

# **FUNCIONES**

---

## **A. Introducción teórica**

- A.1. Definición de función
- A.2. Dominio y recorrido de una función,  $f(x)$
- A.3. Crecimiento y decrecimiento de una función en un intervalo
- A.4. Funciones polinómicas
- A.5. Otros tipos de funciones
- A.6. Composición de funciones
- A.7. Función inversa:

## **B. Ejercicios resueltos**

- B.1. Estudia el dominio de cada una de las siguientes funciones:
- B.2. Halla la inversa de cada una de las siguientes funciones
- B.3. Halla la variación y la tasa de variación media de cada una de las siguientes funciones
- B.4. Estudia la simetría de cada una de las siguientes funciones
- B.5. Representa cada una de las siguientes funciones

## **A. Introducción teórica**

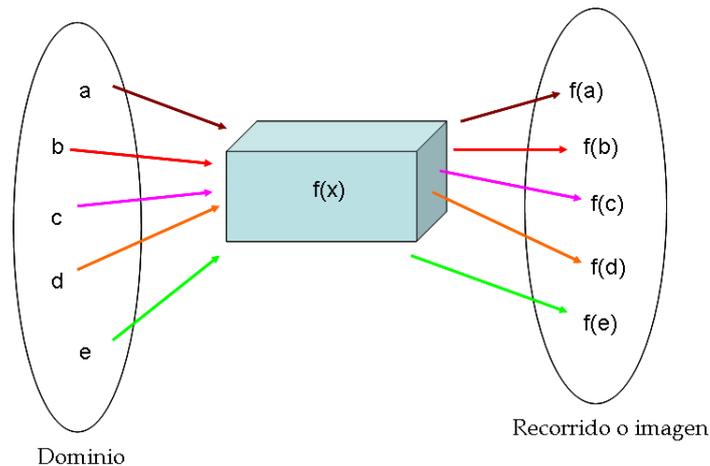
### **A.1. Definición de función**

Una función es una relación entre dos variables numéricas,  $x$  e  $y$ , de forma que a cada valor de  $x$  le corresponde un solo valor de  $y$ . La variable  $x$  se llama variable independiente. La variable  $y$  se llama variable dependiente

### **A.2. Dominio y recorrido de una función, $f(x)$**

Se llama dominio de una función  $f(x)$  a todos los valores de  $x$  para los que  $f(x)$  existe. El dominio se denota como  $\text{Dom}(f)$

Se llama recorrido o imagen de una función  $f(x)$  a todos los valores que puede tomar  $f(x)$ . La imagen se denota como  $\text{Im}(f)$



### A.3. Crecimiento y decrecimiento de una función en un intervalo

Una función  $f(x)$  es creciente en un intervalo  $(a,b)$  cuando para dos puntos cualquiera  $x_1$  y  $x_2$  pertenecientes a  $(a,b)$  tales que  $x_1 < x_2$  se cumple:

$$f(x_1) < f(x_2)$$

Una función  $f(x)$  es decreciente en un intervalo  $(a,b)$  cuando para dos puntos cualquiera  $x_1$  y  $x_2$  pertenecientes a  $(a,b)$  tales que  $x_1 < x_2$  se cumple:

$$f(x_1) > f(x_2)$$

### A.4. Funciones polinómicas

a) Función polinómica de grado uno: es de la forma  $y=ax+b$

Para representarlas se siguen los siguiente pasos:

- Hacemos una tabla de valores.
- A partir de ella extraemos dos puntos.
- Representamos los puntos en un plano cartesiano.

b) Función polinómica de grado dos: es de la forma  $y= ax^2+bx+c$

Para representarlas se siguen los siguiente pasos:

- Obtención de los puntos de corte con el eje  $x$ :  
Se obtienen a partir de la condición  $y=0$ . En ese caso:

$$ax^2 + bx + c = 0 \Rightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \Rightarrow \begin{cases} x = x_1 \\ x = x_2 \end{cases}$$

- Obtención de las coordenadas del vértice:

$$\text{Están dadas por } x = -\frac{b}{2a}; y = \frac{-b^2 + 4ac}{4a}.$$

- Orientación de la parábola:  
Si  $a > 0$ , entonces la parábola es cóncava hacia arriba, mientras que si  $a < 0$  la parábola es cóncava hacia abajo.
- Obtención del punto de corte con el eje y:  
Está dado por la condición  $x=0$ . En ese caso,  
 $y = ax^2 + bx + c \Rightarrow y = c$

#### A.5. Otros tipos de funciones

- Funciones exponenciales: son de la forma  $y = a^x$ .
- Funciones de proporcionalidad inversa: son de la forma  $y = \frac{a}{x+b}$
- Funciones radicales:  $y = a\sqrt{\pm x + b}$
- Funciones logarítmicas:  $y = \log_a x$ , con  $a > 0$

#### A.6. Composición de funciones

Sean dos funciones  $f(x)$  y  $g(x)$ . La composición de  $f$  con  $g$  se define como  
 $(f \circ g)(x) = f[g(x)]$

#### A.7. Función inversa:

Sea la función  $f(x)$ . La inversa de  $f(x)$  se define como  $f^{-1}(x)$ . Para hallar la inversa hay que dar una serie de pasos:

- Estudiamos si  $f$  es inyectiva, es decir si la función  $f$  toma valores distintos para puntos distintos:

$$f(x_1) = f(x_2) \Leftrightarrow x_1 = x_2$$

- b) En la ecuación  $y = f(x)$  despejamos la variable  $x$ .
- c) Finalmente intercambiamos la variable  $x$  por la  $y$  para obtener  $f^{-1}(x)$ .

## B. Ejercicios resueltos

### B.1. Estudia el dominio de cada una de las siguientes funciones:

1.  $f(x) = \frac{1}{x+2}$

Solución:

El  $\text{Dom}(f)$  está dado por el conjunto de los valores de  $x$  para los que  $f(x)$  existe. Esta función no tiene sentido cuando el denominador es cero. Dicho de otro modo, la función existe para todos los valores de  $x$  para los que el denominador es distinto de cero. En notación matemática:

$\text{Dom}(f) = \forall x \in \mathbb{R} / x + 2 \neq 0 \Rightarrow \text{Dom}(f) = \forall x \in \mathbb{R} / x \neq -2$ , en donde el símbolo “/” significa “tal que”

2.  $f(x) = \sqrt{x^2 - 4}$

Solución:

El  $\text{Dom}(f)$  está dado por el conjunto de los valores de  $x$  para los que  $f(x)$  existe. Esta función existe para los valores de  $x$  que hacen que el radicando sea mayor o igual que cero. En notación matemática:

$\text{Dom}(f) = \forall x \in \mathbb{R} / x^2 - 4 \geq 0$ , en donde el símbolo “/” significa “tal que”.

Tenemos que resolver la inecuación  $x^2 - 4 \geq 0$ .

- Resolvemos la ecuación correspondiente:

$$x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x = \pm 2$$

- Llevamos las raíces sobre la recta de los números reales:



- Ahora estudiamos el comportamiento de  $x^2 - 4 \geq 0$  en las tres zonas que determinan las dos raíces:

Zona 1:

Tomamos un  $x$  cualquiera de  $\mathbb{R}$  comprendido entre  $-\infty$  y  $-2$ , incluido éste, o lo que es lo mismo en notación matemática: elegimos un  $x \in (-\infty, 2]$ .

Así, para  $x=-3$  tenemos que  $x^2 - 4 \geq 0 \Rightarrow (-3)^2 - 4 \geq 0 \Rightarrow 5 \geq 0$ , lo cual es cierto. Entonces en este intervalo tenemos una solución.

Zona 2:

Tomamos un  $x \in (-2, 2)$ , por ejemplo el cero. Así, para  $x=0$  tenemos que  $x^2 - 4 \geq 0 \Rightarrow 0^2 - 4 \geq 0 \Rightarrow -4 \geq 0$ , lo cual no es cierto. Entonces en este intervalo no hay solución.

Zona 3:

Tomamos un  $x \in [2, \infty)$ , por ejemplo  $x=3$ . Así,  $x^2 - 4 \geq 0 \Rightarrow 3^2 - 4 \geq 0 \Rightarrow 5 \geq 0$ , lo cual si es cierto. Ello quiere decir que el intervalo estudiado es una solución de la inecuación.

Conclusión final:

$\text{Dom}(f) = \forall x \in \mathbb{R} / x^2 - 4 \geq 0 \Leftrightarrow \text{Dom}(f) = \forall x \in \mathbb{R} / x \leq -2$  y  $x \geq 2$ ,  
y gráficamente:



3.  $f(x) = \frac{x+3}{\sqrt{x^2+x-2}}$

Solución:

El  $\text{Dom}(f)$  está dado por el conjunto de los valores de  $x$  para los que  $f(x)$  existe. Esta función no tiene sentido cuando el denominador es cero o cuando el radicando es menor que cero.

Así:

$$\text{Dom}(f) = \forall x \in \mathbb{R} / x^2 + x - 2 \geq 0$$

La solución de  $x^2 + x - 2 \geq 0$  viene dada por  $(-\infty, -2] \cup [1, \infty)$

Entonces,

$$\text{Dom}(f) = \forall x \in \mathbb{R} / x^2 + x - 2 \geq 0 \Rightarrow \text{Dom}(f) = \forall x \in \mathbb{R} / (-\infty, -2] \cup [1, \infty)$$

4.  $f(x) = \frac{\sqrt{2-x}}{x^2 + x + 18}$

Solución:

El Dom(f) está dado por el conjunto de los valores de x para los que f(x) existe. Esta función no tiene sentido en los siguientes casos:

- El radicando que aparece en el numerador es negativo.
- El denominador es cero.

Es decir:

$$\text{Dom}(f) = \forall x \in \mathbb{R} / 2 - x \geq 0 \cup x^2 + x + 18 \neq 0,$$

tal que:

- $2 - x \geq 0 \Rightarrow x \leq 2 \Rightarrow (-\infty, 2]$
- $x^2 + x + 18 \neq 0 \Rightarrow \begin{cases} x \neq -1 \\ x \neq -9 \end{cases}$

Conclusión:

$$\text{Dom}(f) = \forall x \in \mathbb{R} / (-\infty, -9) \cup (-9, -1) \cup (-1, 2)$$

## B.2. Halla la inversa de cada una de las siguientes funciones

5.  $f(x) = 5x - 2$

Solución:

Primero comprobamos que la función es inyectiva:

$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow 5x_1 - 2 = 5x_2 - 2 \Rightarrow x_1 = x_2$ . Así que es inyectiva, por lo que tendrá inversa.

Escribimos la función como  $y = 5x - 2$  y cambiamos  $x$  por  $y$ :

$$x = 5y - 2$$

Ahora despejamos  $y$ :

$$x = 5y - 2 \Rightarrow y = \frac{x+2}{5}$$

Por último, hacemos el cambio  $y \equiv f^{-1}(x)$ :

$$f^{-1}(x) = \frac{x+2}{5}$$

6.  $f(x) = x^2 - 2$

Solución:

Primero comprobamos que la función es inyectiva:

$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1^2 - 2 = x_2^2 - 2 \Rightarrow x_1 = x_2$ . Así que es inyectiva, por lo que tendrá inversa.

Escribimos la función como  $y = x^2 - 2$  y cambiamos  $x$  por  $y$ :

$$x = y^2 - 2$$

Ahora despejamos  $y$ :

$$x = y^2 - 2 \Rightarrow y = \sqrt{x+2}$$

Por último, hacemos el cambio  $y \equiv f^{-1}(x)$ :

$$f^{-1}(x) = \sqrt{x+2}$$

7.  $f(x) = \frac{2x+3}{x-1}$

Solución:

Primero comprobamos que la función es inyectiva:

$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow \frac{2x_1+3}{x_1-1} = \frac{2x_2+3}{x_2-1} \Rightarrow x_1 = x_2$ . Así que es inyectiva, por lo que tendrá inversa.

Escribimos la función como  $y = \frac{2x+3}{x-1}$  y cambiamos  $x$  por  $y$ :

$$x = \frac{2y+3}{y-1}$$

Ahora despejamos  $y$ :

$$x = \frac{2y+3}{y-1} \Rightarrow y = \frac{x+3}{x-2}$$

Por último, hacemos el cambio  $y \equiv f^{-1}(x)$ :

$$f^{-1}(x) = \frac{x+3}{x-2}$$

8.  $f(x) = \sqrt[3]{x-4}$

Solución:

Primero comprobamos que la función es inyectiva:

$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow \sqrt[3]{x_1-4} = \sqrt[3]{x_2-4} \Rightarrow x_1 = x_2$ . Así que es inyectiva, por lo que tendrá inversa.

Escribimos la función como  $y = \sqrt[3]{x-4}$  y cambiamos  $x$  por  $y$ :

$$x = \sqrt[3]{y-4}$$

Ahora despejamos  $y$ :

$$x = \sqrt[3]{y-4} \Rightarrow y = x^3 + 4$$

Por último, hacemos el cambio  $y \equiv f^{-1}(x)$ :

$$f^{-1}(x) = x^3 + 4$$

### B.3. Halla la variación y la tasa de variación media de cada una de las siguientes funciones

9.  $f(x) = 5x - 2$  en el intervalo  $[-3, 0]$

Solución:

a) La variación viene dada por :

$$f(b) - f(a) = f(0) - f(-3) = 5 \cdot 0 - 2 - (5(-3) - 2) = -19$$

b) La tasa de variación media viene dada por  $\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \frac{-19}{3} = -\frac{19}{3}$

10.  $f(x) = x^2 - 2$  en el intervalo  $[-1, 2]$

Solución:

a) La variación viene dada por

$$f(b) - f(a) = f(2) - f(-1) = 0^2 - 2 - (2^2 - 2) = -4$$

b) La tasa de variación media viene dada por:

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \frac{-4}{2 - (-1)} = -\frac{4}{3}$$

11.  $f(x) = \frac{2x + 3}{x - 1}$  en el intervalo  $[0, 4]$

Solución:

a) La variación viene dada por :

$$f(b) - f(a) = f(4) - f(0) = \frac{2 \cdot 4 + 3}{4 - 1} - \frac{0 + 3}{0 - 1} = \frac{20}{3}$$

b) La tasa de variación media viene dada por  $\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \frac{\frac{20}{3}}{4} = \frac{5}{3}$

12.  $f(x) = \sqrt{x - 4}$  en el intervalo  $[4, 5]$

Solución:

a) La variación viene dada por:

$$f(b) - f(a) = f(5) - f(4) = \sqrt{5 - 4} - \sqrt{4 - 4} = 1$$

b) La tasa de variación media viene dada por  $\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \frac{1}{1} = 1$

#### B.4. Estudia la simetría de cada una de las siguientes funciones

13.  $f(x) = x^4 + x^2$

Solución:

• La simetría de una función puede ser:

b) Par o simétrica respecto al eje OY, cuando se cumple que  $f(x) = f(-x)$

- c) Impar o simétrica respecto al origen, cuando se cumple que  $-f(x) = f(-x)$
- d) No tener simetría, si no se dan ninguno de los dos casos anteriores.

- Estudio de la simetría par:

$$f(x) = f(-x) \Rightarrow x^4 + x^2 = (-x)^4 + (-x)^2 \Rightarrow x^4 + x^2 = x^4 + x^2.$$

Conclusión:

La simetría es par. No hace falta seguir con el estudio, ya que las funciones no pueden tener dos tipos de simetría.

14.  $f(x) = x^3 - x$

Solución:

- Estudio de la simetría par:

$$f(x) = f(-x) \Rightarrow x^3 - x = (-x)^3 - (-x) \Rightarrow x^3 - x \neq -x^3 + x. \text{ Conclusión: La simetría no es par.}$$

- Estudio de la simetría impar:

$$-f(x) = f(-x) \Rightarrow -x^3 + x = (-x)^3 - (-x) \Rightarrow -x^3 + x = -x^3 + x. \text{ Conclusión: La simetría es impar.}$$

15.  $f(x) = \frac{1}{2x-1}$

Solución:

- Estudio de la simetría par:

$$f(x) = f(-x) \Rightarrow \frac{1}{2x-1} = \frac{1}{2(-x)-1} \Rightarrow \frac{1}{2x-1} \neq \frac{1}{-2x-1}, \text{ luego la simetría no es par.}$$

- Estudio de la simetría impar:

$$-f(x) = f(-x) \Rightarrow -\frac{1}{2x-1} = \frac{1}{2(-x)-1} \Rightarrow \frac{1}{-2x+1} \neq \frac{1}{-2x-1}, \text{ luego la simetría no es impar.}$$

- conclusión final: La función no tiene simetría.

## B.5. Representa cada una de las siguientes funciones

16.  $y = 2x$

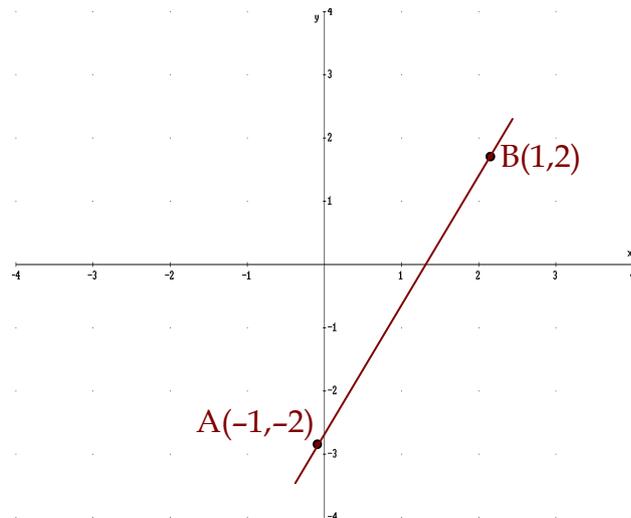
Solución:

La función dada se trata de una línea recta, ya que es de la forma  $y = mx+n$ , en dónde  $m$  es la pendiente. En nuestro caso,  $m=2$  y  $n=0$ . Como  $n=0$  ello quiere decir que la recta cortará al eje  $y$  en  $y=0$ .

Hacemos una tabla de valores para  $y=2x$

x	y=2x
-1	$2(-1)=-2 \Rightarrow A(-1,-2)$
1	$2 \cdot 1=2 \Rightarrow B(1,2)$

Ahora representamos los dos puntos sobre el plano cartesiano:



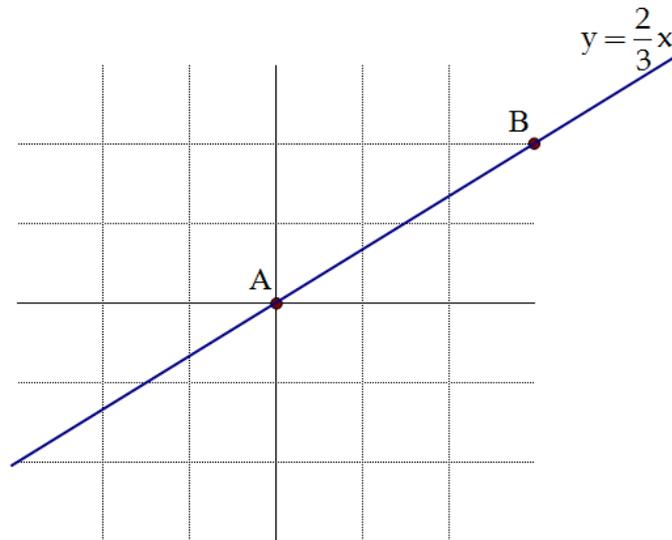
17.  $y = \frac{2x}{3}$

Solución:

- La función  $y = \frac{2x}{3}$  se puede escribir también así:  $y = \frac{2}{3}x$ , o si lo prefieres de esta otra forma:  $y = 0,67x$
- Ahora, como siempre en estos casos, construimos una tabla de valores para obtener dos puntos (para dibujar una línea recta no hacen falta más puntos):

x	$y = \frac{2}{3}x$	
0	0	$\Rightarrow A(0,0)$
3	2	$\Rightarrow B(3,2)$

- Por último, representamos los dos puntos en un plano cartesiano y por ellos trazamos la línea recta que buscamos:



18.  $y = -2x + 3$

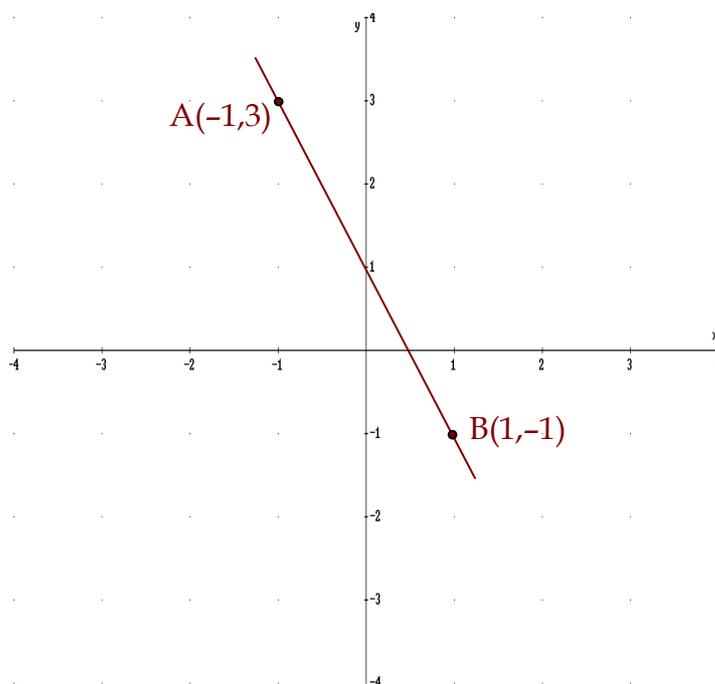
Solución:

La función dada es una línea recta, ya que es de la forma  $y = mx + n$ , en donde  $m$  es la pendiente. En nuestro caso,  $m = -2$  y  $n = 3$ . Como  $n = 3$  ello quiere decir que la recta cortará al eje  $y$  en  $y = 3$ .

Hacemos una tabla de valores para  $y = -2x + 3$

x	$y = -2x + 3$	
-1	$-2(-1) + 3 = 5$	$\Rightarrow A(-1,5)$
1	$-2 \cdot 1 + 3 = 1$	$\Rightarrow B(1,1)$

Ahora representamos los dos puntos sobre el plano cartesiano:



19. Representa la siguiente función definida a trozos. Estudia también la continuidad, el crecimiento, decrecimiento y los máximos y mínimos de cada una de ellas.

$$f(x) = \begin{cases} x - 3, & -\infty < x \leq 0 \\ 2, & 0 < x < 3 \\ -x, & 3 \leq x < \infty \end{cases}$$

Solución:

El dominio de  $f(x)$  tiene tres zonas, para una de las cuales corresponde un trazado distinto:

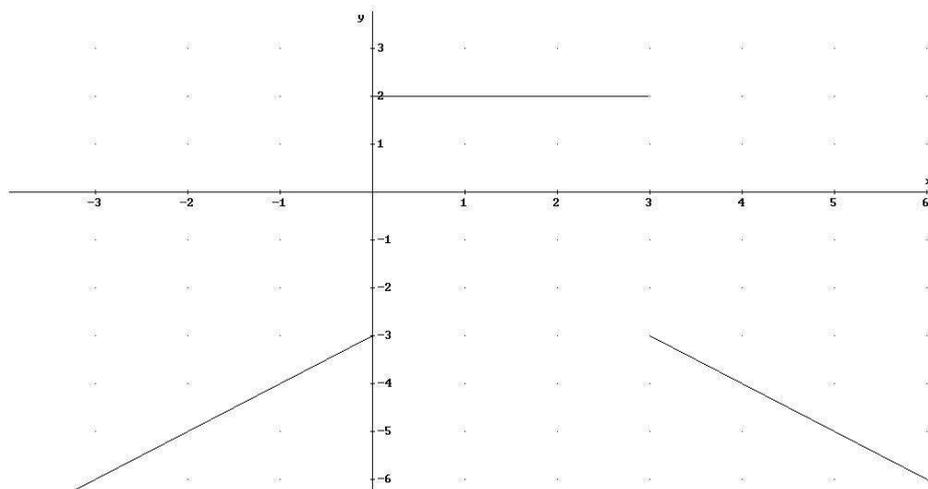
- Para la primera zona,  $-\infty < x \leq 0$ , construimos una tabla de valores con el fin de obtener dos puntos. No necesitamos más puntos, ya que en el presente tramo la función es una línea recta,  $f_1(x) = x - 3$

x	x-3
0	0-3=-3 $\Rightarrow$ A(0,-3)
-2	-2-3=-5 $\Rightarrow$ B(-2,-5)

- Para la segunda zona,  $0 < x < 3$ , el valor de la función es constante,  $f_2(x) = 2$
- Para la tercera zona,  $3 \leq x < \infty$ , construimos una tabla de valores con el fin de obtener dos puntos. No necesitamos más puntos ya que este tercer tramo se trata de otra recta,  $f_3(x) = -x$

x	-x
3	-3 $\Rightarrow D(3,-3)$
5	-5 $\Rightarrow E(5,-5)$

- Sólo nos queda representar los puntos obtenidos:



20. Representa la siguiente función cuadrática:  $y = x^2 - 5x + 6$

Solución:

- **Los puntos de corte con el eje x:**

Se obtienen a partir de la condición  $y=0$ . En ese caso:

$$x^2 - 5x + 6 = 0 \Rightarrow x = \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6}}{2} = \frac{5 \pm \sqrt{1}}{2} = \begin{cases} x = 3 \\ x = 2 \end{cases}$$

- **Las coordenadas del vértice:**

Están dadas por  $x = -\frac{b}{2a}$ ;  $y = \frac{-b^2 + 4ac}{4a^2}$ . Sustituyendo los valores de a y b en estas expresiones obtenemos:

$$x = -\frac{(-5)}{2}; y = \frac{-(-5)^2 + 4 \cdot 1 \cdot 6}{4 \cdot 1^2} \Rightarrow x = \frac{5}{2}; y = -\frac{1}{4}, \quad \text{que vamos a expresar como } V\left(\frac{5}{2}, -\frac{1}{4}\right)$$

▪ **Orientación de la parábola:**

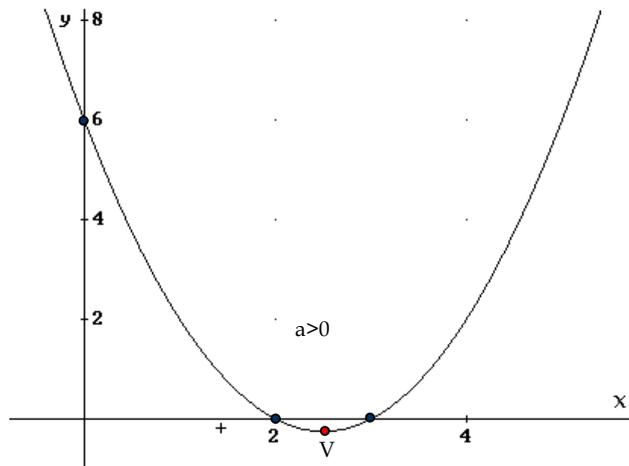
Como  $a > 0$ , entonces la parábola es cóncava hacia arriba.

▪ **El punto de corte con el eje y:**

Está dado por la condición  $x=0$ . En nuestro caso, cuando  $x=0$  se tiene que  $y=6$ .

▪ **Representación gráfica:**

plano cartesiano los puntos que hemos conseguido y unirlos.



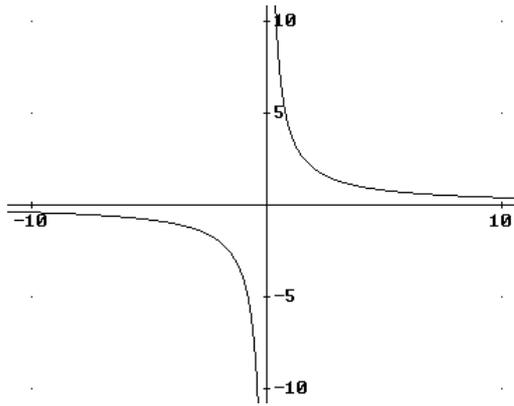
21.  $y = \frac{4}{x} + 3$

Solución:

Para representar esta parábola hay que dar los siguientes pasos:

a) Paso uno:

Tenemos que saber dibujar  $f(x) = \frac{4}{x}$ , que es una función de proporcionalidad inversa cuya forma es la que sigue:



b) Paso dos:

$y = \frac{4}{x} + 3$ , es la anterior función pero desplazada 3 unidades verticales positivas:

