

CONICAS Y LUGARES GEOMÉTRICOS (problemas resueltos)

Ejercicio n° 1.-

Escribe la ecuación de la circunferencia con centro en el punto $(2, -3)$ y que es tangente a la recta $3x - 4y + 5 = 0$.

Solución:

El radio, R , de la circunferencia es igual a la distancia del centro a la recta dada:

$$R = \text{dist}(C, r) = \frac{|6 + 12 + 5|}{\sqrt{25}} = \frac{23}{5}$$

La ecuación será:

$$(x-2)^2 + (y+3)^2 = \frac{529}{25} \rightarrow x^2 + y^2 - 4x + 6y - \frac{204}{25} = 0$$

$$25x^2 + 25y^2 - 100x + 150y - 204 = 0$$

Ejercicio n° 2.-

a) Halla el centro y el radio de la circunferencia de ecuación:

$$2x^2 + 2y^2 - 8x - 12y + 8 = 0$$

b) Escribe la ecuación de la circunferencia de radio 5, que es concéntrica a la del apartado anterior.

Solución:

$$a) 2x^2 + 2y^2 - 8x - 12y + 8 = 0 \rightarrow x^2 + y^2 - 4x - 6y + 4 = 0$$

$$\text{Centro} = \left(\frac{4}{2}, \frac{6}{2}\right) = (2, 3)$$

$$\text{Radio} = \sqrt{4 + 9 - 4} = \sqrt{9} = 3$$

b) La circunferencia tiene radio 5 y centro $(2, 3)$. Su ecuación será:

$$(x-2)^2 + (y-3)^2 = 25 \rightarrow x^2 + y^2 - 4x - 6y - 12 = 0$$

Ejercicio nº 3.-

Halla la ecuación de la circunferencia tangente a la recta $4x + 3y - 25 = 0$ y cuyo centro es el punto de intersección de las rectas $3x - y - 7 = 0$ y $2x + 3y - 1 = 0$.

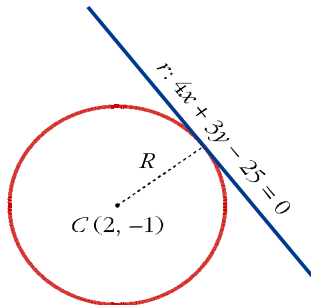
Solución:

Hallamos su centro:

$$\begin{cases} 3x - y - 7 = 0 \\ 2x + 3y - 1 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} y = 3x - 7 \\ 2x + 3(3x - 7) - 1 = 0 \end{cases}$$

$$2x + 9x - 21 - 1 = 0 \rightarrow 11x = 22 \rightarrow x = 2 \rightarrow y = -1$$

El centro es $C(2, -1)$.



El radio, R , es igual a la distancia del centro a la recta tangente:

$$R = \text{dist}(C, r) = \frac{|8 - 3 - 25|}{\sqrt{25}} = \frac{20}{5} = 4$$

La ecuación será:

$$(x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 16 \rightarrow x^2 + y^2 - 4x + 2y - 11 = 0$$

Ejercicio nº 4.-

Estudia la posición relativa de la recta $r: 2x + y = 1$ y la circunferencia $x^2 + y^2 - 4x - 2y - 4 = 0$.

Solución:

- Hallamos el centro y el radio de la circunferencia:

$$\text{Centro} = C = \left(\frac{4}{2}, \frac{2}{2}\right) = (2, 1)$$

$$\text{Radio} = R = \sqrt{4 + 1 - (-4)} = \sqrt{9} = 3$$

- Hallamos la distancia del centro a la recta dada:

$$\text{dist}(C, r) = \frac{|2 \cdot 2 + 1 - 1|}{\sqrt{4 + 1}} = \frac{4}{\sqrt{5}} \approx 1,79 < 3 = \text{radio}$$

Por tanto, la circunferencia y la recta son secantes. Se cortan en dos puntos.

Ejercicio n° 5.-

Halla la posición relativa de la recta $3x + 4y - 25 = 0$ con respecto a la circunferencia $x^2 + y^2 - 25 = 0$. Si se cortan en algún punto, halla sus coordenadas.

Solución:

Como tenemos que hallar los posibles puntos de corte, resolvemos el sistema:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 25 = 0 \\ 3x + 4y - 25 = 0 \end{cases} \Rightarrow y = \frac{25 - 3x}{4}$$

$$x^2 + \left(\frac{25 - 3x}{4}\right)^2 - 25 = 0$$

$$x^2 + \frac{625 - 150x + 9x^2}{16} - 25 = 0 \rightarrow 16x^2 + 625 - 150x + 9x^2 - 400 = 0 \rightarrow$$

Se cortan en el punto (3, 4). Por tanto, son tangentes.

Ejercicio n° 6.-

Obtén el valor de k para que la recta $s: x + y + k = 0$ sea tangente a la circunferencia $x^2 + y^2 + 6x + 2y + 6 = 0$.

Solución:

- Hallamos el centro y el radio de la circunferencia:

$$x^2 + y^2 + 6x + 2y + 6 = 0$$

$$\text{Centro} = C = \left(\frac{-6}{2}, \frac{-2}{2}\right) = (-3, -1)$$

$$\text{Radio} = r = \sqrt{9 + 1 - 6} = \sqrt{4} = 2$$

- Hallamos la distancia del centro a la recta dada:

$$\text{dist}(C, s) = \frac{|-3 - 1 + k|}{\sqrt{2}} = \frac{|k - 4|}{\sqrt{2}}$$

- Para que la recta sea tangente a la circunferencia, esta distancia ha de ser igual al radio:

$$\frac{|k-4|}{\sqrt{2}} = 2 \rightarrow |k-4| = 2\sqrt{2} \begin{cases} k-4 = 2\sqrt{2} \rightarrow k = 4 + 2\sqrt{2} \\ k-4 = -2\sqrt{2} \rightarrow k = 4 - 2\sqrt{2} \end{cases}$$

Hay dos soluciones: $k_1 = 4 + 2\sqrt{2}$; $k_2 = 4 - 2\sqrt{2}$

Ejercicio n° 7.-

Halla la posición relativa de la recta $r: x + y = 2$ con respecto a la circunferencia $x^2 + y^2 + 2x + 4y + 1 = 0$

Solución:

- Hallamos el centro y el radio de la circunferencia:

$$\text{Centro} = C = \left(\frac{-2}{2}, \frac{-4}{2} \right) = (-1, -2)$$

$$\text{Radio} = R = \sqrt{1 + 4 - 1} = \sqrt{4} = 2$$

- Hallamos la distancia del centro a la recta dada:

$$\text{dist}(C, r) = \frac{|-1 - 2 - 2|}{\sqrt{1+1}} = \frac{5}{\sqrt{2}} \approx 3,53 > 2 = \text{radio}$$

Por tanto, la recta es exterior a la circunferencia.

Ejercicio n° 8.-

Describe las siguientes cónicas, obtén sus elementos y represéntalas:

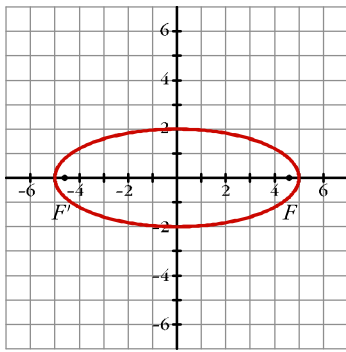
a) $4x^2 + 25y^2 = 100$

b) $4y^2 - x^2 = 4$

Solución:

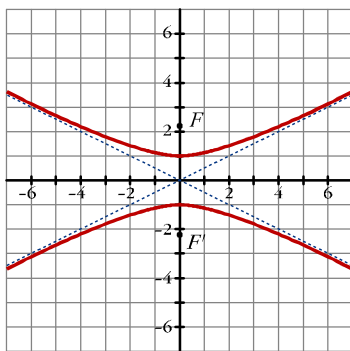
a) $4x^2 + 25y^2 = 100 \rightarrow \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{4} = 1$

$$\text{Es una elipse : } \begin{cases} \text{Semieje mayor: } 5 \\ \text{Semieje menor: } 2 \\ \text{Focos: } F(\sqrt{21}, 0) \text{ y } F'(-\sqrt{21}, 0) \\ \text{Excentricidad} = \frac{\sqrt{21}}{5} \approx 0,92 \end{cases}$$



b) $4y^2 - x^2 = 4 \rightarrow y^2 - \frac{x^2}{4} = 1$

Es una hipérbola : $\left\{ \begin{array}{l} \text{Semieje: } 1 \\ \text{Focos: } F(0, \sqrt{5}) \text{ y } F'(0, -\sqrt{5}) \\ \text{Excentricidad} = \frac{\sqrt{5}}{1} \approx 2,24 \\ \text{Asíntotas: } y = \frac{1}{2}x ; \quad y = -\frac{1}{2}x \end{array} \right.$



Ejercicio nº 9.-

Halla la ecuación del lugar geométrico de los puntos, P , del plano tales que su distancia al punto $A(1, 0)$, es el triple de su distancia a la recta $x = 2$. Identifica la figura que obtienes.

Solución:

Si $P(x, y)$ es un punto del lugar geométrico, tenemos que:

$$\text{dist}(P, A) = 3 \text{dist}(P, x = 2), \text{ es decir:}$$

$$\sqrt{(x-1)^2 + y^2} = 3|x-2|. \text{ Elevamos al cuadrado y operamos:}$$

$$x^2 - 2x + 1 + y^2 = 9(x^2 - 4x + 4)$$

$$x^2 - 2x + 1 + y^2 = 9x^2 - 36x + 36$$

$$8x^2 - y^2 - 34x + 35 = 0. \text{ Es una hipérbola.}$$

Ejercicio n° 10.-

Halla el lugar geométrico de los puntos del plano cuya suma de cuadrados de distancias a los puntos $A(-4, 0)$ y $B(4, 0)$ es 40. Identifica la figura resultante.

Solución:

Si $P(x, y)$ es un punto del lugar geométrico, ha de tenerse que:

$$[dist(P, A)]^2 + [dist(P, B)]^2 = 40; \text{ es decir :}$$

$$(x+4)^2 + y^2 + (x-4)^2 + y^2 = 40$$

$$x^2 + 8x + 16 + y^2 + x^2 - 8x + 16 + y^2 = 40$$

$$2x^2 + 2y^2 = 8$$

$$x^2 + y^2 = 4$$

Obtenemos una circunferencia de centro $(0, 0)$ y radio 2.

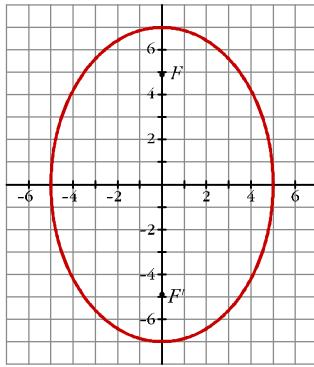
Ejercicio n°11.-

Identifica la siguiente cónica, dibújala y halla sus focos y su excentricidad:

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{49} = 1$$

Solución:

$$\text{Es una elipse: } \begin{cases} \text{Semieje mayor: } 7 \\ \text{Semieje menor: } 5 \\ \text{Focos: } F(0, \sqrt{24}) \text{ y } F'(0, -\sqrt{24}) \\ \text{Excentricidad} = \frac{\sqrt{24}}{7} \approx 0,7 \end{cases}$$



Ejercicio nº 12.-

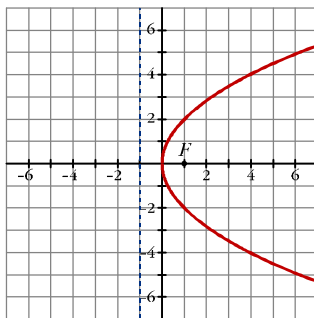
Identifica esta cónica, halla sus elementos y dibújala:

$$y^2 - 4x = 0$$

Solución:

$$y^2 - 4x = 0 \rightarrow y^2 = 4x$$

Es una parábola : $\begin{cases} \text{Vértice: } (0, 0) \\ \text{Foco: } (1, 0) \\ \text{Directriz: } x = -1 \end{cases}$



Ejercicio nº 13.-

Halla los elementos característicos de las siguientes cónicas, descríbelas y represéntalas gráficamente:

a) $\frac{y^2}{4} - \frac{x^2}{9} = 1$ b) $25x^2 + 100y^2 = 2500$

Solución:

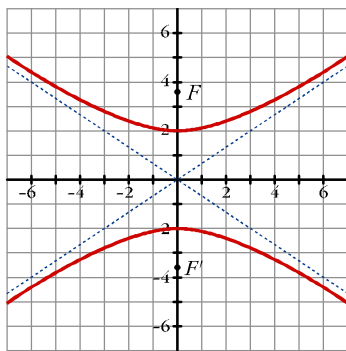
a) Es una hipérbola.

Semieje: 2

Focos: $F(0, \sqrt{13})$ y $F'(0, -\sqrt{13})$

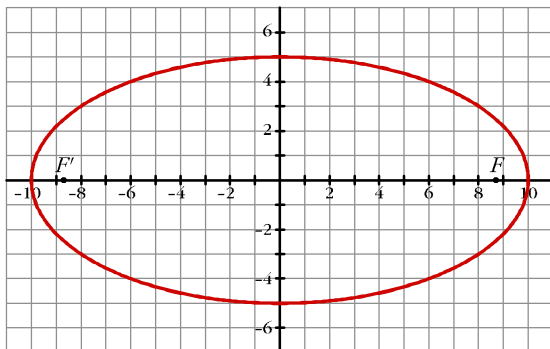
Excentricidad: $\frac{\sqrt{13}}{2} \approx 1,8$

Asíntotas: $y = \frac{2}{3}x$; $y = -\frac{2}{3}x$



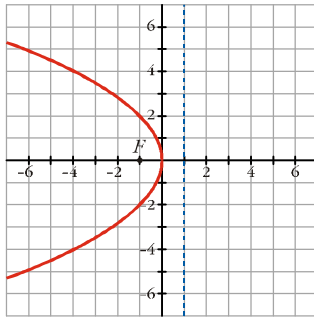
b) $25x^2 + 100y^2 = 2500 \rightarrow \frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{25} = 1$

Es una elipse : $\left\{ \begin{array}{l} \text{Semieje mayor: } 10; \text{ semieje menor: } 5 \\ \text{Focos: } F(5\sqrt{3}, 0) \text{ y } F'(-5\sqrt{3}, 0) \\ \text{Excentricidad: } \frac{5\sqrt{3}}{10} \approx 0,87 \end{array} \right.$



Ejercicio nº 14.-

Halla el foco, la directriz y la ecuación de la siguiente parábola:



Solución:

Directriz: $x = 1$. Foco $(-1, 0)$.

Ecuación: $y^2 = -4x$

Ejercicio nº 15.-

Dada la siguiente cónica, identifícala, obtén sus elementos característicos y represéntala gráficamente:

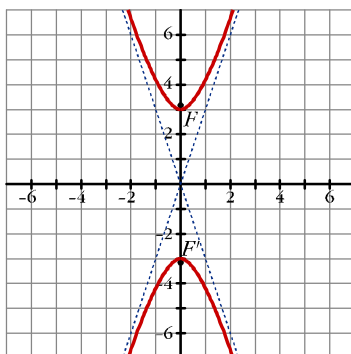
$$y^2 - 9x^2 = 9$$

Solución:

$$y^2 - 9x^2 = 9 \rightarrow \frac{y^2}{9} - \frac{x^2}{1} = 1$$

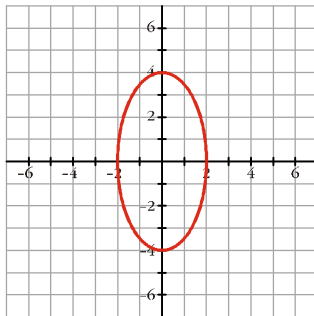
Es una hipérbola

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Semieje: } 3 \\ \text{Focos: } F(0, \sqrt{10}) \text{ y } F'(0, -\sqrt{10}) \\ \text{Excentricidad} = \frac{\sqrt{10}}{3} \approx 1,05 \\ \text{Asíntotas: } y = 3x ; \quad y = -3x \end{array} \right.$$



Ejercicio nº 16.-

Halla los semiejes, los focos y la excentricidad de la siguiente elipse. Escribe su ecuación:



Solución:

Semieje mayor: 4; semieje menor: 2

Focos: $F(0, \sqrt{12})$ y $F'(0, -\sqrt{12})$

Excentricidad: $\frac{\sqrt{12}}{4} \approx 0,87$

Ecuación: $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{16} = 1$

Ejercicio nº 17.-

Halla la ecuación de las bisectrices de los ángulos formados por las rectas $r_1: x + 3y - 1 = 0$ y $r_2: 3x - y + 4 = 0$.

Solución:

Los puntos $P(x, y)$ de las bisectrices cumplen que:

$\text{dist}(P, r_1) = \text{dist}(P, r_2)$, es decir:

$$\frac{|x + 3y - 1|}{\sqrt{10}} = \frac{|3x - y + 4|}{\sqrt{10}}$$

$$|x + 3y - 1| = |3x - y + 4| \begin{cases} \rightarrow x + 3y - 1 = 3x - y + 4 \rightarrow 2x - 4y + 5 = 0 \\ \rightarrow x + 3y - 1 = -3x + y - 4 \rightarrow 4x + 2y + 3 = 0 \end{cases}$$

Son dos rectas perpendiculares entre sí, que se cortan en el mismo punto que r_1 y r_2 .

Ejercicio n° 18.-

Halla el lugar geométrico de los puntos, P , del plano tales que su distancia a $Q(2, 4)$ sea igual a 3. ¿De qué figura se trata?

Solución:

Es una circunferencia de centro $(2, 4)$ y radio 3. Hallamos su ecuación:
Si $P(x, y)$ es un punto del lugar geométrico, tenemos que:

$dist(P, Q) = 3$, es decir:

$\sqrt{(x-2)^2 + (y-4)^2} = 3$. Elevamos al cuadrado y operamos :

$$(x-2)^2 + (y-4)^2 = 9 \rightarrow x^2 + y^2 - 4x - 8y + 11 = 0$$

Ejercicio n° 19.-

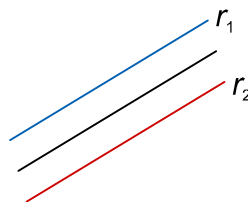
Identifica y halla la ecuación del lugar geométrico de los puntos, P , del plano tales que su distancia a la recta $r_1: x + y + 1 = 0$ sea igual que su distancia a la recta $r_2: 2x + 2y + 4 = 0$.

Solución:

Las dos rectas dadas,

$$r_1: x + y + 1 = 0 \text{ y } r_2: x + y + 2 = 0,$$

son rectas paralelas. Por tanto, el lugar geométrico pedido será otra recta, paralela a las dos, a igual distancia de ellas:



Hallamos su ecuación:

Si $P(x, y)$ es un punto del lugar geométrico, tenemos que:

$dist(P, r_1) = dist(P, r_2)$, es decir:

$$\frac{|x + y + 1|}{\sqrt{2}} = \frac{|x + y + 2|}{\sqrt{2}}$$

$$|x+y+1|=|x+y+2| \begin{cases} \rightarrow x+y+1=x+y+2 \rightarrow 1=2 \rightarrow \text{Imposible} \\ \rightarrow x+y+1=-x-y-2 \rightarrow 2x+2y+3=0 \end{cases}$$

Observamos que la recta obtenida es paralela a r_1 y r_2 .

Ejercicio n° 20.-

Halla el lugar geométrico de los puntos, P , del plano cuya distancia a $A(2, 0)$ sea el doble de la distancia a $B(-1, 0)$. Identifica la figura resultante.

Solución:

Si $P(x, y)$ es un punto del lugar geométrico, tenemos que:

$$\text{dist}(P, A) = 2 \cdot \text{dist}(P, B), \text{ es decir:}$$

$$\sqrt{(x-2)^2 + y^2} = 2\sqrt{(x+1)^2 + y^2}. \text{ Elevamos al cuadrado y operamos:}$$

$$x^2 - 4x + 4 + y^2 = 4(x^2 + 2x + 1 + y^2)$$

$$x^2 - 4x + 4 + y^2 = 4x^2 + 8x + 4 + 4y^2$$

$$3x^2 + 3y^2 + 12x = 0$$

$$x^2 + y^2 + 4x = 0$$

$$(x+2)^2 + y^2 = 4. \text{ Es una circunferencia de centro } (-2, 0) \text{ y radio } 2.$$