1. Halla la recta s perpendicular a la recta $r \equiv x-2y+4=0$, y que además pasa por el punto $P(1,\ 2)$. ¿En qué punto se cortan ambas rectas (pie de la perpendicular)? **(2 puntos)**

2. Dadas las rectas $r \equiv 2x-5y-17=0$ y $s \equiv 3x-ky-8=0$, calcula el valor de k para que r y s se corten formando un ángulo de 60°. **(2 puntos)**

3. Resuelve la siguiente ecuación logarítmica: $\log(x^2+1)-\log(x^2-1)=\log\frac{13}{12}$ **(1 punto)**

4. Calcula los siguientes límites **(1 punto; 0,5 puntos por apartado)**:

   a) $\lim_{x\to -2} \frac{x^3+5x^2+2x-8}{2x^3-4x^2-10x+12}$; **b)** $\lim_{x\to +\infty} \frac{2x^4+3x^5-2x^6+1}{3x^2-5x^5-5x^4-2x^2+2}$

5. Estudia la continuidad de la función $f(x)=\begin{cases} 3x+4 & \text{si } x<-1 \\ x & \text{si } -1\le x<2 \\ 5 & \text{si } x=2 \\ \frac{8}{x}-2 & \text{si } x>2 \end{cases}$ en los puntos $x=-1$ y $x=2$.

   Caso de que no sea continua en alguno de ellos explica el tipo de discontinuidad. **(1 punto)**

6. Dada la función $f(x)=\frac{x^2+x-2}{x^2-x-2}$, contesta a los siguientes apartados:

   a) Halla los puntos de corte con los ejes. **(0,5 puntos)**
   b) Halla las asíntotas verticales y horizontales. **(1 punto)**
   c) Realiza una representación gráfica aproximada de la función. **(0,5 puntos)**

7. Calcula la derivada de la función $f(x)=\frac{3x^2-6x-3}{x-3}$ en el punto $x=2$, así como la recta tangente a la gráfica de la función en dicho punto. **(1 punto)**

① Vector director de r: $\vec{u} = (2, 1)$; vector perpendicular a $\vec{u}$: $\vec{v} = (-1, 2)$. Recta s: $s \equiv \frac{x-1}{-1} = \frac{y+2}{2} \Rightarrow 2x - 2 = -y - 2$

$\Rightarrow \underline{\underline{2x + y = 0}}$

Punto de corte: $\left.\begin{array}{l} x - 2y + 4 = 0 \\ 2x + y = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x - 2y + 4 = 0 \\ 4x + 2y = 0 \end{array}\right\}$

$5x + 4 = 0 \Rightarrow \underline{\underline{x = \frac{-4}{5}}}$

$2 \cdot \left(\frac{-4}{5}\right) + y = 0 \Rightarrow \underline{\underline{y = \frac{8}{5}}}$

por tanto el punto de corte de r y s es: $\underline{\left(\frac{-4}{5}, \frac{8}{5}\right)}$

② Pendiente de r: $5y = 2x - 17 \Rightarrow y = \frac{2}{5}x - \frac{17}{5} \Rightarrow m_1 = \frac{2}{5}$

Pendiente de s: $ky = 3x - 8 \Rightarrow y = \frac{3}{k}x - \frac{8}{k} \Rightarrow m_2 = \frac{3}{k}$

$$\operatorname{tg} 60^\circ = \left| \frac{\frac{3}{k} - \frac{2}{5}}{1 + \frac{3}{k}\frac{2}{5}} \right| \Rightarrow \sqrt{3} = \left| \frac{\frac{15-2k}{5k}}{\frac{5k+6}{5k}} \right| \Rightarrow \sqrt{3} = \left| \frac{15-2k}{5k+6} \right| \Rightarrow$$

$* \ \frac{15-2k}{5k+6} = \sqrt{3} \Rightarrow 15 - 2k = 5\sqrt{3}k + 6\sqrt{3} \Rightarrow (5\sqrt{3} + 2)k = 15 - 6\sqrt{3}$

$\Rightarrow \boxed{k = \frac{15 - 6\sqrt{3}}{2 + 5\sqrt{3}}}$; $* \ \frac{15-2k}{5k+6} = -\sqrt{3} \Rightarrow 15 - 2k = -5\sqrt{3}k - 6\sqrt{3}$

$\Rightarrow (5\sqrt{3} - 2)k = -6\sqrt{3} - 15 \Rightarrow \boxed{k = \frac{-6\sqrt{3} - 15}{5\sqrt{3} - 2} = \frac{15 + 6\sqrt{3}}{2 - 5\sqrt{3}}}$

③ $\log(x^2+1) - \log(x^2-1) = \log\frac{13}{12} \Rightarrow \log\frac{x^2+1}{x^2-1} = \log\frac{13}{12} \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{x^2+1}{x^2-1} = \frac{13}{12} \Rightarrow 12x^2 + 12 = 13x^2 - 13 \Rightarrow -x^2 = -25 \Rightarrow$

$\Rightarrow x^2 = 25 \Rightarrow \underline{\underline{x = \pm 5}}$

④ a) $\lim\limits_{x \to -2} \frac{x^3 + 5x^2 + 2x - 8}{2x^3 - 4x^2 - 10x + 12} = \lim\limits_{x \to -2} \frac{(x+2)(x^2 + 3x - 4)}{(x+2)(2x^2 - 8x + 6)} =$

$= \lim\limits_{x \to -2} \frac{x^2 + 3x - 4}{2x^2 - 8x + 6} = \frac{-6}{30} = \underline{\underline{-\frac{1}{5}}}$

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{2x^4 + 3x^5 - 2x^6 + 1}{3x^2 - 5x^5 - 5x^4 - 2x^2 + 2} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = +\infty$

(porque grado del numerador es mayor que grado del denominador y para el signo se tiene en cuenta el signo de los monomios de mayor grado).

(5) $\lim_{x\to -1^-} f(x) = \lim_{x\to -1^-} (3x+4) = 1$
$\lim_{x\to -1^+} f(x) = \lim_{x\to -1^+} x = -1$
$\Rightarrow \nexists \lim_{x\to -1} f(x)$. DISCONTINUIDAD DE SALTO FINITO. Longitud del salto: $L = |1-(-1)| = 2$

$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-} x = 2$
$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+} \left(\frac{8}{x} - 2\right) = 2$
$\Rightarrow \lim_{x\to 2} f(x) = 2 \neq 5 = f(2)$

DISCONTINUIDAD EVITABLE

(6) a) Eje X: $y=0 \Rightarrow x^2+x-2=0 \Rightarrow (1,0)$, $(-2,0)$

Eje Y: $x=0 \Rightarrow x=1 \Rightarrow (0,1)$

b) Verticales $x^2-x-2=0$; $x_1=2$; $x_2=-1$

* $\lim_{x\to 2} \frac{x^2+x-2}{x^2-x-2} = \frac{4}{0} = \begin{cases} -\infty & \text{si } x\to 2^- \\ +\infty & \text{si } x\to 2^+ \end{cases}$

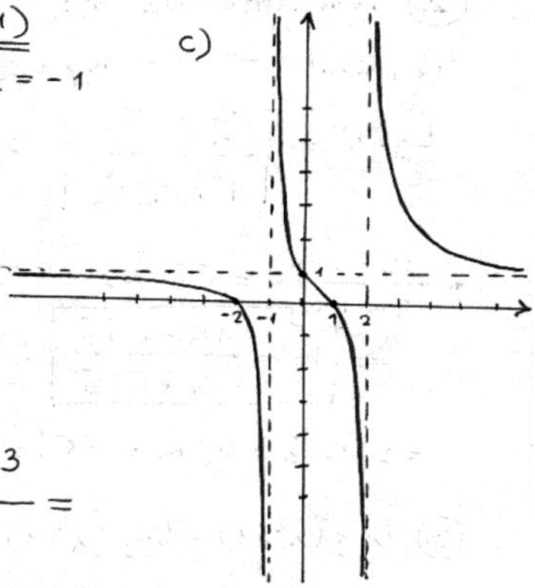
* $x=2$ es A.V.

* $\lim_{x\to -1} \frac{x^2+x-2}{x^2-x-2} = \frac{-2}{0} = \begin{cases} -\infty & \text{si } x\to -1^- \\ +\infty & \text{si } x\to 1^+ \end{cases}$

* $x=-1$ es A.V.

c) $\lim_{x\to\infty} \frac{x^2+x-2}{x^2-x-2} = 1 \Rightarrow y=1$ es A.H.

c)



(7) $\lim_{x\to 2} \frac{f(x)-f(2)}{x-2} = \lim_{x\to 2} \frac{\frac{3x^2-6x-3}{x-3} - 3}{x-2} =$

$= \lim_{x\to 2} \frac{\frac{3x^2-9x+6}{x-3}}{x-2} = \lim_{x\to 2} \frac{3x^2-9x+6}{(x-2)(x-3)} = \left[\frac{0}{0}\right] =$

$= \lim_{x\to 2} \frac{(x-2)(3x-3)}{(x-2)(x-3)} = \lim_{x\to 2} \frac{3x-3}{x-3} = \frac{3}{-1} = -3 \Rightarrow f'(2) = -3$

Recta tangente:

$y - f(2) = f'(2)(x-2) \Rightarrow y - 3 = -3(x-2) \Rightarrow$

$\Rightarrow y - 3 = -3x + 6 \Rightarrow y = -3x + 9$