10 = 0$ **b)** $3x^2 + 27 = 0$

3. OPERACIONES CON COMPLEJOS EN FORMA BINÓMICA

3.1 SUMA/RESTA

La suma de dos números complejos en forma binómica es otro complejo, cuyas partes real e imaginaria son la suma respectiva de las partes reales e imaginarias de cada uno, es decir,

$$(a+bi) + (c+di) = (a+c) + (b+d)i$$

Ejemplo:

$$(3-5i) + \left(\frac{1}{2}+i\right) = \frac{7}{2} - 4i$$

$$(3-5i) - \left(\frac{1}{2}+i\right) = \frac{5}{2} - 6i$$

3.2 PRODUCTO

$$(a+bi)\cdot(c+di) = a\cdot c + a\cdot di + bci + bd\cdot \underbrace{i^2}_{-1} = (ac - bd) + (ad + bc)\cdot i$$

Ejemplo: $(3-5i)\cdot(8+3i) = 24+9i - 40i - 15i^2 = 24 - 31i - 15\cdot(-1) = 39 - 31i$

3.3 COCIENTE

Siempre que multiplicas un nº complejo por su conjugado obtienes un nº real.

Demuéstralo haciendo $(a+bi)\cdot(a-bi)=$

Este resultado es útil para dividir complejo, puesto que multiplicando y dividiendo por el conjugado del denominador estaríamos haciendo algo equivalente a racionalizar.

Ejemplo:

$$\frac{3-5i}{2+i} = \frac{(3-5i)\cdot(2-i)}{(2+i)\cdot(2-i)} = \frac{6-3i-10i+5i^2}{4-i^2} = \frac{1-13i}{5} = \frac{1}{5} - \frac{13}{5}i$$

Actividad

3.- Efectúa las siguientes operaciones y simplifica el resultado:

a) $(6 - 5i) + (2 - i) - 2(-5 + 6i)$

b) $(3 + 2i)(4 - 2i)$

c) $\dfrac{1-4i}{3+i}$

d) $\dfrac{(-3i)^2(1-2i)}{2+2i}$

e) $(3 + 2i)(2 - i) - (1 - i)(2 - 3i)$

f) $-2i - (4 - i)5i$

g) $\dfrac{(3+3i)(4-2i)}{2-2i}$

h) $\dfrac{-2+3i}{(4+2i)(-1+i)}$

4. EXPRESIONES DE UN Nº COMPLEJO

Sabemos que la expresión **a+bi** se llama **forma binómica** del nº complejo. Si escribimos su afijo **(a,b)** estamos expresando el nº en forma **cartesiana.**

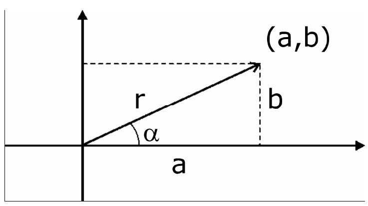
Ejemplo:	forma binómica	-3+4i
	forma cartesiana	(-3,4)

Ambas formas dependen de las coordenadas cartesianas del nº complejo.

Vamos a estudiar otras dos formas de expresión del nº complejo, más ventajosas por su rapidez operativa, que no dependen de las coordenadas cartesianas del nº sino de las **coordenadas polares**.

COORDENADAS POLARES

Cualquier punto de plano puede ser localizado a través de sus coordenadas cartesianas (a,b) o, lo que es lo mismo, a través de sus coordenadas polares (r,α) que definimos a continuación:



Definición 1: Llamamos **módulo** de z (**r**) al módulo de su vector de posición, es decir, por el teorema de Pitágoras,

$$\boxed{r = +\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Definición 2: Llamamos **argumento** de z (α) al ángulo que forma su vector de posición con el semieje positivo de abscisas (eje X).

Observamos que $\boxed{\operatorname{tg} \alpha = \frac{b}{a} \Rightarrow \alpha = \operatorname{arctg}\frac{b}{a}}$

IMPORTANTE

****** Es necesario determinar de antemano en qué cuadrante está z para elegir, de entre los dos posibles, el ángulo correspondiente a ese cuadrante******

Ejemplo: nº complejo 1-i .
coordenadas cartesianas (1,-1)
coordenadas polares ($\sqrt{2}$, 315º) ya que:

$$r = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2} \quad y \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{-1}{1} = -1 \Rightarrow \alpha = 135º \text{ ó } 315º$$

como (1,-1) está en el cuarto cuadrante, elegimos 315º.

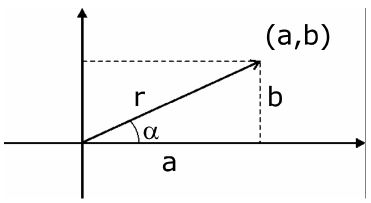
Definición 3: Se llama **forma polar** del nº complejo z, a la expresión $\mathbf{r}_\alpha$

Ejemplo: forma binómica 1 + i
forma cartesiana (1,1)
forma polar $(\sqrt{2})_{45º}$

Definición 4: Se llama **forma trigonométrica** del nº complejo z a la expresión:

$$\boxed{\mathbf{r(\cos\alpha + i\,sen\alpha)}}$$

Esta expresión se obtiene directamente de la binómica teniendo en cuenta lo siguiente:



$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{b}{r} \quad \Rightarrow \quad b = r \cdot \operatorname{sen}\alpha$$

$$\cos\alpha = \frac{a}{r} \quad \Rightarrow \quad a = r \cdot \cos\alpha$$

Como $z = a + bi = r\cos\alpha + r\operatorname{sen}\alpha \cdot i \underset{\substack{\uparrow \\ \text{sustituyendo}}}{=} r(\cos\alpha + i \operatorname{sen}\alpha)$

Ejemplo: Dado el nº complejo $z = (2, 2\sqrt{3})$ escríbelo en las 4 formas.

Forma cartesiana $(2, -2\sqrt{3})$
Forma binómica $2 - 2\sqrt{3}\,i$
Referidas a coordenadas cartesianas

Pasando a coordenadas polares: $r = \sqrt{2^2 + (-2\sqrt{3})^2} = \sqrt{4+12} = 4$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{-2\sqrt{3}}{2} = -\sqrt{3} \quad \Rightarrow \quad \alpha = 300^\circ$$

porque $\sqrt{3}$ es la tangente de 60º y α es del 4º cuadrante dadas sus coordenadas cartesianas. Por consiguiente:

Forma polar 4_{300°
Forma trigonométrica $4(\cos 300^\circ + i \operatorname{sen} 300^\circ)$
Referidas a coorden. polares

Actividades

4.- Escribe en forma polar los siguientes números complejos:
a) $1 + \sqrt{3}\,i$ **b)** $3i$ **c)** $-1 + \mathbf{i}$ **d)** -5

5.- Escribe en forma binómica los siguientes complejos:

a) 3_{240° **b)** 5_{180° **c)** 2_{135° **d)** 4_{90°

6.- Hallar los números reales x e y para que se cumpla: $\dfrac{x+2i}{3+yi} = \left(\sqrt{2}\right)_{315^\circ}$

Así, pasando de coordenadas cartesianas a polares o viceversa, conseguimos expresar un nº complejo en cualquiera de las 4 formas, a partir únicamente de una de ellas.

Descubrirás ahora que según el planteamiento de los problemas, sobre todo en el aspecto operativo, es mucho más ventajosa una forma que otra.

Piensa, por ejemplo, en calcular $(\sqrt{3}-i)^{10}$. ¡Si, si! tienes que multiplicar $(\sqrt{3}-i)$ 10 veces por sí mismo. No tiene gracia ¿verdad?

Observa cómo se multiplican números complejos en forma polar y trigonométrica.

5. OPERACIONES EN FORMA POLAR Y TRIGONOMÉTRICA

5.1 PRODUCTO EN FORMA POLAR

Dados dos números complejos en forma polar, r_α y R_β, se cumple que su producto es otro nº complejo en forma polar, de módulo el producto de los módulos, y de argumento la suma de los argumentos. Por tanto,

$$\boxed{r_\alpha \cdot R_\beta = (r\cdot R)_{\alpha+\beta}}$$

Demostración:

Utilizaremos como "intermediaria" la forma trigonométrica de ambos números, ya que, en su expresión, se utilizan las operaciones suma y producto, lo que no ocurre en la forma polar.

$$r_\alpha \cdot R_\beta = r(\cos\alpha + i\,\mathrm{sen}\,\alpha)\cdot R(\cos\beta + i\,\mathrm{sen}\,\beta) = r\cdot R(\cos\alpha + i\,\mathrm{sen}\,\alpha)\cdot(\cos\beta + i\,\mathrm{sen}\,\beta) =$$

$$= r\cdot R\,(\cos\alpha\cos\beta + i\cos\alpha\,\mathrm{sen}\,\beta + i\,\mathrm{sen}\,\alpha\cos\beta + \underbrace{i^2}_{-1}\mathrm{sen}\,\alpha\,\mathrm{sen}\,\beta =$$

$$= r\cdot R\,(\underbrace{\cos\alpha\cos\beta - \mathrm{sen}\,\alpha\,\mathrm{sen}\,\beta}_{\cos(\alpha+\beta)} + i\,(\underbrace{\mathrm{sen}\,\alpha\cos\beta + \cos\alpha\,\mathrm{sen}\,\beta}_{\mathrm{sen}(\alpha+\beta)})) =$$

$= r\cdot R\,(\cos(\alpha+\beta) + i\cdot\mathrm{sen}\,(\alpha+\beta)) = (r\cdot R)_{\alpha+\beta}$ pasando de nuevo a forma polar.

c.q.d.

Ejemplo:	$2_{30^\circ}\cdot 7_{65^\circ} = 14_{95^\circ}$

fácil, ¿eh?

Volvamos al ejemplo anterior.

¿Cómo calcularías ahora $(\sqrt{3}-i)^{10}$? Claro, pásalo a forma polar.

$$\left[\ r = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + (-1)^2} = 2 \qquad \mathrm{tg}\,\alpha = \frac{-1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \alpha = 330^\circ \text{ por ser } (\sqrt{3},-1) \text{ del 4º C.}\ \right]$$

Entonces, $(\sqrt{3}-i)^{10} = (2_{330^o})^{10} = (2^{10})_{330^o \cdot 10} = (2^{10})_{3300^o} = (2^{10})_{60^o}$

Razona esta igualdad

Ya has descubierto cómo realizar potencias de un nº complejo, pero vamos a escribirlo en general para una potencia cualquiera de un nº cualquiera.

5.2 POTENCIA EN FORMA POLAR

Dado el nº complejo r_α se cumple que:

$$\boxed{(r_\alpha)^n = (r^n)_{n\alpha}}$$

Esta fórmula recibe el nombre de **"fórmula de Moivre"**

Demostración: Sabemos que:

$$(r_\alpha)^n = \underbrace{r_\alpha \cdot r_\alpha \cdot \ldots \cdot r_\alpha}_{n \text{ veces}} = (r \cdot r \cdot \ldots \cdot r)_{\alpha+\alpha+\ldots+\alpha} = (r^n)_{n\cdot\alpha}$$

Ejemplo: $(2_{50^o})^6 = (2^6)_{6\cdot 50^o} = 64_{300^o}$

Por eso, cada vez que tengas que elevar un nº complejo a una potencia, te interesará escribirlo en forma polar, si es que no lo estaba previamente.

