

# Nota

## Números complejos

Nombre:.....

| Valor | Nota |
|-------|------|
| 15    |      |

1. Dados los siguientes números complejos:

$$z_1 = 2 - 3i; \quad z_2 = 4i; \quad z_3 = 3 + i$$

Calcular:

a)  $z_1 \cdot z_2 - z_3$ ;      b)  $\frac{z_1}{z_3}$ ;      c)  $(z_1)^2 + \overline{z_2} \cdot z_3$

a)  $z_1 \cdot z_2 - z_3 = (2 - 3i) \cdot 4i - (3 + i) = 8i + 12 - 3 - i = \boxed{9 + 7i}$

b)  $\frac{z_1}{z_3} = \frac{2 - 3i}{3 + i} = \frac{(2 - 3i) \cdot (3 - i)}{(3 + i) \cdot (3 - i)} = \frac{6 - 9i - 2i + 3i^2}{3^2 - i^2} = \frac{3 - 11i}{10} = \boxed{\frac{3}{10} - \frac{11}{10}i}$

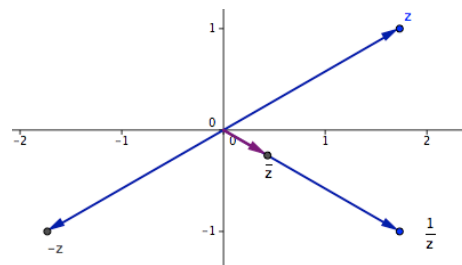
c)  $(z_1)^2 + \overline{z_2} \cdot z_3 = (2 - 3i)^2 + (-4i) \cdot (3 + i) = 4 + 9i^2 - 12i - 12i - 4i^2 = 4 - 9 - 24i + 4 = \boxed{-1 - 24i}$

| Valor | Nota |
|-------|------|
| 10    |      |

2. Dado el complejo  $\sqrt{3} + i$ , di cuáles son su opuesto, su conjugado y su inverso y haz su representación gráfica

Si  $z = \sqrt{3} + i$  entonces:

$$-z = -\sqrt{3} - i; \quad \overline{z} = \sqrt{3} - i; \quad \frac{1}{z} = \frac{1}{\sqrt{3} + i} = \frac{\sqrt{3} - i}{(\sqrt{3} + i) \cdot (\sqrt{3} - i)} = \boxed{\frac{\sqrt{3} - i}{4}}$$



| Valor | Nota |
|-------|------|
| 10    |      |

3. Encontrar todas las soluciones reales y complejas de las siguientes ecuaciones:

a)  $z^3 - 2z^2 + 2z = 0$ ;      b)  $i \cdot z^3 + 8 = 0$

a) Primero sacamos factor común  $z$ :

$$z(z^2 - 2z + 2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} z = 0 \\ z^2 - 2z + 2 = 0 \Rightarrow z = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 8}}{2} = \frac{2 \pm 2i}{2} = \begin{cases} z = 1 + i \\ z = 1 - i \end{cases} \end{cases}$$

b)  $iz^3 + 8 = 0 \Rightarrow iz^3 = -8 \Rightarrow z^3 = \frac{-8}{i} = \frac{-8i}{i^2} = 8i = 8_{90^\circ}$

Y ahora para hallar las soluciones sacamos las raíces cúbicas:

$$z = \sqrt[3]{8_{90^\circ}} = \sqrt[3]{8_{\frac{90^\circ}{3} + \frac{360^\circ k}{3}} \text{ (con } k=0,1,2)} = 2_{30^\circ + 120^\circ k \text{ (con } k=0,1,2)} = \begin{cases} z_1 = 2_{30^\circ} = 1 + \sqrt{3}i \\ z_2 = 2_{150^\circ} = -1 + \sqrt{3}i \\ z_3 = 2_{270^\circ} = -2i \end{cases}$$

| Valor | Nota |
|-------|------|
| 15    |      |

4. Expresar en forma polar y trigonométrica los siguientes números complejos: :

a)  $-3i$ ;      b)  $-1 + i$ ;      c)  $2\sqrt{3} - 2i$

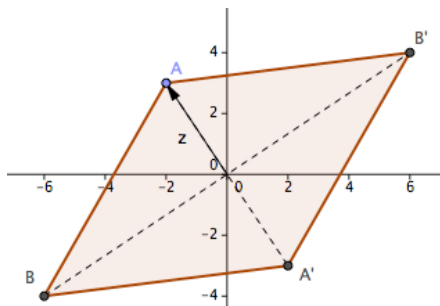
a)  $z_1 = -3i \Rightarrow \begin{cases} |z_1| = \sqrt{0^2 + (-3)^2} = 3 \\ \tan \alpha = \frac{-3}{0} \text{ (3º cuad)} \Rightarrow \alpha = 270^\circ \end{cases} \Rightarrow \boxed{z_1 = 3_{270^\circ} = 3 \cdot (\cos 270^\circ + i \cdot \sin 270^\circ)}$

b)  $z_2 = -1 + i \Rightarrow \begin{cases} |z_2| = \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{2} \\ \tan \alpha = \frac{1}{-1} \text{ (2º cuad)} \Rightarrow \alpha = 135^\circ \end{cases} \Rightarrow \boxed{z_2 = \sqrt{2}_{135^\circ} = \sqrt{2} \cdot (\cos 135^\circ + i \cdot \sin 135^\circ)}$

$$c) \ z_3 = 2\sqrt{3} - 2i \Rightarrow \begin{cases} |z_3| = \sqrt{(2\sqrt{3})^2 + (-2)^2} = 4 \\ \tan \alpha = \frac{-2}{-2\sqrt{3}} \text{ (4º cuad.)} \Rightarrow \alpha = 330^\circ \end{cases} \Rightarrow \boxed{z_3 = 4_{330^\circ} = 4 \cdot (\cos 330^\circ + i \cdot \sin 330^\circ)}$$

| Valor | Nota |
|-------|------|
| 10    |      |

5. Un rombo tiene su centro en el origen de coordenadas y su diagonal mayor de doble longitud que su diagonal menor. Uno de los vértices de la diagonal menor es el punto correspondiente al número complejo  $-2 + 3i$ . Averigua los afijos correspondientes al resto de los vértices del rombo



El vértice B, se obtiene a partir de  $z_1$ , el afijo del vértice A, multiplicándolo por un complejo de módulo 2 y argumento  $90^\circ$ , es decir  $2_{90^\circ} = 2i$ :  $(-2 + 3i) \cdot 2i = -4i + 6i^2 = -4i - 6 \Rightarrow B(-6, -4)$   
 $A'$  y  $B'$  son los afijos de los opuestos de los otros dos vértices.

Luego son:  $A'(2, -3)$  y  $B'(6, 4)$ .

| Valor | Nota |
|-------|------|
| 10    |      |

6. Hallar  $a$  y  $b$  para que se cumpla la siguiente igualdad:

$$\frac{a + 19i}{-5 + bi} = 3 - 2i$$

$$\frac{a + 19i}{-5 + bi} = 3 - 2i \Rightarrow a + 19i = (3 - 2i)(-5 + bi) = -15 + 3bi + 10i - 2bi^2 = (-15 + 2b) + (3b + 10)i \Rightarrow \begin{cases} -15 + 2b = a \\ 3b + 10 = 19 \end{cases}$$

Resolviendo el sistema queda que:  $\boxed{a = -9}$  y  $\boxed{b = 3}$ .

| Valor | Nota |
|-------|------|
| 10    |      |

7. Calcular todas las raíces dando los resultados en forma binómica:

$$\sqrt[4]{-1 - \sqrt{3}i}$$

Hallamos el módulo y argumento del radicando:  $\begin{cases} |z| = \sqrt{(-1)^2 + (\sqrt{3})^2} = 2 \\ \tan \alpha = \frac{-\sqrt{3}}{-1} = \sqrt{3} \text{ (3º cuad.)} \Rightarrow \alpha = 240^\circ \end{cases}$  . Por tanto:

$$\sqrt[4]{-1 - \sqrt{3}i} = \sqrt[4]{2_{240^\circ}} = \sqrt[4]{2_{\frac{240^\circ}{4} + \frac{360^\circ k}{4}} \text{ (con } k=0,1,2 \text{ y } 3)} = \sqrt[4]{2_{60^\circ + 90^\circ k \text{ (con } k=0,1,2 \text{ y } 3)}} = \begin{cases} z_1 = \sqrt[4]{2_{60^\circ}} = \sqrt[4]{2} \cdot \left( \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \right) \\ z_2 = \sqrt[4]{2_{150^\circ}} = \sqrt[4]{2} \cdot \left( -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) \\ z_3 = \sqrt[4]{2_{240^\circ}} = \sqrt[4]{2} \cdot \left( -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i \right) \\ z_4 = \sqrt[4]{2_{330^\circ}} = \sqrt[4]{2} \cdot \left( \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) \end{cases}$$

| Valor | Nota |
|-------|------|
| 10    |      |

8. Dado el número complejo  $z = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$

a) Calcula  $z^5$  haciendo todo el cálculo en forma binómica.

b) Calcula  $z^{20}$  haciendo el cálculo en forma polar.

a) Aplicando el binomio de Newton:

$$\begin{aligned} \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i \right)^5 &= \binom{5}{0} \left( \frac{1}{2} \right)^5 + \binom{5}{1} \left( \frac{1}{2} \right)^4 \left( -\frac{1}{2}i \right) + \binom{5}{2} \left( \frac{1}{2} \right)^3 \left( -\frac{1}{2}i \right)^2 + \binom{5}{3} \left( \frac{1}{2} \right)^2 \left( -\frac{1}{2}i \right)^3 + \binom{5}{4} \left( \frac{1}{2} \right)^1 \left( -\frac{1}{2}i \right)^4 + \binom{5}{5} \left( -\frac{1}{2}i \right)^5 = \\ &= \left( \frac{1}{2} \right)^5 - 5 \left( \frac{1}{2} \right)^5 i + 10 \left( \frac{1}{2} \right)^5 + 10 \left( \frac{1}{2} \right)^5 i + 5 \left( \frac{1}{2} \right)^5 - \left( \frac{1}{2} \right)^5 i = \left( \frac{1}{2} \right)^5 (1 - 5i - 10 + 10i + 5 - i) = \left( \frac{1}{2} \right)^5 (-4 + 4i) = \boxed{-\frac{1}{8} + \frac{1}{8}i} \end{aligned}$$

b) Calculamos el módulo y argumento de  $z$ : 
$$\begin{cases} |z| = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{1}{2}} \\ \tan \alpha = \frac{-1/2}{1/2} = -1 \text{ (4º cuad)} \Rightarrow \alpha = 315^\circ \end{cases}, \text{ luego:}$$

$$z^{20} = \left( \sqrt{\frac{1}{2}} \right)_{315^\circ}^{20} = \left( \sqrt{\frac{1}{2}} \right)_{315^\circ \cdot 20}^{20} = \left( \frac{1}{2^{10}} \right)_{6300^\circ} = \left( \frac{1}{1024} \right)_{180^\circ + 17 \cdot 360^\circ} = \left( \frac{1}{1024} \right)_{180^\circ} = \boxed{-\frac{1}{1024}}$$

| Valor | Nota |
|-------|------|
| 10    |      |

9. El producto de dos números complejos es  $2i$  y el cubo de uno de ellos dividido por el otro es  $1/2$ . Hállalos

Llamaremos  $z$  y  $w$  a los dos números complejos que buscamos. Deben cumplir que: 
$$\begin{cases} z \cdot w = 2i \\ \frac{z^3}{w} = \frac{1}{2} \end{cases}.$$

Despejamos  $w$  en la segunda ecuación:  $w = 2z^3$  y sustituimos en la primera que queda:

$$z \cdot 2z^3 = 2i \Rightarrow z^4 = i \Rightarrow z = \sqrt[4]{i} = \sqrt[4]{1_{90^\circ}} = 1_{\frac{90^\circ + 360^\circ k}{4} \text{ (con } k=0,1,2 \text{ y } 3)} = 1_{22,5^\circ + 90^\circ k \text{ (con } k=0,1,2 \text{ y } 3)}$$

Salen cuatro soluciones para  $z$  y otras cuatro par  $w$  que son, respectivamente:

$$\begin{aligned} z_1 = 1_{22,5^\circ} &\Rightarrow w_1 = 2 \cdot \left( 1_{22,5^\circ} \right)^3 = 2_{67,5^\circ} \\ z_2 = 1_{112,5^\circ} &\Rightarrow w_2 = 2 \cdot \left( 1_{112,5^\circ} \right)^3 = 2_{337,5^\circ} \\ z_3 = 1_{202,5^\circ} &\Rightarrow w_3 = 2 \cdot \left( 1_{202,5^\circ} \right)^3 = 2_{247,5^\circ} \\ z_4 = 1_{292,5^\circ} &\Rightarrow w_4 = 2 \cdot \left( 1_{292,5^\circ} \right)^3 = 2_{157,5^\circ} \end{aligned}$$