

NÚMEROS COMPLEJOS

EJERCICIOS RESUELTOS

I) Efectúa la siguiente operación y simplifica: $\frac{(1+3i)(1+2i)}{1+i}$

Solución

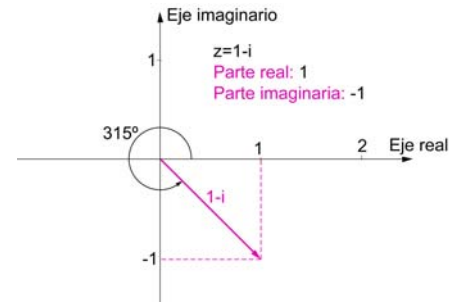
$$\frac{(1+3i)(1+2i)}{1+i} = \frac{1+2i+3i+6i^2}{1+i} = \frac{-5+5i}{1+i} = \left(\frac{-5+5i}{1+i}\right) \cdot \left(\frac{1-i}{1-i}\right) =$$

$$= \frac{-5+5i+5i-5i^2}{2} = \frac{10i}{2} = 5i$$

II) Calcula: $\sqrt[3]{1-i}$

Solución

$$\sqrt[3]{1-i} \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} r = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2} \\ \alpha = \operatorname{arctg} \frac{-1}{1} = \operatorname{arctg}(-1) = 315^\circ \end{array} \right\} \rightarrow \sqrt[3]{(\sqrt{2})}_{315^\circ}$$



$$\sqrt[3]{(\sqrt{2})}_{315^\circ} \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} R = \sqrt[3]{\sqrt{2}} = \sqrt[6]{2} \\ \beta = \begin{cases} \beta_1 = \frac{315^\circ + 360^\circ \cdot 0}{3} = 105^\circ \\ \beta_2 = \frac{315^\circ + 360^\circ \cdot 1}{3} = 225^\circ \\ \beta_3 = \frac{315^\circ + 360^\circ \cdot 2}{3} = 345^\circ \end{cases} \end{array} \right\} \rightarrow \sqrt[3]{1-i} = \begin{cases} z_1 = (\sqrt[6]{2})_{105^\circ} \\ z_2 = (\sqrt[6]{2})_{225^\circ} \\ z_3 = (\sqrt[6]{2})_{345^\circ} \end{cases}$$

EJERCICIOS PROPUESTOS

III) Escribe en forma polar:

a) $1 + \sqrt{3}i$

d) $-1 - \sqrt{3}i$

g) $2i$

b) $-1 + \sqrt{3}i$

e) $3\sqrt{3} + 3i$

h) -4

c) $1 - \sqrt{3}i$

f) $-3\sqrt{3} - 3i$

i) $-3i$

- a) 2_{60°
b) $1_{\frac{3\pi}{2}}$
c) 5_{450°
- d) 2_{180°
e) 4_{750°
f) $6_{\frac{\pi}{3}}$

V) Hallar el módulo y el argumento de: a) $\frac{1+i}{1-i}$ b) $(1+i)2i$

VI) Efectúa las siguientes operaciones y simplifica:

$$\text{a) } 2i \left(\frac{-i + 2}{1 + i} \right) \quad \text{b) } (-2i)^2 \cdot \frac{1 + 3i}{4 + 4i}$$

VII) Efectúa las siguientes operaciones y simplifica:

a) $(3 + i)(2 + i) - (1 - i)(2 - 2i)$ b) $(3 - 2i) + (1 + 2i)(6 - 2i) - (2 - i)$

VIII) Efectúa las siguientes operaciones y simplifica:

a) $\frac{3_{45^\circ} 2_{15^\circ}}{6_{30^\circ}}$ b) $\frac{2_{30^\circ} 3_{60^\circ}}{3_{120^\circ} 1_{300^\circ}}$ c) $\frac{2_{45^\circ} 2_{15^\circ}}{4_{90^\circ}}$

IX) Halla: $\frac{i^{32} \cdot i^{17}}{i^2 \cdot i^3}$

X) Halla las siguientes potencias: a) $(2-3i)^3$; b) $(3+i)^2$; c) i^{23} ; d) $(2+2i)^4$; e) i^{27} ; f) i^{48} ; g) i^7 ; h) i^{33} ; i) i^{210} ; j) i^{1121}

XI) Sabiendo que $z_1=3-2i$, que $z_2=4-3i$ y que $z_3=-3i$; calcula: a) $z_1 + 2z_2 - z_3$;

b) $z_1 \cdot (z_2 + z_3)$; c) $2(z_1 + z_2) - (z_3)^4$

XII) Calcula, expresando el resultado en forma polar: a) $(1 + i)^6$; b) $\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right)^8$;

c) $(1 - i)^4$

XIII) Calcula: a) $\sqrt{-i}$; b) $\sqrt[3]{1+i}$; c) $\sqrt{-16}$

XIV) Calcula: a) $\sqrt[3]{\frac{1-i}{1-\sqrt{3}i}}$; b) $\sqrt{-4}$; c) $\sqrt[3]{\frac{1+i}{1-i}}$; d) $\sqrt[3]{\frac{-27}{i}}$

XV) a) Opera la expresión $(1 + 3i)^2 \cdot (3 - 4i)$ y b) calcula las raíces cúbicas del resultado.

XVI) Opera la expresión $\frac{(i^4 - i^3)}{8i}$ y calcula las raíces cúbicas del resultado.

XVII) Si la raíz cúbica de un número es $2i$, calcula las otras dos raíces y ese número.

XVIII) Calcular: $(-2 + 2i)^{64}$.

XIX) Calcular el conjugado del opuesto de: a) $(1 - 2i)^3$; b) $\frac{25}{3 + 4i}$; c) $\left(\frac{2 + i}{1 - 2i}\right)^2$

XX) Determina x para que el producto $(3+2i) \cdot (6+xi)$ sea:

- a) un número real,
- b) un número imaginario puro.

XXI) Determina los números reales x e y para que se cumpla: $\frac{x + 2i}{1 - i} + yi = 1$

XXII) Determina a para que el complejo $\frac{4 + ai}{1 - i}$ sea:

- a) un número real,
- b) un número imaginario puro.

XXIII) Resuelve las ecuaciones siguientes en el campo complejo. En todos los casos z es un número complejo: despéjalo y calcula su valor.

a) $(2 - 2i) \cdot z = 10 - 2i$

b) $\frac{z}{3 + i} = 2 - i$

c) $\frac{z}{3 + 4i} + \frac{2z + 5i}{1 - 2i} = 2 + 2i$

d) $\frac{z}{-z} + \frac{2z - 2i}{1 - i} = 3 - 2i$

XXIV) El cociente de dos números complejos es $1/2$ y el dividendo es el cuadrado del divisor. Calcula sus módulos y sus argumentos.

XXV) El producto de dos números complejos es -27. Hallarlos sabiendo que uno de ellos es el cuadrado del otro.

XXVI) El producto de dos números complejos es -2 y el cubo de uno de ellos dividido por el otro es $1/2$. Calcula sus módulos y sus argumentos.

SOLUCIONES A LOS EJERCICIOS PROPUESTOS

III)

- | | | |
|--------------------|---------------------------|--------------------|
| a) 2_{60° | d) 2_{240° | g) 2_{90° |
| b) 2_{120° | e) $\sqrt{6}_{30^\circ}$ | h) 4_{180° |
| c) 2_{300° | f) $\sqrt{6}_{210^\circ}$ | i) 3_{270° |

IV)

- | | |
|--------------------|---------------------|
| a) $1 + \sqrt{3}i$ | d) -2 |
| b) $-i$ | e) $2\sqrt{3} + 2i$ |
| c) $5i$ | f) $3 + 3\sqrt{3}i$ |

V) a) 1_{90° b) $\sqrt{8}_{135^\circ}$

VI) a) $3 + i$ b) $-2 - i$

VII) a) $5 + 9i$ b) $11 + 9i$

VIII) a) 1_{30° b) 2_{30° c) 1_{330°

IX) 1

X) a) $-46-9i$; b) $8+6i$; c) $-i$; d) -64 ; e) $-i$; f) 1; g) $-i$; h) i ; i) -1 ; j) i

XI) a) $11-5i$; b) $-26i$; c) $-67-10i$

XII) a) 8_{270° ; b) 1_{240° ; c) 4_{180°

XIII) a) $1_{135^\circ}; 1_{315^\circ}$; b) $(\sqrt[6]{2})_{15^\circ}; (\sqrt[6]{2})_{135^\circ}; (\sqrt[6]{2})_{255^\circ}$; c) $4_{90^\circ}; 4_{270^\circ}$

XIV) a) $\left(\frac{1}{\sqrt[6]{2}}\right)_{5^\circ}; \left(\frac{1}{\sqrt[6]{2}}\right)_{125^\circ}; \left(\frac{1}{\sqrt[6]{2}}\right)_{245^\circ}$; b) $2_{90^\circ}; 2_{270^\circ}$; c) $1_{30^\circ}; 1_{150^\circ}; 1_{270^\circ}$; d) $3_{30^\circ}; 3_{150^\circ}; 3_{270^\circ}$

XV) a) $50i$ b) $(\sqrt[3]{50})_{30^\circ}; (\sqrt[3]{50})_{150^\circ}; (\sqrt[3]{50})_{270^\circ}$

XVI) $\left(\frac{1}{2}\right)_{105^\circ}; \left(\frac{1}{2}\right)_{225^\circ}; \left(\frac{1}{2}\right)_{345^\circ}$

XVII) $2_{210^\circ}; 2_{330^\circ}$. El número es $-8i = 8_{270^\circ}$

XVIII) $(8^{32})_{8640^\circ} = (8^{32})$

XIX) a) $11 + 2i$; b) $-3-4i$ c) 1

XX) a) $x = -4$, b) $x = 9$

XXI) a) $x = 4$, $y = 3$

XXII) a) $a = -4$, b) $x = 4$

XXIII) a) $3+2i$ b) $7-i$ c) $4-3i$ d) $1-2i$

XXIV) $\left(\frac{1}{2}\right)_{0^\circ}; \left(\frac{1}{4}\right)_{0^\circ}$

XXV) $3_{60^\circ}, 9_{120^\circ}$

XXVI) $1_{45^\circ}, 2_{135^\circ}$. Otras soluciones: $1_{135^\circ}, 2_{45^\circ}, 1_{225^\circ}, 2_{315^\circ}, 1_{315^\circ}, 2_{225^\circ}$