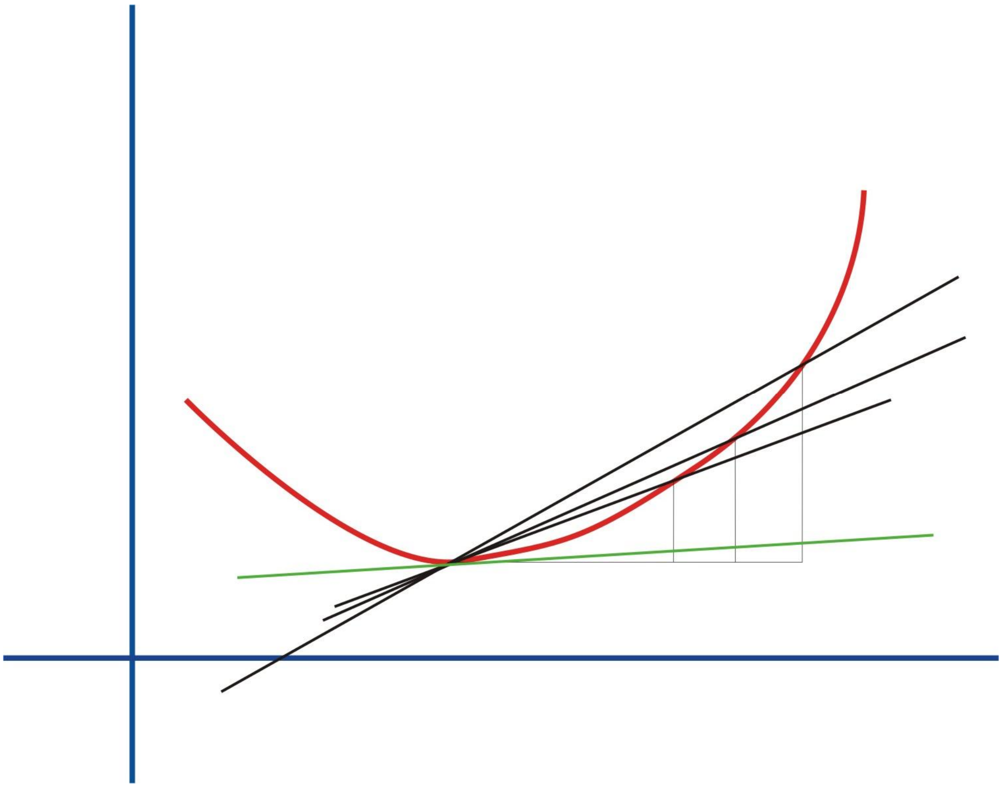
Tema 6: Derivadas, Técnicas de Derivación



6.0.- Introducción

Los orígenes del Cálculo estuvieron motivados por el deseo de resolver diversos problemas vinculados al movimiento de los cuerpos, así como problemas de tipo geométrico de importancia en Óptica y problemas de cálculo de valores máximos y mínimos de una función dada. Simplificando, podemos destacar dos problemas principales:

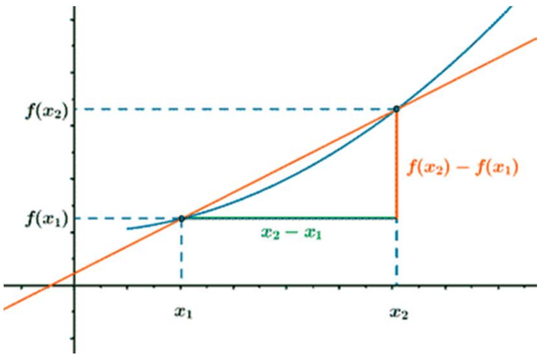
- Determinar la tangente a una curva en un punto (el problema de las tangentes).
- Determinar el área encerrada por una curva (el problema de las cuadraturas).

Son los conceptos de derivada e integral, respectivamente, los que permiten resolver satisfactoriamente dichos problemas. Mientras que el concepto de integral tiene sus raíces en la antigüedad clásica, la otra idea fundamental del Cálculo, la derivada, no se formuló hasta el siglo XVII. Fue el descubrimiento efectuado por Sir Isaac Newton (1642-1727) y Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716) de la relación entre estas dos ideas, tan dispares en apariencia, lo que inició el magnífico desarrollo del Cálculo. Si bien los trabajos de Newton y Leibniz son decisivos por sus aportaciones e influencia, no hay que olvidar que ellos son el punto culminante de un largo proceso en el que han participado científicos de la talla de Johannes Kepler (1571-1630), René Descartes (1596-1650), Pierre de Fermat (1601-1665), John Wallis (1616-1703) e Isaac Barrow (1630-1677) entre otros.

6.1.- Tasa de Variación Media [T.V.M.]

Como vimos el año pasado, la tasa de variación media de una función en un intervalo cerrado [a,b] se calculaba mediante el cociente entre la variación del valor de la variable dependiente entre la variación de la variable independiente.

$$\boxed{T.V.M._{[a,b]} = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}}$$



Y se correspondía con el valor de la pendiente de la recta que une los puntos a y b.

6.2.- Derivada de una función en un punto

Sea la función f definida en un punto x_o, decimos que la función f es derivable en el punto x_o si existe el límite de $\frac{f(x)-f(x_o)}{x-x_o}$ cuando la función tiende a x_o.

$$\boxed{\text{f derivable en } x_o \Rightarrow \exists \lim_{x\to x_o} \frac{f(x)-f(x_o)}{x-x_o}}$$

Si la función es derivable en x_o, al límite anterior se le llama ***derivada de la función f*** en el punto x_o, y se simboliza por ***$f'(x_o)$*** o por $\left(\frac{df}{dx}\right)_{x_o}$.

$$f'(x_o) = \lim_{x\to x_o} \frac{f(x)-f(x_o)}{x-x_o}$$

Si hacemos el cambio $h = x - x_o$, y despejamos x: $x = x_o + h$, y reescribimos el límite, encontramos otra forma de calcular la derivada de una función en un punto:

$$\boxed{f'(x_o) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_o+h)-f(x_o)}{h} = \lim_{x\to x_o} \frac{f(x)-f(x_o)}{x-x_o}}$$

Ejemplo 1: Hallar la derivada de la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por $f(x)=x^2$ en el punto x_o = a

$$f'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(a+h)^2-a^2}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{a^2+h^2+2ah-a^2}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h^2+2ah}{h}=\lim_{h\to 0}h+2a=2a$$

6.2.1.- Derivadas laterales

Como acabamos de ver la derivada de una función es un límite, y sabemos, por el tema anterior, que para que exista el límite de una función definida a trozos en un punto, han de existir los límites laterales y ambos deben de ser iguales, por tanto:

- La función f es ***derivable por la izquierda*** si existe el límite por la izquierda de $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ cuando h tiende a 0. La *derivada por la izquierda* se simboliza por $f'(a^-)$.

- La función f es ***derivable por la derecha*** si existe el límite por la derecha de $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ cuando la h tiende a 0. La *derivada por la derecha* se simboliza por $f'(a^+)$.

Por tanto ***la función f es derivable en x_o*** si existen los límites por la izquierda y por la derecha y ambos coinciden.

$$f'(x_o)=f'(x_o^-)=f'(x_o^+)=\lim_{h\to 0^-}\frac{f(x_o+h)-f(x_o)}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{f(x_o+h)-f(x_o)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_o+h)-f(x_o)}{h}$$

Ejemplo 2: ***Estudiar la derivabilidad en 0 y -1 de la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por:*** $f(x)=\begin{cases}-2x-1 & si \quad x\le -1\\ x^2 & si \quad -1<x<0\\ senx & si \quad x\ge 0\end{cases}$

Derivabilidad en x=-1

Para que una función sea derivable en un punto ha de ocurrir que existan las derivadas laterales y éstas sean iguales:

$$\left.\begin{aligned}f'(-1^-)&=\lim_{h\to 0^-}\frac{f(-1+h)-f(-1)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{[-2(-1+h)-1]-[-2(-1)-1]}{h}=\lim_{h\to 0}-2=-2\\ f'(-1^+)&=\lim_{h\to 0^+}\frac{f(-1+h)-f(-1)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(-1+h)^2-(-2x-1-1)}{h}=\lim_{h\to 0}-2+h=-2\end{aligned}\right\}\begin{array}{l}f'(-1^+)=f'(-1^-)\\ \text{f es derivable en } x=-1\end{array}$$

Derivabilidad en x=0

$$\left.\begin{aligned}f'(0^-)&=\lim_{h\to 0^-}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(h)^2-sen(0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h^2}{h}=\lim_{h\to 0}(h)=0\\ f'(0^+)&=\lim_{h\to 0^+}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{sen(h)-sen(0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{sen(h)}{h}=1\end{aligned}\right\}\begin{array}{l}f'(0^+)\neq f'(0^-)\\ \text{f no es derivable en } x=0\end{array}$$

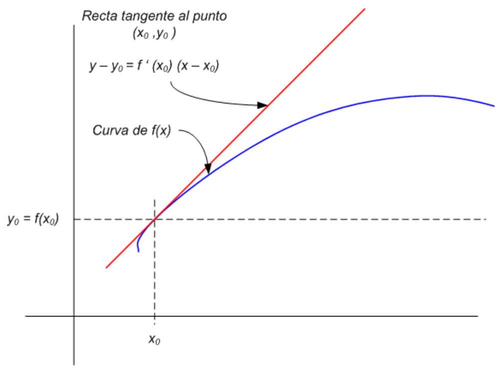
6.2.2.- Interpretación geométrica de la derivada: La recta tangente en un punto

El cálculo de la derivada de una función en un punto ***a***, nos permite escribir la ecuación de la recta tangente a la gráfica en el punto de abscisas ***a***, utilizando la ecuación punto pendiente:

$$\boxed{y=m(x-a)+b}$$

Donde ***m*** es la pendiente de la recta y ***b*** la ordenada en el origen.

$$\begin{cases}m=f'(a)\\ b=f(a)\end{cases}$$



Ejemplo 3: Calcular la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f(x) = $x^2 - 2x + 2$ en el punto de abscisa x=0.

Como la ecuación de la recta tangente es: $y - y_0 = m(x - x_o)$

Necesitamos y_o y lo calculamos sustituyendo en la función: $y_o=2$

$$f'(0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{(h^2-2h+2)-2}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{h^2-2h}{h} = \lim_{h\to 0} h-2 = -2$$

Así que con estos datos escribimos la ecuación de la recta tangente en x=0.

$$\left.\begin{array}{l} f(0)=2 \\ f'(0)=-2 \end{array}\right\} \Rightarrow$$ La ecuación de la recta tangente es: y = 2x-2

6.3.- Relación entre continuidad y derivabilidad

Una función f es derivable en un punto x_o, si f es continua en dicho punto.

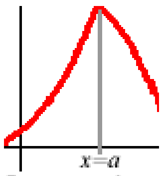
f derivable en x_o ➔ f continua en x_o	f no continua en x_o ➔ f no derivable en x_o

Hay funciones continuas que no son derivables, por ejemplo la función valor absoluto. En general las funciones que tienen picos no son derivables en los picos.

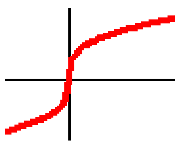
6.4.- Significado gráfico de la derivada. Suavidad

- Una función f es continua en un punto, x_o, si su gráfica atraviesa dicho punto.
- Una función f es derivable en un punto, x_o, si su gráfica lo atraviesa con suavidad, es decir, la gráfica de f no presenta "picos".
- Una función no es derivable:

  → En los puntos angulosos.
  → En los puntos de tangente vertical.
  → En los puntos de discontinuidad.



Punto anguloso


Derivada infinita (tangente vertical)

6.6.- Función derivada

Si una función f(x) es derivable en su dominio, es posible definir una nueva función que asocie a cada número real del dominio la derivada de la función en ese punto.

Esta función se llama ***función derivada*** o simplemente derivada.

$$\boxed{f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}}$$

Ejemplo 4: Calcular la función derivada de f(x) = X^4

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^4-(x)^4}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{x^4+4x^3h+6x^2h^2+4xh^3+h^4-x^4}{h} = \lim_{h\to 0} 4x^3+6x^2h\ +4xh^2+h^3 = 4x^3$$

Todas las derivadas están calculadas, y podemos resumirlas en una tabla:

Tipos	**Formas**	
	Función Simple	**Función Compuesta**
Constante	$\frac{d}{dx}(K)=0 \quad \forall k\in\mathbb{R}$	
Potencial	$\frac{d}{dx}\left(x^a\right)=a\cdot x^{a-1}$	$\frac{d}{dx}\left(u^a\right)=a\cdot u^{a-1}\cdot u'$
Raíz Cuadrada	$\frac{d}{dx}\left(\sqrt{x}\right)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\frac{d}{dx}\left(\sqrt{u}\right)=\frac{u'}{2\sqrt{u}}$
Logarítmica	$\frac{d}{dx}(\ln x)=\frac{1}{x}$ $\quad \frac{d}{dx}(\log_a x)=\frac{1}{\ln a}\cdot\frac{1}{x}$	$\frac{d}{dx}(\ln u)=\frac{u'}{u}$ $\quad \frac{d}{dx}(\log_a u)=\frac{1}{\ln a}\cdot\frac{u'}{u}$
Exponencial	$\frac{d}{dx}\left(e^x\right)=e^x$ $\quad \frac{d}{dx}\left(a^x\right)=a^x\cdot\ln a$	$\frac{d}{dx}\left(e^u\right)=e^u\cdot u'$ $\quad \frac{d}{dx}\left(a^u\right)=a^u\cdot u'\cdot\ln a$
Seno	$\frac{d}{dx}\left[sen(x)\right]=\cos(x)$	$\frac{d}{dx}\left[sen(u)\right]=\cos(u)\cdot u'$
Coseno	$\frac{d}{dx}\left[\cos(x)\right]=-sen(x)$	$\frac{d}{dx}\left[\cos(u)\right]=-sen(u)\cdot u'$
Tangente	$\frac{d}{dx}\left[tg(x)\right]=1+tg^2x$ $\quad \frac{d}{dx}\left[tg(x)\right]=\frac{1}{\cos^2 x}$	$\frac{d}{dx}\left[tg(u)\right]=\left[1+tg^2(u)\right]\cdot u'$ $\quad \frac{d}{dx}\left[tg(u)\right]=\frac{u'}{\cos^2 u}$
Cotangente	$\frac{d}{dx}\left[\text{cotg}(x)\right]=\frac{-1}{sen^2 x}$ $\frac{d}{dx}\left[\text{cotg}(x)\right]=-\left[1+ctg^2(x)\right]=-Cosec^2(x)$	$\frac{d}{dx}\left[ctg(u)\right]=\frac{-u'}{sen^2 u}$ $\frac{d}{dx}\left(ctg(u)\right)=-\left[1+ctg^2(u)\right]\cdot u'=-Cosec^2(u)\cdot u'$
Secante	$\frac{d}{dx}\left[Sec(x)\right]=Sec(x)\cdot tg(x)$	$\frac{d}{dx}\left[Sec(u)\right]=Sec(u)\cdot tg(u)\cdot u'$
Cosecante	$\frac{d}{dx}\left[\text{Cosec}(x)\right]=-Cosec(x)\cdot Cotg(x)$	$\frac{d}{dx}\left[\text{Cosec}(u)\right]=-Cosec(u)\cdot Cotg(u)\cdot u'$
Cotangente	$\frac{d}{dx}\left[\text{cotg}(x)\right]=-Cosec^2(x)$	$\frac{d}{dx}\left[\text{cotg}(u)\right]=-Cosec^2(u)\cdot u'$
Arco Seno	$\frac{d}{dx}\left[Arcsen(x)\right]=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\frac{d}{dx}\left[Arcsen(u)\right]=\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$
Arco Coseno	$\frac{d}{dx}\left[Arc\cos(x)\right]=\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\frac{d}{dx}\left[Arc\cos(u)\right]=\frac{-u'}{\sqrt{1-u^2}}$
Arco Tangente	$\frac{d}{dx}\left[Arctg(x)\right]=\frac{1}{1+x^2}$	$\frac{d}{dx}\left[Arctg(u)\right]=\frac{u'}{1+u^2}$
Arco Cotangente	$\frac{d}{dx}\left[\text{Arccotg}(x)\right]=\frac{-1}{1+x^2}$	$\frac{d}{dx}\left[\text{Arccotg}(u)\right]=\frac{-u'}{1+u^2}$

6.6.1.- Álgebra de Derivadas

Sean $f,g:S\subset\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ dos funciones derivables en a y $k\in\mathbb{R}$. Entonces, se verifica:

1) $(k\cdot f)'(a)=k\cdot f'(a)$

2) La derivada de la suma es la suma de las derivadas.

$$(g\pm f)(a)=g'(a)+f'(a)$$

3) La derivada del producto, es la derivada del primero por el segundo sin derivar, más la primera sin derivar por la derivada de la segunda.

$$(f\cdot g)'(a)=f'(a)\cdot g(a)+f(a)\cdot g'(a)$$

Si además g(a) ≠ 0, entonces $\frac{1}{f}$ y $\frac{f}{g}$ son derivables en a.

4) La derivada del cociente, es la derivada del primero por el segundo sin derivar, más la primera sin derivar por la derivada de la segunda, dividido por la segunda al cuadrado.

$$\left(\frac{1}{f}\right)'(a) = -\frac{g'(a)}{[g(a)]^2} \qquad \left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)\cdot g(a) - f(a)\cdot g'(a)}{[g(a)]^2}$$

5) ***Regla de la Cadena:*** Si g derivable en a y f derivable en g(a) ➔ $f \circ g$ es derivable en a

$$(f \circ g)'(a) = (f[g(a)])' = f'[g(a)]\cdot g'(a)$$

6.7.- Derivación Logarítmica

Cuando tenemos una función elevada a otra, la forma de calcular su derivada es un poco especial. Para calcularla seguiremos los siguientes pasos:

$$\text{Sea } f(x) = \left[g(x)\right]^{h(x)}$$

a) Aplicamos logaritmos en ambos lados de la igualdad:

$$\ln\left[f(x)\right] = \ln\left[g(x)\right]^{h(x)} = h(x)\cdot\ln\left[g(x)\right]$$

b) Después derivamos:

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = h'(x)\cdot\ln\left[g(x)\right] + h(x)\cdot\frac{g'(x)}{g(x)}$$

c) Despejamos f´(x):

$$f'(x) = f(x)\cdot\left(h'(x)\cdot\ln\left[g(x)\right] + h(x)\cdot\frac{g'(x)}{g(x)}\right)$$

d) Por último sustituimos f(x) por su valor:

$$f'(x) = \left[g(x)\right]^{h(x)}\cdot\left(h'(x)\cdot\ln\left[g(x)\right] + h(x)\cdot\frac{g'(x)}{g(x)}\right)$$

Ejemplo 5: **Calcula la derivada de la función** $f(x) = x^{2x+1}$

Aplicamos logaritmos: $\ln[f(x)] = (2x+1)\cdot\ln x$

Derivamos: $\frac{f'(x)}{f(x)} = 2\ln x + \frac{(2x+1)\cdot 1}{x}$

Despejamos: $f'(x) = f(x)\cdot 2\ln x + \frac{(2x+1)\cdot 1}{x}$

Y por último sustituimos: $f'(x) = x^{2x+1}\cdot\left(2\ln x + \frac{2x+1}{x}\right)$

6.8.- Derivabilidad de una función en un intervalo

Decimos que $f:]a,b[\to \mathbb{R}$ es una función derivable en (a,b), si es derivable en todo punto x_o de (a,b).

Decimos que $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ es una función derivable en [a,b], si es derivable en todo punto x_o de (a,b) y es derivable en a por la derecha y en b por la izquierda.

6.9.- Derivadas sucesivas

Se llama derivada segunda de f con respecto a x, y se simboliza f''(x) ó $\left(\frac{d^2 f}{dx^2}\right)$, a la derivada de la derivada de la función f(x), o a la derivada de f'(x).

Ejemplo 5: **Calcular la derivada tercera de la función f(x)=x⁴**

$f'(x) = 4x^3$ ➔ $f''(x) = 12x^2$ ➔ $f'''(x) = 24x$

De forma más general, se llama ***derivada n-ésima*** (o derivada de orden n) de f y se simboliza por $f^{(n}$ ó $\left(\frac{d^n f}{dx^n}\right)$ a la derivada de la función $f^{(n-1}$.

Para calcularla se utiliza la demostración por inducción, veamos un ejemplo.

Ejemplo 6: ***Calcular la derivada n-ésima de la función*** $f(x) = e^{2x}$

Empezamos calculando la primera derivada:

$$f'(x) = 2e^{2x}$$

Calculamos la segunda:

$$f''(x) = 2e^{2x} \cdot 2 = 2^2 e^{2x}$$

Calculamos la tercera:

$$f'''(x) = 2^2 e^{2x} \cdot 2 = 2^3 e^{2x}$$

Por lo tanto cabe esperar que la derivada n-ésima sea:

$$f^{n)}(x) = 2^n \cdot e^{2x}$$

Vamos a demostrarlo por inducción:

Sea $f^{n)}(x) = 2^n \cdot e^{2x}$, entonces $f^{n+1)}(x) = 2^{n+1} \cdot e^{2x}$, vamos a ver:

$$f^{n+1)}(x) = \frac{d}{dx} f^{n)}(x) = \frac{d}{dx} 2^n e^{2x} = 2^n e^{2x} \cdot 2 = 2^{n+1} \cdot e^{2x}$$

Por tanto queda demostrado que: $\boxed{f^{n)}(x) = 2^n \cdot e^{2x}}$

6.10.- Ejercicios Resueltos

1.- A partir de la definición de derivada de una función en un punto, calcular la derivada de las funciones f(X)=3X, en x_o=1, y $g(x)=\sqrt{x-5}$ en x_o=9.

$$f'(1)=\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{3x-3}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{3(x-1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}3=3$$

$$f'(9)=\lim_{x\to 9}\frac{f(x)-f(9)}{x-9}=\lim_{x\to 9}\frac{\sqrt{x-5}-2}{x-9}=\lim_{x\to 9}\frac{\sqrt{x-5}-2}{x-9}=\lim_{x\to 9}\frac{(\sqrt{x-5}-2)\cdot(\sqrt{x-5}+2)}{(x-9)(\sqrt{x-5}+2)}=$$
$$\lim_{x\to 9}\frac{x-9}{(x-9)(\sqrt{x-5}+2)}=\lim_{x\to 9}\frac{1}{\sqrt{x-5}+2}=\frac{1}{4}$$

2.- Estudiar la continuidad y la derivabilidad de la función $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}} & \text{si } x\neq 0\\ 0 & \text{si } x=0\end{cases}$ ***en x_o=0.***

Lo primero es estudiar la continuidad:

f(0)=0; $\lim_{x\to 0^+}\frac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}}=\frac{0}{+\infty}=0$ $\lim_{x\to 0^-}\frac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}}=\frac{0}{1}=0$, por tanto la función es contínua en x=0.

Veamos ahora si es derivable:

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}}}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}=0$$
$$\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{\frac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}}}{x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}=1$$

Vemos que las derivadas laterales en x=0 no coinciden, por tanto la función f(x) no es derivable en este punto.

Así que la función es contínua en cero, pero no es derivable.

3.- Sea k un número real y f una función real definida sobre R, mediante

$$f(x)=\begin{cases}x^2 sen\dfrac{1}{x}+kx & \text{si } x\neq 0\\ 0 \text{ si } x=0\end{cases}$$

a) Calcular la derivada de f en el punto x_o=0
b) Calcular la función derivada

a) $f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2 sen\frac{1}{x}+kx-0}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2 sen\frac{1}{x}+kx}{x}=\lim_{x\to 0}x sen\frac{1}{x}+k=k$

b) $f'(x)=\begin{cases}2xsen\dfrac{1}{x}+x^2\cos\left(\dfrac{1}{x}\right)\cdot\left(\dfrac{-1}{x^2}\right)+k \ \text{si}\,\text{k}\neq 0\\ k \ \text{si}\,\text{x}=0\end{cases}$

$$\boxed{f'(x)=\begin{cases}2xsen\dfrac{1}{x}-\cos\left(\dfrac{1}{x}\right)+k \ \text{si}\,\text{k}\neq 0\\ k \ \text{si}\,\text{x}=0\end{cases}}$$

4.- Estudiar la derivabilidad de la función $f(x)=\begin{cases}3x+5 & \text{si } x\leq \text{-1}\\ 2 & \text{si } \text{-1}<x\leq 1\\ x^2-3x+1 & \text{si } x>1\end{cases}$

Para que una función sea derivable en un punto, antes ha de ser contínua, vemos a simple vista que la función f(x) es contínua en x=-1 porque sus límites laterales coinciden y ambos coinciden con el valor de la función en el x=-1, veamos si es derivable en este punto:

$$f'(-1^-)=\lim_{x\to-1^-}\frac{f(x)-f(-1)}{x+1}=\lim_{x\to-1^-}\frac{3x+5-2}{x+1}=\lim_{x\to-1^-}\frac{3(x+1)}{x+1}=3$$
$$f'(-1^+)=\lim_{x\to-1+}\frac{f(x)-f(-1)}{x+1}=\lim_{x\to-1^+}\frac{2-2}{x+1}=\lim_{x\to-1^-}\frac{0}{x+1}=\frac{0}{0}$$ ➔ Indeterminado.

Por tanto la función no es derivable en x=-1

Veamos en x=1, Veamos a simple vista que los límites laterales no coinciden, por la izquierda es 2 y por la derecha es -1, por tanto la función no es contínua, y por tanto tampoco es derivable en x=1.

Así que podemos decir que la función no es derivable ni en x=-1, ni en x=1. En los restantes puntos de R si es contínua y derivable, por ser una función definida a trozos con tres ramas ambas polinómicas.

5.- Calcular a y b para que la función $f(x)=\begin{cases}x^3-x \ \text{si } x<\text{-1}\\ ax^2+bx \ \text{si } x\geq \text{-1}\end{cases}$ ***sea derivable.***

Como ya sabemos, para que una función sea derivable, ha de ser contínua, por tanto:

$$\lim_{x\to-1^-}f(x)=\lim_{x\to-1^-}x^3-x=0$$
$$\lim_{x\to-1^+}f(x)=\lim_{x\to-1^+}ax^2+bx=a-b$$
➔ Para que sea contínua, a=b

Veamos si es derivable:

Vamos a calcular las derivadas laterales en x=-1:

$$f'(-1^-)=\lim_{x\to-1^-}\frac{f(x)-f(-1)}{x+1}=\lim_{x\to-1^-}\frac{x^3-x-a+b}{x+1}=\lim_{x\to-1^-}\frac{x(x+1)(x-1)}{x+1}=\lim_{x\to-1^-}x(x-1)=2$$
$$f'(-1^+)=\lim_{x\to-1^+}\frac{f(x)-f(-1)}{x+1}=\lim_{x\to-1^+}\frac{ax^2+bx-a+b}{x+1}=\lim_{x\to-1^+}\frac{a(x+1)(x-1)+b(x+1)}{x+1}=$$
$$\lim_{x\to-1^+}a(x-1)+b=-2a+b$$

Y para que sea derivable ambas derivadas han de ser iguales. Por tanto:

$$\begin{cases} a = b \\ -2a + b = 2 \end{cases}$$ ➔ a=b=-2 Por tanto f es derivable para a=b=-2

6.- Calcular las derivadas de las funciones:

$$f(x) = \frac{x^3}{sen^2 x} \quad g(x) = tg^2\left(\frac{x}{2}\right) \quad h(x) = \sqrt{1+x^4} \quad I(x) = (Arcsenx)^{\cos^2 x}$$

$$f'(x) = \frac{3x^2(sen^2 x) - x^3 \cdot 2senx\cos x}{sen^4 x} = \frac{3x^2 sen^2 x - x^3 sen(2x)}{sen^4 x}$$

$$g'(x) = 2tg\left(\frac{x}{2}\right)\cdot\left(1+tg^2\left(\frac{x}{2}\right)\right)\cdot\frac{1}{2} = tg\left(\frac{x}{2}\right)\cdot\left(1+tg^2\left(\frac{x}{2}\right)\right)$$

$$h'(x) = \frac{1}{2\sqrt{1+x^4}}\cdot 4x^3 = \frac{2x^3}{\sqrt{1+x^4}}$$

Para la última aplicaremos derivación logarítmica:

$$\ln(I(x)) = \ln(Arcsenx)^{\cos^2 x} \Rightarrow \ln(I(x)) = Cos^2 x \cdot \ln(Arcsenx)$$

Derivamos:

$$\frac{I'(x)}{I(x)} = 2\cdot senx \cdot \cos x \cdot \ln(arcsenx) + \frac{1}{arcsenx}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\cos^2 x$$

Operamos y despejamos I(x):

$$I'(x) = I(x)\cdot\left(sen2x\cdot\ln(arcsenx) + \frac{\cos^2 x}{arcsenx}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right)$$

De donde:

$$\boxed{I'(x) = (Arcsenx)^{\cos^2 x}\cdot\left(sen2x\cdot\ln(arcsenx) + \frac{\cos^2 x}{arcsenx}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right)}$$

7.- Derivar y simplificar:

$$f(x) = Arctg\frac{1+x}{1-x} - Arctgx \qquad g(x) = \left(\frac{x^2}{2} - \frac{1}{4}\right)\cdot Arcsenx + \frac{x}{4}\sqrt{1-x^2}$$

$$f'(x) = \frac{1}{1+\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^2}\cdot\frac{(1-x)+(1+x)}{(1-x)^2} - \frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{\frac{(1-2x+x^2)+(1+2x+x^2)}{1-2x+x^2}}\cdot\frac{2}{(1-x)^2} - \frac{1}{1+x^2} =$$

$$= \frac{1}{\frac{2(1+x^2)}{1-2x+x^2}}\cdot\frac{2}{(1-x)^2} - \frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{1+x^2} = 0$$

$$g'(x) = xarcsenx + \left(\frac{x^2}{2} - \frac{1}{4}\right)\cdot\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{4}\sqrt{1-x^2} + \frac{x}{4}\cdot\frac{1}{2\sqrt{1-x^2}}\cdot(-2x) =$$

$$xarcsenx + \frac{2x^2-1}{4\sqrt{1-x^2}} + \frac{\sqrt{1-x^2}}{4} - \frac{x^2}{4\sqrt{1-x^2}} = xarcsenx + \frac{(2x^2-1)+(1-x^2)-x^2}{4\sqrt{1-x^2}} = xarcsenx$$

8.- Calcular la derivada n-ésima de la función $f(x)=e^{2x}$

Empezamos calculando la primera derivada:

$$f'(x)=2e^{2x}$$

Calculamos la segunda:

$$f''(x)=2e^{2x}\cdot 2=2^2e^{2x}$$

Calculamos la tercera:

$$f'''(x)=2^2e^{2x}\cdot 2=2^3e^{2x}$$

Por lo tanto cabe esperar que la derivada n-ésima sea:

$$f^{n)}(x)=2^n\cdot e^{2x}$$

Vamos a demostrarlo por inducción:

Sea $f^{n)}(x)=2^n\cdot e^{2x}$, entonces $f^{n+1)}(x)=2^{n+1}\cdot e^{2x}$, vamos a ver:

$$f^{n+1)}(x)=\frac{d}{dx}f^{n)}(x)=\frac{d}{dx}2^ne^{2x}=2^ne^{2x}\cdot 2=2^{n+1}\cdot e^{2x}$$

Por tanto queda demostrado que: $\boxed{f^{n)}(x)=2^n\cdot e^{2x}}$

9.- Hallar un punto del intervalo [0,1], donde la tangente a la curva $f(x)=1+x-x^2$***, sea paralela al eje de abscisas***.

Si la recta tangente es paralela al eje de abscisas, es porque su pendiente es cero, entonces en ese punto la derivada es cero:

$$f'(c)=0$$

Calculamos la derivada f(x):

$$f'(c)=1-2c$$

Y tiene que ser igual a cero.

$$f'(c)=0 \Rightarrow 1-2c=0 \Rightarrow C=\frac{1}{2}$$

Vemos que el punto donde la curva de f(x) tiene una tangente de pendiente cero, o paralela al eje OX, es en el x=0,5, que por supuesto pertenece al intervalo [0,1].

10.- Hallar los puntos en los que la tangente a la curva $f(x)=\frac{x^3}{3}-x^2-3x+1$ ***sea:***

a) Paralela el eje OX

b) Paralela a la recta: $g(x)=5x+3$

c) Perpendicular a la recta: $h(x)=\frac{x}{3}+1$

a) Si la recta tangente es paralela al eje OX, entonces su pendiente es cero. m=0.

$$\left.\begin{array}{l} f'(c)=0 \\ f'(c)=c^2-2c-3 \end{array}\right\} \Rightarrow c^2-2c-c=0 \Rightarrow \begin{cases} c=-1 \\ c=3 \end{cases}$$

Entonces la curva de f(x) tiene rectas tangentes paralelas al eje Ox en los puntos x=-1 y x=3.

b) Si la recta tangente es paralela a otra, entonces su pendiente es la misma que la de esta otra recta. Por tanto aquí m=5.

Así que:

$$\left.\begin{array}{l} f'(c)=5 \\ f'(c)=c^2-2c-3 \end{array}\right\} \Rightarrow c^2-2c-3=5 \Rightarrow c^2-2c-8=0 \Rightarrow \begin{cases} c=4 \\ c=-2 \end{cases}$$

Entonces la curva de f(x) tiene rectas tangentes paralelas a la recta y=5x+3 los puntos x=-2 y x=4.

c) Si la recta tangente es perpendicular a otra recta, entonces su pendiente es la opuesta de la inversa, es decir: Si como en este caso la pendiente de la recta es $m=\frac{1}{3}$, lo que hacemos es invertirla: $m'=3$, y después le cambiamos el signo: $m''=-3$.

Por tanto:

$$\left.\begin{array}{l} f'(c)=-3 \\ f'(c)=c^2-2c-3 \end{array}\right\} \Rightarrow c^2-2c-3=-3 \Rightarrow c^2-2c=0 \Rightarrow \begin{cases} c=0 \\ c=2 \end{cases}$$

Entonces la curva de f(x) tiene rectas tangentes perpendiculares a la recta $\frac{x}{3}+1$ en los puntos x=0 y x=2.

11.- Halla el punto de la curva $f(x)=\ln(1+x^2)$ en el que la tangente es perpendicular a la tangente trazada por el punto de abscisa x=1.

En este ejercicio lo primero es calcular la recta tangente en el punto x=1.

Calculamos f'(1): $f'(x)=\frac{2x}{1+x^2}$ ➔ $f'(1)=\frac{2}{2}=1$, por tanto la pendiente de la recta tangente en x=1 es m=1.

Como dicen que es perpendicular, la invertimos y le cambiamos el signo: $m'=-1$

Así que:

$$\left.\begin{array}{l} f'(c)=-1 \\ f'(c)=\frac{2c}{1+c^2} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{2c}{1+c^2}=-1 \Rightarrow 2c=-1-c^2 \Rightarrow c^2+2c+1=0 \Rightarrow (c+1)^2=0 \Rightarrow c=-1$$

Entonces la curva de f(x) tiene una recta tangente perpendicular a la recta tangente trazada en el punto x=1 en el punto de abscisa x=-1.