

# OPERACIONES CON LÍMITES DE FUNCIONES

*Las operaciones con límites, tanto en un punto como en el infinito, tiene unas propiedades análogas que debemos conocer:*

## PROPIEDADES

<i>El límite de la suma o diferencia de dos funciones es la suma o diferencia de los límites de cada una de las funciones</i>	$\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) \pm g(x)) = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow \infty} g(x)$
<i>El límite de un producto de funciones es el producto de los límites de cada una de las funciones</i>	$\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow \infty} g(x)$
<i>El límite de un cociente de funciones es el cociente de los límites de cada una de las funciones</i>	$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)}{\lim_{x \rightarrow \infty} g(x)}$
<i>El límite del producto de una función por un número real es el producto del número por el límite de la función</i>	$\lim_{x \rightarrow \infty} (k \cdot f(x)) = k \cdot \lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$
<i>El límite de una función constante coincide con el valor de la constante</i>	$\lim_{x \rightarrow \infty} k = k$
<i>El límite de la potencia de dos funciones es el valor de la potencia de sus límites</i>	$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)^{g(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x)^{\lim_{x \rightarrow \infty} g(x)}$

# INDETERMINACIONES

*Cuando en el cálculo de un límite de una función, no obtenemos una solución concreta, estamos ante una indeterminación, que debemos resolver.*

*Tipos de indeterminaciones teniendo en cuenta a que tiende  $x$ :*

*Límites cuando  $x \rightarrow \pm \infty$ :*

a) *Indeterminación del tipo:*  $\infty - \infty$

b) *Indeterminación del tipo:*  $\frac{\infty}{\infty}$

c) *Indeterminación del tipo:*  $1^\infty$

*Límites de una función en un punto*

a) *Indeterminación del tipo:*  $\frac{0}{0}$

b) *Indeterminación del tipo:*  $\frac{k}{0}$

## Resolución de la indeterminación : $\frac{\infty}{\infty}$

a) Se resuelve dividiendo numerador y denominador por la  $x$  elevado al mayor exponente del denominador o del numerador

Calcular el siguiente límite:  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{2x^2 - 3x + 5}{3x^2 + 5x} \right)$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{2x^2 - 3x + 5}{3x^2 + 5x} \right) = \frac{\infty}{\infty}$$

Es una indeterminación, resolvemos dividiendo numerador y denominador por  $x^2$ :

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{2x^2 - 3x + 5}{3x^2 + 5x} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{\frac{2x^2}{x^2} - \frac{3x}{x^2} + \frac{5}{x^2}}{\frac{3x^2}{x^2} + \frac{5x}{x^2}} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{2 - \frac{3}{x} + \frac{5}{x^2}}{3 + \frac{5}{x}} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{2}{3} \right) = \frac{2}{3}$$

*Note: In the original image, red boxes highlight the 0s in the second fraction, and red arrows indicate the cancellation of terms between the numerator and denominator.*

## Resolución de la indeterminación : $\infty - \infty$

b) Si no hay expresiones con raíces, se resuelve la operación entre las expresiones analíticas de las funciones:

Calcular el siguiente límite:  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x^2 - 3}{x} - \frac{x - 2}{3} \right)$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 3}{x} - \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x - 2}{3} = \infty - \infty$$

Es una indeterminación, resolvemos realizando la operación:  $\frac{x^2 - 3}{x} - \frac{x - 2}{3}$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x^2 - 3}{x} - \frac{x - 2}{3} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{3(x^2 - 3) - x(x - 2)}{3x} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{3x^2 - 9 - x^2 + 2x}{3x} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{2x^2 + 2x - 9}{3x} \right) = \frac{\infty}{\infty}$$

Resolvemos ahora la indeterminación  $\frac{\infty}{\infty}$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{2x^2 + 2x - 9}{3x} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{\frac{2x^2}{x} + \frac{2x}{x} - \frac{9}{x}}{\frac{3x}{x}} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{2x + 2 - \frac{9}{x}}{3} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{2x + 2}{3} \right) = \infty$$

0

## Resolución de la indeterminación : $\infty - \infty$

c) Si hay expresiones con raíces, se resuelve multiplicando y dividiendo por el conjugado de la expresión radical

Calcular el siguiente límite:  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \sqrt{x^2 - x} - \sqrt{x^2 + x} \right)$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \sqrt{x^2 - x} - \sqrt{x^2 + x} \right) = \infty - \infty$$

Es una indeterminación, resolvemos multiplicando y dividiendo la expresión radical por:

$$\begin{aligned} \left( \sqrt{x^2 - x} + \sqrt{x^2 + x} \right) &\Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \sqrt{x^2 - x} - \sqrt{x^2 + x} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\left( \sqrt{x^2 - x} - \sqrt{x^2 + x} \right) \left( \sqrt{x^2 - x} + \sqrt{x^2 + x} \right)}{\left( \sqrt{x^2 - x} + \sqrt{x^2 + x} \right)} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\left( \left( \sqrt{x^2 - x} \right)^2 - \left( \sqrt{x^2 + x} \right)^2 \right)}{\left( \sqrt{x^2 - x} + \sqrt{x^2 + x} \right)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - x - x^2 - x}{\left( \sqrt{x^2 - x} + \sqrt{x^2 + x} \right)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-2x}{\left( \sqrt{x^2 - x} + \sqrt{x^2 + x} \right)} = \frac{\infty}{\infty} \end{aligned}$$

Resolvemos ahora la indeterminación  $\frac{\infty}{\infty}$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-2x}{\left( \sqrt{x^2 - x} + \sqrt{x^2 + x} \right)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-2x}{\left( \sqrt{\frac{x^2}{x^2} - \frac{x}{x^2}} + \sqrt{\frac{x^2}{x^2} + \frac{x}{x^2}} \right)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-2}{\left( \sqrt{1 - \frac{1}{x}} + \sqrt{1 + \frac{1}{x}} \right)} = \frac{-2}{2} = -1$$

## Indeterminación : $1^\infty$

El límite de la sucesión  $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$  es el número  $e \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$

$$a_{100} = \left(1 + \frac{1}{100}\right)^{100} = 2,704813829\dots$$

$$a_{10000} = \left(1 + \frac{1}{10000}\right)^{10000} = 2,71845927\dots$$

$$a_{1000000} = \left(1 + \frac{1}{1000000}\right)^{1000000} = 2,718280469\dots$$

$$a_{1000000000} = \left(1 + \frac{1}{1000000000}\right)^{1000000000} = 2,718281827\dots \cong e$$

Los límites del tipo  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n^{b_n} = 1^\infty$  se denominan límites del tipo número  $e$

Podemos probar que si  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{a_n}\right)^{a_n} = e$

## Resolución de la indeterminación : $1^\infty$

Calcular el siguiente límite:  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x+1}{x-1} \right)^{2x}$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x+1}{x-1} \right)^{2x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x+1}{x-1} \right)^{\lim_{x \rightarrow \infty} 2x} = 1^\infty$$

Para resolver este límite, transformaremos la expresión de la función para buscar el  $n^\circ e$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{1}{f(x)} \right)^{f(x)} = e$$

Sumamos y restamos 1  
a la expresión inicial

Realizamos la operación

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x+1}{x-1} \right)^{2x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{x+1}{x-1} - 1 \right)^{2x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{x+1-x+1}{x-1} \right)^{2x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{2}{x-1} \right)^{2x}$$

Dividimos numerador y denominador por 2

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{\frac{2}{2}}{\frac{x-1}{2}} \right)^{2x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{1}{\frac{x-1}{2}} \right)^{2x}$$

Multiplicamos y dividimos el exponente por el denominador del límite

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{1}{\frac{x-1}{2}} \right)^{\frac{x-1}{2} \cdot \frac{2}{x-1} \cdot 2x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \left( 1 + \frac{1}{\frac{x-1}{2}} \right)^{\frac{x-1}{2}} \right)^{\frac{4x}{x-1}}$$

Usamos la propiedad de las potencias:  $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$

$$= \left( \lim_{x \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{1}{\frac{x-1}{2}} \right)^{\frac{x-1}{2}} \right)^{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x}{x-1}} = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x}{x-1}} = e^4$$

## Resolución de la indeterminación : $\frac{0}{0}$

Para resolver esta indeterminación, se descomponen en producto de factores los polinomios del numerador y del denominador, y después se simplifican los factores comunes.

Calcular el siguiente límite:  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - x - 2}$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - x - 2} = \frac{2^2 - 3 \cdot 2 + 2}{2^2 - 2 - 2} = \frac{0}{0}$$

Es una indeterminación, descomponemos los polinomios del numerador y el denominador:

$$x^2 - 3x + 2 = (x - 2)(x - 1)$$

$$x^2 - x - 2 = (x - 2)(x + 1)$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\cancel{(x - 2)}(x - 1)}{\cancel{(x - 2)}(x + 1)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x - 1)}{(x + 1)} = \frac{2 - 1}{1 + 1} = \frac{1}{2}$$

## Resolución de la indeterminación : $\frac{k}{0}$

Para resolver esta indeterminación, debemos estudiar los límites laterales. Si estos son iguales, la función tiene límite y si son distintos, la función no tiene límite.

Calcular el siguiente límite:  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 2}{x - 2}$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 2}{x - 2} = \frac{2^2 + 2}{2 - 2} = \frac{6}{0}$$

Es una indeterminación, Estudiamos los límites laterales:

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2 + 2}{x - 2} \cong \frac{2,000001^2 + 2}{2,000001 - 2} \cong \frac{6}{0^+} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x^2 + 2}{x - 2} \cong \frac{1,999999^2 + 2}{1,999999 - 2} \cong \frac{6}{0^-} = -\infty$$

Como los límites laterales son distintos,  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 2}{x - 2}$  no existe