5.3 DIVISIÓN EN FORMA POLAR

Dados dos números complejos en forma polar, r_α y R_β, se cumple que su cociente es otro nº complejo en forma polar, de módulo el cociente de los módulos, y de argumento la resta de los argumentos. Por tanto,

$$\boxed{r_\alpha / R_\beta = (r/R)_{\alpha-\beta}}$$

Demostración:

Aprovecharemos el hecho de que dividir es, en realidad, multiplicar para utilizar lo que hemos aprendido.

Llamaremos r'_ϕ al nº resultante del cociente, es decir, $\dfrac{r_\alpha}{R_\beta} = r'_\phi$

Sería entonces cierto que $r_\alpha = R_\beta \cdot r'_\phi$ y, por tanto, $r_\alpha = (R\cdot r')_{\beta+\phi}$

Sabemos que dos números complejos son iguales si tienen el mismo módulo y el mismo argumento, luego necesariamente $r = R \cdot r'$ y $\alpha = \beta + \phi$

Esto nos permite despejar r' y ϕ que eran nuestras incógnitas:

$$r' = \frac{r}{R} \quad \text{y} \quad \phi = \alpha - \beta \qquad \textbf{c.q.d.}$$

Ejemplo:	$\dfrac{2_{120^o}}{5_{70^o}} = \left(\dfrac{2}{5}\right)_{50^o}$

Actividades

7.- Efectúa estas operaciones y da el resultado en forma polar y en forma binómica:

a) $1_{150^o} \cdot 5_{30^o}$ **b)** $5_{\frac{2\pi}{3}} : 1_{60^o}$ **c)** $(1 - \sqrt{3}\,i)^5$

8.- Dados los números complejos $z_1 = 5_{45^o}$, $z_2 = 2_{15^o}$ y $z_3 = 4i$, obtén en forma polar:

a) $z_1 \cdot z_3$ **b)** $\dfrac{z_1}{z_2^2}$ **c)** $\dfrac{z_1^3}{z_2 \cdot z_3^2}$

9.- Sabemos que $i^2 = -1$. Calcula i^3, i^4, i^5, i^6, i^{20}, i^{21}, i^{22}, i^{23}. Encuentra un criterio para calcular cualquier potencia de i de exponente natural.

10.- El producto de dos números complejos es $2i$ y el cubo de uno de ellos dividido entre el otro es $\frac{1}{2}$. Hállalos.

5.4 RAÍZ N-ÉSIMA DE UN Nº COMPLEJO EN FORMA POLAR

Dado el nº complejo r_α se cumple que:

$$\sqrt[n]{r_\alpha} = \left(\sqrt[n]{r}\right)_{\frac{\alpha + 2k\pi}{n}} \quad \text{donde } k = 0, 1, 2 \ldots, n-1$$

Demostración:

Sabemos que $\sqrt[n]{r_\alpha} = R_\beta$ si $(R_\beta)^n = r_\alpha$.

(Queremos hallar R y β)

Entonces $\left(R^n\right)_{n\beta} = r_\alpha \Rightarrow \begin{cases} R^n = r \\ n\beta = \alpha + 2k\pi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} R = \sqrt[n]{r} \\ \beta = \dfrac{\alpha + 2k\pi}{n} \end{cases}$

$n\beta$ y α pueden ser de 2 vueltas distintas, por ejemplo 30º y 390º a nada que n o β sean algo grandes. Como cada vuelta equivale a 2π, $k2\pi$ equivaldría a un nº cualquiera k de vueltas. Por eso, admitimos que $n\beta$ pueda ser igual a α más algún nº k de vueltas, que incluye la posibilidad k=0 por si son exactamente iguales.

Veamos ahora con un ejemplo, que k sólo toma valores comprendidos entre 0 y n-1

<u>Ejemplo</u>: $\sqrt[3]{-8} = \sqrt[3]{8_{180^o}} = \left(\sqrt[3]{8}\right)_{\frac{180^o+2k\pi}{3}} = 2_{\frac{180^o+2k\pi}{3}} = \begin{cases} 2_{60^o} & \text{si } k=0 \\ 2_{180^o} & \text{si } k=1 \\ 2_{300^o} & \text{si } k=2 \\ 2_{420^o} & \text{si } k=3 \end{cases}$

Observa que si aumentamos los valores de k sólo conseguimos repetir, en vueltas sucesivas de la circunferencia, las 3 raíces ya obtenidas.

Como desde 0 hasta n-1 hay n valores distintos, podemos deducir que existen n raíces n-ésimas de un nº complejo.

Ejemplo: $\sqrt[4]{1+\sqrt{3}i} = \sqrt[4]{2_{60^o}} = \left(\sqrt[4]{2}\right)_{\frac{60^o+2k\pi}{4}} = \begin{cases} \left(\sqrt[4]{2}\right)_{15^o} & \text{si } k=0 \\ \left(\sqrt[4]{2}\right)_{105^o} & \text{si } k=1 \\ \left(\sqrt[4]{2}\right)_{195^o} & \text{si } k=2 \\ \left(\sqrt[4]{2}\right)_{285^o} & \text{si } k=3 \end{cases}$

$r = \sqrt{1^2 + \left(\sqrt{3}\right)^2} = 2$

$\operatorname{tg} \alpha = \sqrt{3}/1 = \sqrt{3} \Rightarrow \alpha = 60^o$ (1 er cuadrante)

Quizá hayas observado que la diferencia entre los argumentos de las raíces es siempre la misma: 90º en el caso de las raíces cuartas de 2_{60^o}, y 120º en el caso de las raíces cúbicas de -8.

Si te fijas, 90º es la cuarta parte de 360º y 120º es la tercera parte. ¿Se podría deducir que los argumentos de las raíces n-ésimas de un nº complejo distarán $\dfrac{360^o}{n}$?

Si así fuera, bastaría con encontrar la 1ª raíz y sumar $\dfrac{360^o}{n}$ a los sucesivos argumentos.

Intenta averiguar si es cierto y justificar por qué.

Actividades

11.- Halla las raíces sextas de 1. Represéntalas y exprésalas en forma binómica.

12.- Calcula: **a)** $\sqrt[4]{-8+8\sqrt{3}\,i}$ **b)** $\sqrt{-25}$ **c)** $\sqrt[3]{\dfrac{-2+2i}{1+\sqrt{3}\,i}}$

13.- Resuelve en el conjunto de los números complejos (C), las ecuaciones:

a) $x^8 - 1 = 0$

b) $x^5 + 64x^2 = 0$

c) $x^3 - 2x^2 + 4x - 8 = 0$

14.- Dado el complejo $z = -2 + 2\sqrt{3}i$, calcular:

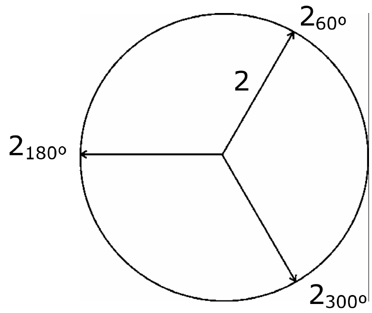
a. Su cuarta potencia.
b. Sus cuatro raíces cuartas.

REPRESENTACIÓN GRÁFICA

Las raíces de un nº complejo se pueden representar gráficamente en una circunferencia de radio igual al módulo de las raíces.

Ejemplo:

Las raíces cúbicas de -8 que hemos calculado anteriormente ($2_{60º}$, $2_{180º}$, $2_{300º}$) se representarían en una circunferencia de radio 2 de la siguiente forma:



Y, de la misma manera, las raíces cuartas de $1+\sqrt{3}\,\mathrm{i}$ se representarían en una circunferencia de radio $\sqrt[4]{2}$ como sigue: