

1. Juan y Ana ven desde las puertas de sus casas una torre de televisión situada entre ellas bajo ángulos de 45 y 60 grados. La distancia entre sus casas es de 126 metros. Halla la altura de la torre. *Consejo:* realiza un dibujo de la situación. Te ayudará a resolver el problema. **(1 punto)**

2. Resuelve la ecuación trigonométrica: $\cos 2x + \cos x = 0$ **(1 punto)**

3. Hallar la ecuación general de la recta r que pasa por el punto $A(5, -2)$ y es paralela a la recta $s \equiv 2x - 3y - 5 = 0$. **(1 punto)**

4. Hallar la ecuación general de la recta perpendicular a la recta $x - 2y + 1 = 0$ que pasa por el punto $(2, -1)$. **(1 punto)**

5. Hallar el valor de a para que la recta $x - ay + 1 = 0$ sea perpendicular a la recta $(2 - a)x - \frac{4}{3}y + 2 = 0$. **(2 puntos)**

6. Dada la función: $f(x) = \begin{cases} x + 5 & \text{si } x < -2 \\ x^2 - 1 & \text{si } -2 \leq x < 1 \\ \frac{1}{x-1} & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$

Estudia razonadamente y, en su caso, explica el tipo de discontinuidad, en los puntos $x = -2$ y $x = 1$. Representa gráficamente la función. **(2 puntos)**

7. Calcula las derivadas de las siguientes funciones y simplifica en lo posible el resultado:

a) $y = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$ **(1 punto)**

b) $y = \ln \frac{2x-1}{3x-1}$ **(1 punto)**

8. Dada la función $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 - 4}$, hallar:

a) El dominio y los puntos de corte con los ejes. **(0,5 puntos)**

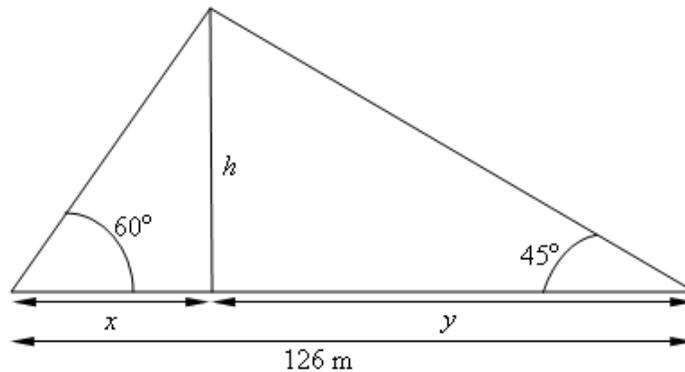
b) Las asíntotas. **(1 punto)**

c) Los intervalos donde la función es estrictamente creciente y estrictamente decreciente, así como los máximos y mínimos relativos de la función. **(1,5 puntos)**

d) Representación gráfica indicando en esta representación los puntos máximos y mínimo obtenidos. **(1 punto)**

Soluciones

1. Para la resolución nos basaremos en el siguiente dibujo:



Como $x + y = 126$, entonces $y = 126 - x$. Ahora podemos plantear el siguiente sistema:

$$\begin{cases} \operatorname{tg} 60^\circ = \frac{h}{x} \\ \operatorname{tg} 45^\circ = \frac{h}{126 - x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} h = \sqrt{3}x \\ h = 126 - x \end{cases} \Rightarrow \sqrt{3}x = 126 - x \Rightarrow \sqrt{3}x + x = 126 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1,73x + x = 126 \Rightarrow 2,73x = 126 \Rightarrow x = \frac{126}{2,73} \Rightarrow x = 46,15\text{ m}$$

Por tanto $h = 126 - x = 126 - 46,15 = 79,85$, con lo que la altura de la torre será, aproximadamente, de 79,85 metros.

$$\begin{aligned} 2. \cos 2x + \cos x = 0 &\Leftrightarrow \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x + \cos x = 0 \Leftrightarrow \cos^2 x - (1 - \cos^2 x) + \cos x = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 2 \cos^2 x + \cos x - 1 = 0 \Leftrightarrow \cos x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-1)}}{2 \cdot 2} = \frac{-1 \pm 3}{4} = \begin{cases} \cos x_1 = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \\ \cos x_2 = -1 \end{cases} \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = \begin{cases} 60^\circ + 360^\circ k \\ 300^\circ + 360^\circ k \end{cases} \\ x_2 = 180^\circ + 360^\circ k \end{cases}$$

3. Un vector director de s es $\vec{u} = (-B, A) = (3, 2)$. Entonces la ecuación de la recta es:

$$\frac{x - 5}{3} = \frac{y - (-2)}{2} \Leftrightarrow 2x - 10 = 3y + 6 \Leftrightarrow 2x - 3y - 16 = 0$$

4. Un vector perpendicular a la recta $x - 2y + 1 = 0$ es $\vec{u} = (A, B) = (1, -2)$. Por tanto la ecuación de la recta perpendicular que pasa por el punto $(2, -1)$ será:

$$\frac{x - 2}{1} = \frac{y - (-1)}{-2} \Leftrightarrow -2x + 4 = y + 1 \Leftrightarrow -2x - y + 3 = 0$$

5. Los vectores directores de ambas rectas son, respectivamente, $\vec{u} = (a, 1)$ y $\vec{v} = \left(\frac{4}{3}, 2 - a\right)$. Como las rectas han de ser perpendiculares, entonces el producto escalar de ambos vectores debe ser cero, con lo que:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \Leftrightarrow (a, 1) \cdot \left(\frac{4}{3}, 2 - a\right) = 0 \Leftrightarrow \frac{4a}{3} + 2 - a = 0 \Leftrightarrow 4a + 6 - 3a = 0 \Leftrightarrow a = -6$$

6. Estudiemos la continuidad en $x = -2$:

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2^-} (x + 5) = 3 \\ \lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2^+} (x^2 - 1) = 3 \end{cases} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -2} f(x) = 3$$

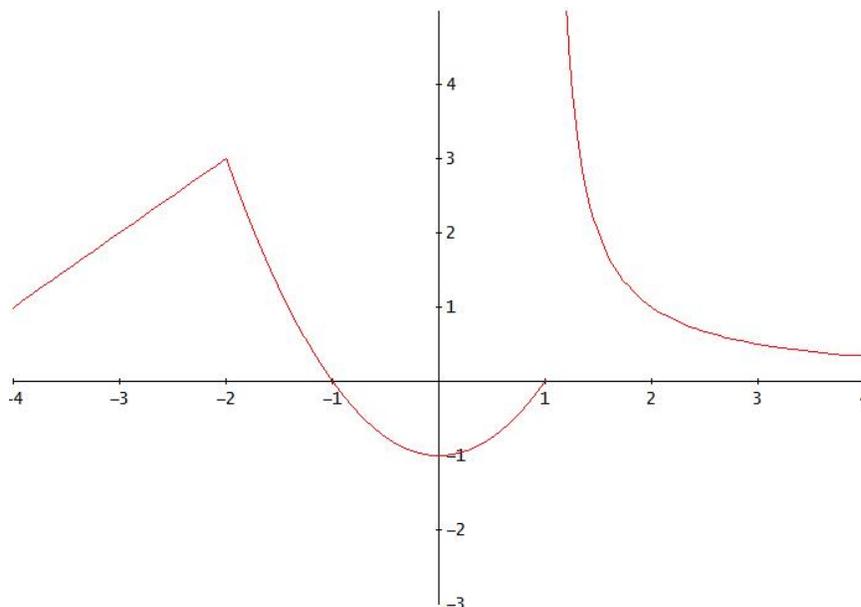
Además $f(-2) = 3$. Por tanto se cumple que $\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = f(-2) = 3$ y, por tanto, f es continua en $x = -2$.

Estudiemos ahora la continuidad en $x = 1$:

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (x^2 - 1) = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{x - 1} = +\infty \end{cases}$$

Como uno de los límites laterales es infinito, no existe el límite de la función cuando x tiende a 1. Esto quiere decir que f no es continua en el punto $x = 1$. Hay una discontinuidad de salto infinito.

Representación gráfica:



7. a) Lo más fácil es escribir la función como una única potencia de exponente racional:

$$y = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} = y = \frac{1}{x^{2/3}} = x^{-2/3} =$$

Entonces la derivada es:

$$y' = -\frac{2}{3}x^{-2/3-1} = -\frac{2}{3}x^{-5/3} = -\frac{2}{3} \frac{1}{x^{5/3}} = -\frac{2}{3\sqrt[3]{x^5}} = -\frac{2}{3x\sqrt[3]{x^2}}$$

- b) Derivamos utilizando la regla de la cadena:

$$y' = \frac{1}{\frac{2x-1}{3x-1}} \cdot \frac{2(3x-1) - (2x-1)3}{(3x-1)^2} = \frac{3x-1}{2x-1} \cdot \frac{6x-2-6x+3}{(3x-1)^2} = \frac{1}{(2x-1)(3x-1)}$$

8. a) Los números que anulan el denominador son $x = -2$ y $x = 2$. Por tanto se tiene que $\text{Dom}f = \mathbb{R} - \{-2, 2\}$.

Igualando $f(x)$ a 0 se obtiene el punto de corte con el eje X. Para ello basta que el numerador sea cero: $x^2 - 1 = 0 \Rightarrow$

$$\begin{cases} x_1 = -1 \\ x_2 = 1 \end{cases} \quad \text{Así pues los puntos de corte con el eje X son } (-1, 0) \text{ y } (1, 0).$$

El punto de corte con el eje Y se obtiene haciendo $x = 0$. Entonces $y = \frac{1}{4}$, y el punto de corte con el eje Y es $(0, \frac{1}{4})$.

- b) Los números que anulaban el denominador ($x = -2$ y $x = 2$) son también candidatos a asíntotas verticales. Veamos si lo son:

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 - 1}{x^2 - 4} = \left[\frac{3}{0} \right] = \infty = \begin{cases} +\infty \text{ si } x \rightarrow -2^- \\ -\infty \text{ si } x \rightarrow -2^+ \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 1}{x^2 - 4} = \left[\frac{3}{0} \right] = \infty = \begin{cases} -\infty \text{ si } x \rightarrow 2^- \\ +\infty \text{ si } x \rightarrow 2^+ \end{cases}$$

De lo anterior se deduce que tanto $x = -2$ como $x = 2$ son asíntotas verticales.

Por otro lado: $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 1}{x^2 - 4} = 1$. Entonces $y = 1$ es una asíntota horizontal.

- c) La derivada de la función es:

$$f'(x) = \frac{2x(x^2 - 4) - (x^2 - 1)2x}{(x^2 - 4)^2} = \frac{2x^3 - 8x - 2x^3 + 2x}{(x^2 - 4)^2} = \frac{-6x}{(x^2 - 4)^2}$$

Entonces:

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow -6x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ (posible extremo relativo)}$$

Hagamos una tabla:

	$(-\infty, -2)$	$(-2, 0)$	$(0, 2)$	$(2, +\infty)$
f'	+	+	-	-
f	↑↑	↑↑	↓↓	↓↓

De la tabla se desprende que f es estrictamente creciente en $(-\infty, -2) \cup (-2, 0)$ y estrictamente decreciente en $(0, 2) \cup (2, +\infty)$. Además f alcanza un máximo relativo en $x = 0$. Las coordenadas de este máximo son $\left(0, \frac{1}{4}\right)$. Para saber la coordenada y basta sustituir la coordenada x en la función inicial (obsérvese que el máximo coincide con el punto de corte con el eje Y).

d) La representación gráfica queda como sigue:

