APUNTES DE MATEMÁTICAS

TEMA 5: GEOMETRÍA AFÍN

PROBLEMAS MÉTRICOS

1º BACHILLERATO

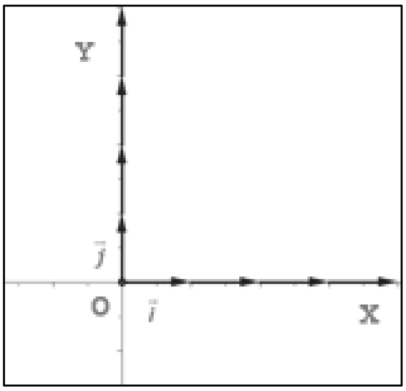
S3r4

ÍNDICE

1. ECUACIONES DE LA RECTA EN EL PLANO.

1.1. Sistemas de referencia

Un sistema de referencia para el plano consiste en una terna $R = \{O, \vec{u}_1, \vec{u}_2\}$ donde O es un punto cualquiera y $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2\}$ es una base, no necesariamente ortonormal, aunque si



$\{\vec{u}_1, \vec{u}_2\}$ es ortonormal todo es mas fácil, en este tema suponemos la base ortonormal, por tanto la referencia será $\{R = \{O, \vec{i}, \vec{j}\}\}$

Los vectores de la base son perpendiculares y unitarios.

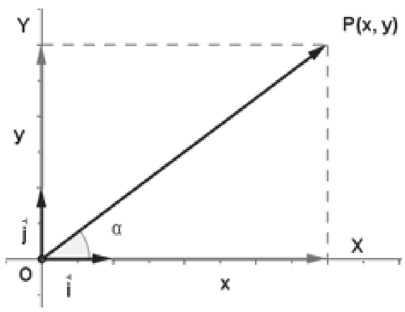
Se representan por las letras. $\{\vec{i}, \vec{j}\}$ los vectores de la base

$\vec{i} = 1\vec{i} + 0\vec{j}$ $\qquad$ $\vec{i} = (1,0)$

$\vec{j} = 0\vec{i} + 1\vec{j}$ $\qquad$ $\vec{j} = (0,1)$

Las rectas **OX**, **OY** se llaman **ejes de coordenadas** o ejes coordenados cartesianos.

1.2. COORDENADAS DE UN PUNTO



Si fijamos una base ortonormal en O, tendremos un sistema de referencia respecto al cual fijar las coordenadas de los puntos del plano

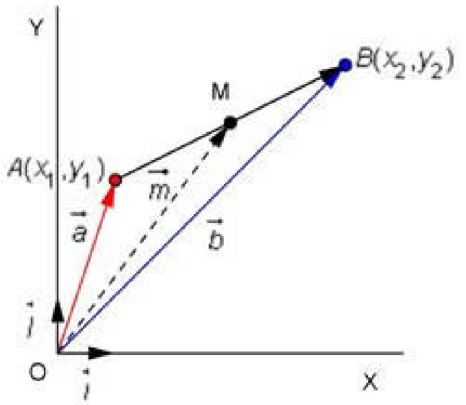
Se llaman coordenadas del punto A a las coordenadas del vector OA respecta a la base

P(x,y) ➔ *OP=x*$\vec{i}$ *+y*$\vec{j}$

1.3. COORDENADAS DEL PUNTO MEDIO DE UN SEGMENTO.

Dado el segmento de extremos $A = (x_1, y_1)$ y $B = (x_2, y_2)$ las coordenadas del punto medio son $M = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$

EJEMPLO



Semisuma de las coordenadas de los extremos

$$\vec{m}=\frac{1}{2}(\vec{a}+\vec{b})$$

$$x_m=\frac{1}{2}(x_1+x_2), y_m=\frac{1}{2}(y_1+y_2)$$

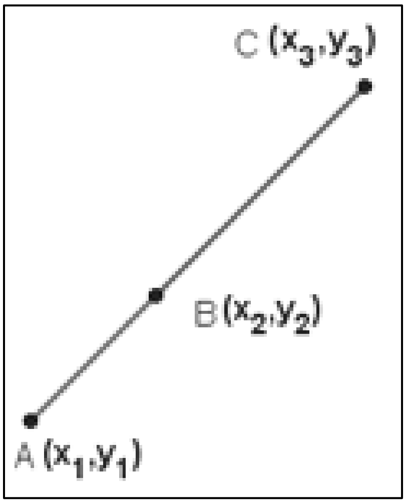
Calcular las coordenadas del punto medio si A (1,3) y B (5,5)

$$x_m=\frac{1+5}{2}=3, y_m=\frac{3+5}{2}=4$$ M (3 ,4)

1.3.1. SIMÉTRICO DE UN PUNTO RESPECTO A OTRO

A’ es el simétrico de A respecto a P si P es el punto medio de AA’

1.3.2. CONDICIÓN PARA QUÉ TRES PUNTOS ESTÉN ALINEADOS



Los **puntos** $A=(x_1,y_1)$ $B=(x_2,y_2)$ y $\boldsymbol{C}=(\boldsymbol{x}_3,\boldsymbol{y}_3)$ **están alineados** siempre que l**os vectores** AB y AC **tengan la misma dirección**. Esto ocurre cuando sus **coordenadas** son **proporcionales**.

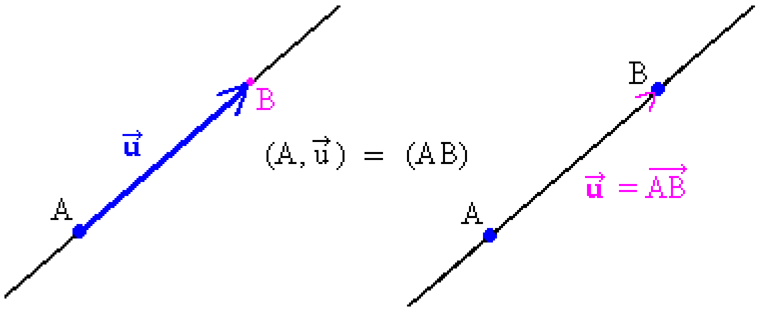
$$\frac{x_2-x_1}{x_3-x_2}=\frac{y_2-y_1}{y_3-y_2}$$

1.4. DISTANCIA ENTRE DOS PUNTOS

Dados dos puntos A y B la distancia entre dos puntos es el módulo del vector que los une:

$$d(A,B)=|\overline{AB}|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$

2. VECTOR DIRECTOR DE UNA RECTA

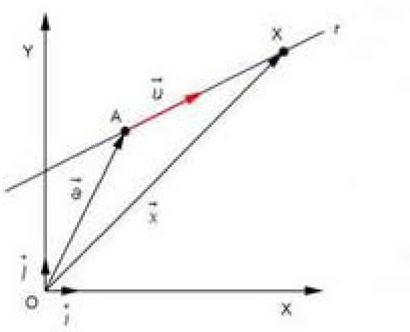


Un **vector director** es, como bien lo indica su nombre, un vector que da la dirección de una recta. Cada recta tiene infinitos vectores de dirección. Todos ellos son proporcionales

2.1. DISTINTAS FORMAS DE LA ECUACIÓN DE UNA RECTA.

Todo punto X(x,y) de la recta tiene mismas coordenadas que el vector OX. El vector OX

se puede expresar como suma del vector OA+AX , con A punto de la recta, y de un número de veces el vector director . Veamos un ejemplo:



Para hallar la ecuación de una recta necesitamos un punto por el que la recta pase, $A=(x_0,y_0)$ y un vector contenido en ella que nos indique su dirección llamado vector director $\overrightarrow{v_d} = (p,q)$.

2.1.1. ECUACIÓN VECTORIAL:

$$\boldsymbol{OX = OA + k\ \vec{v}_d}$$

PASANDO A COORD : OX=(x,y) $OA = (x_{0,} y_0)$ $v = (p,q)$ ➔*OX-OA=λ v*

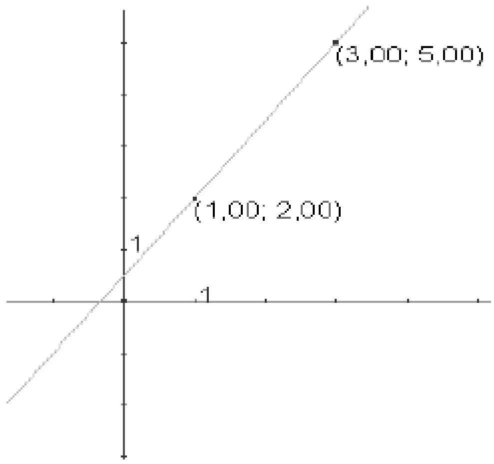
$$(x - x_{0,} y - y_0) = \lambda(p,q)$$

2.1.2. ECUACIÓN PARAMÉTRICA:

La ecuación en paramétricas se obtiene separando las dos coordenadas:

$$\left.\begin{array}{l} x = x_0 + \lambda p \\ y = y_0 + \lambda q \end{array}\right\}$$

Ejemplo: Expresar la recta que pasa por los puntos A(1,2) y B(3,5) en forma vectorial y paramétrica. Obtener dos puntos más de la recta:



1) Tomemos uno de los puntos como punto de la recta, por ejemplo A: (1,2)

2) El vector director es el vector que forman los puntos A y B=>AB=(2,3)

Vectorial $(x, y) = (1,2) + \lambda(2,3)$

Paramétricas r: $\left.\begin{array}{l} x = 1 + 3\lambda \\ y = 2 + 3\lambda \end{array}\right\}$

Puntos de la recta dando valores a t:

- *λ=0 (x,y)=(1,2) que es A*
- *λ=1 (x,y)=(3,5) que es B*
- *λ=0.5 (x,y)=(2,3.5)*
- *λ=-1 (x,y)=(-1,-1)*

2.1.3. ECUACIÓN CONTINUA:

En las dos ecuaciones paramétricas de r lo que vamos a hacer es eliminar la λ del sistema y relacionar “y” con “x” como si fuera una función.

$$\frac{x - x_0}{p} = \frac{y - y_0}{q}$$

El vector director es $\overrightarrow{v_d} = (p, q)$

Nota:

Si p=0 entonces es una recta paralela al eje OY >>>> r: $x=x_0$
Si q=0 entones es una recta paralela al eje OX >>>>> r: $y=y_0$

2.1.4. ECUACIÓN GENERAL, IMPLÍCITA.,:

Ecuación general: consiste en multiplicar en cruz en la ecuación continua, y ordenar todos los términos en el mismo lado de la igualdad, obteniendo la siguiente expresión:

Ax+By+C=0 ;

El vector director es $\overrightarrow{v_d} = (-B, A)$

Ejemplo 1: la recta que pasa por $P_r(3,-2)$ y $\overrightarrow{v_r}=(1,-2)$ tiene la ecuación continua:

r: $\frac{x-3}{1} = \frac{y+2}{-2} \rightarrow -2x+6=y+2$

r: $2x+y-4=0$

2.1.5. ECUACIÓN EXPLÍCITA:

Se obtiene despejando la y de la ecuación general, de laecuación punto pendiente o de la continua:

$$y = mx + n$$

donde ***m= pendiente =*** $\frac{2^a\, coord.\overrightarrow{v_d}}{1^a\, coord.\overrightarrow{v_d}}$

El valor de n se llama ordenada en el origen pues el valor de y cuando x=0. Así la rectar pasará por el punto (0,n).

2.1.6. ECUACIÓN PUNTO-PENDIENTE:

Ecuación punto pendiente: se llama así porque se obtiene fácilmente a partir de conocer un punto de la recta $P(x_0,y_0)$ y la pendiente m.

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

3. PROBLEMAS METRICOS

3.1. POSICIONES RELATIVAS DE DOS RECTAS.

Dadas dos rectas **r** y **s** de ecuaciones ***Ax+By+C=0*** y ***A'x+B'y+C'=0***, pueden presentar las siguientes posiciones:

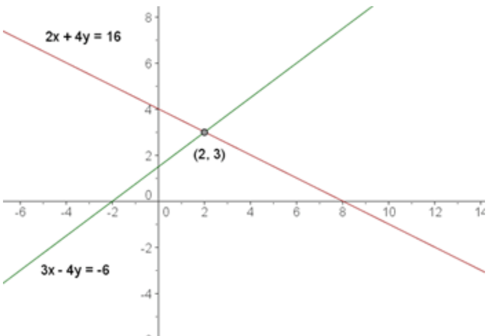
En este apartado veremos las posiciones relativas entre dos rectas, que pueden ser:

- Secantes: se cortan en un punto
- Paralelas: si no tienen ningún punto en común (misma pendiente, o vector director)
- Coincidente: son la misma recta (dos puntos en común).

La posición relativa la hemos estudiado indirectamente cuando veíamos las soluciones de un sistema, ya que:

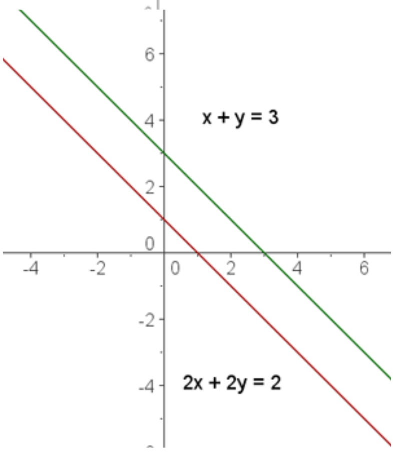
1. Si dos rectas son paralelas no se cortan y no tienen solución. *Sistema Incompatible*
2. si son secantes se cortan en un punto y por tanto una solución. *Sistema compatible determinado*
3. si son coincidentes son la misma recta e infinitas soluciones. *Sistema compatible indeterminado.*

Si expresamos las dos rectas en forma general, tenemos



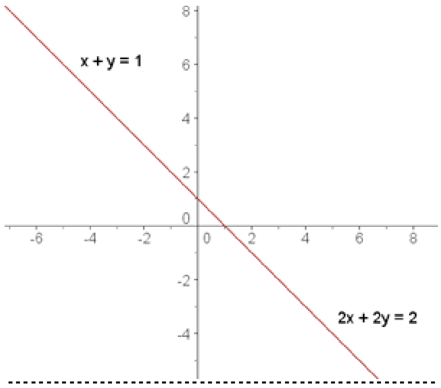
Secantes

$$\frac{A}{A'} \neq \frac{B}{B'}$$



Paralelas

$$\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} \neq \frac{C}{C'}$$



Coincidentes

$$\frac{A}{A'}=\frac{B}{B'}=\frac{C}{C'}$$

3.1.1. EJEMPLO:

Estudia las **posiciones relativas** de los siguientes pares de **rectas**:

$$\begin{cases} r\equiv 2x+3y-1=0 \\ s\equiv 4x+6y-5=0 \end{cases} \qquad \frac{2}{4}=\frac{3}{6}\neq\frac{-1}{-5} \quad \text{PARALELAS}$$

$$\begin{cases} r\equiv x-2y+3=0 \\ s\equiv -2x+4y-6=0 \end{cases} \qquad \frac{-1}{2}=\frac{-2}{4}=\frac{3}{-6} \quad \text{COINCIDENTES}$$

$$\begin{cases} r\equiv y=2x+1 \\ s\equiv y=2x-5 \end{cases} \qquad m_r=m_s=2 \quad \textit{Paralelas}$$

$$\begin{cases} r\equiv -y+2x+1 \\ s\equiv -y+2x-5=0 \end{cases} \qquad \frac{2}{2}=\frac{-1}{-1}\neq\frac{1}{-5} \quad \text{PARALELAS}$$

3.2. CONDICIONES DE PARALELISMO Y PERPENDICULARIDAD.

dos rectas son perpendiculares si sus vectores directores son perpendiculares, y por tanto su producto escalar es cero. Una forma de conseguir un vector perpendicular a uno dado, es cambiar las coordenadas x por y, y un signo de una de las dos coordenadas

$$\overrightarrow{v_1}\cdot\overrightarrow{v_2}=(v_{1x},v_{1y})\cdot(v_{1y},-v_{1x})=-v_{1x}\cdot v_{1y}-v_{1x}\cdot v_{1y}=0\rightarrow \overrightarrow{v_1}\perp\overrightarrow{v_2}$$

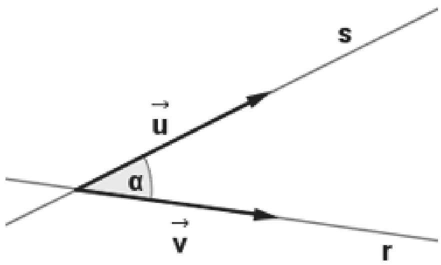
$$m_2=\frac{v_{2y}}{v_{2x}}=-\frac{v_{1x}}{v_{1y}}=-\frac{1}{m_1}.$$

Dadas dos rectas $r\equiv y=m_r x+n_r \quad s\equiv y=m_s x+n_s$

Dos rectas r y s son paralelas si $\Leftrightarrow$	$m_r=m_s$
Dos rectas r y s son perpendiculares si $\Leftrightarrow$	$m_r=\dfrac{-1}{m_s}$

Dos rectas paralelas serán las que tengan los vectores directores proporcionales, de tal forma que estos tengan misma dirección. Veamos como por tanto tienen misma pendiente:

3.3. ÁNGULO ENTRE DOS RECTAS.



Se llama **ángulo de dos rectas** al menor de los ángulos que forman éstas.

Se pueden obtener a partir de:

1 **Sus vectores directores**

$$\cos \boldsymbol{a} = \frac{|\boldsymbol{u}_1\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{u}_2\boldsymbol{v}_2|}{\sqrt{\boldsymbol{u}_1^{\,2} + \boldsymbol{u}_2^{\,2}}\sqrt{\boldsymbol{v}_1^{\,2} + \boldsymbol{v}_2^{\,2}}}$$

2 Sus pendientes

Dadas las rectas r y s, sea $\alpha = áng(r,s)$ ➔ $tg\alpha = \left|\frac{m_r - m_s}{1 + m_r . m_s}\right|$

3.3.1. Ejemplo

Las rectas r y s se cortan en un punto A, que es vértice de un triángulo obtusángulo en A. Determina el ángulo A de ese triángulo.

$$r \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y}{3} \qquad s \equiv \frac{x}{1} = \frac{y-2}{-2}$$

$$\vec{v}_r = (2,3) \qquad \vec{v}_s = (1,-2)$$

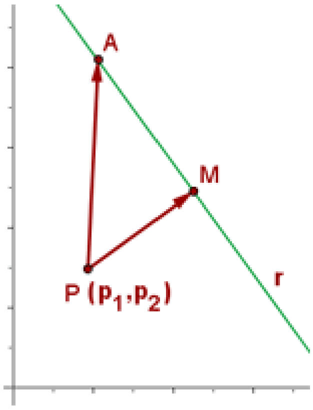
$$\cos\alpha = \frac{|2\cdot 1 - 3\cdot(-2)|}{\sqrt{2^2+3^2}\cdot\sqrt{1^2+(-2)^2}} = 0.49614$$

$$\alpha = 60°\ 15' \qquad A = 180° - 60°\ 15' = 119°\ 45'$$

3.4. DISTANCIA ENTRE DOS PUNTOS.

Sean los puntos $A=(x_0,y_0)$ y $B=(x_1,y_1)$ ➔ d(A,B) = $\sqrt{(x_1-x_0)^2+(y_1-y_0)^2}$

3.5. DISTANCIA DE UN PUNTO A UNA RECTA.



La distancia de un punto a una recta es la longitud del segmento perpendicular a la recta, trazada desde el punto.

Sea $P = (p_1, p_2)$ punto exterior a la recta r de ecuación Ax+By+C=0➔

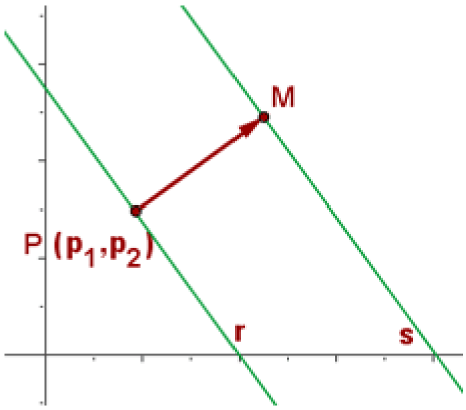
$$d(P,r) = \left|\frac{Ap_1 + Bp_2 + C}{\sqrt{A^2 + B^2}}\right|$$

3.5.1. EJEMPLO

Calcula la **distancia del punto** P(2,- 1) a la **recta** r de ecuación 3 x + 4 y = 0.

$$d(P,r) = \frac{|3.2 + 4.(-1)|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{2}{5}$$

3.6. Distancia entre rectas



Para hallar la distancia entre dos en rectas paralelas, se toma un punto cualquiera, P, de una de ellas y calcular su distancia a la otra recta.

$$d(r,s) = d(P,s)$$

Otra manera de expresar la distancia entre dos rectas es:

$$d(r,s) = \frac{|C' - C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

3.6.1. EJEMPLO

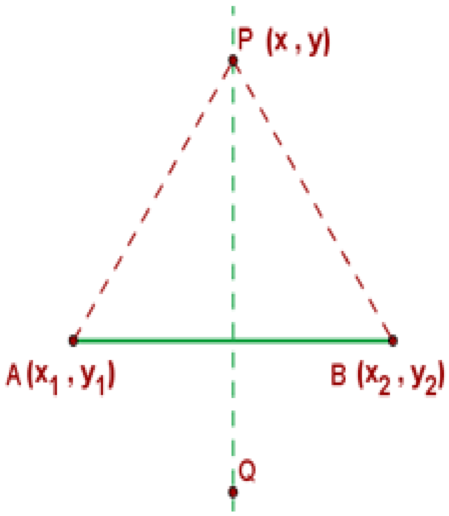
Hallar la distancia entre las rectas:

$$r \equiv \begin{cases} x = 2 - 3k \\ y = 1 + k \end{cases} \qquad s \equiv \frac{x+3}{-3} = \frac{y+5}{1}$$

$$r \equiv x + 3y - 5 = 0 \qquad s \equiv x + 3y + 18 = 0$$

$$d(r,s) = \frac{|18+5|}{\sqrt{1^2+3^2}} = \frac{23}{\sqrt{10}}$$

3.7. MEDIATRIZ Ecuación de la mediatriz



Mediatriz de un segmento es el lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan de los extremos.

d(P,A)=d(P,B)

Si $P = (x, y); A = (x_1, y_2); B(x_2, y_2)$

Entonces

$$\sqrt{(x-x_1)^2+(y-y_1)^2} = \sqrt{(x-x_2)^2+(y-y_2)^2}$$

.

Para calcular la mediatriz no tenemos más que aplicar la definición, así tenemos dos métodos.

Método1: A partir de la definición: Es la perpendicular a la recta AB que pasa por el punto medio

- Calculamos el punto medio de AB, que llamaremos M
- Calculamos la pendiente de la recta que pasa por A B, y luego coma la recta es perpendicular m'=-1/m

Método 2: a partir de la s definición de lugar geométrico

- Calculamos la distancia de un punto arbitrario P(x,y) de la mediatriz al punto A y al punto B
- Igualamos las distancias y obtendremos la recta

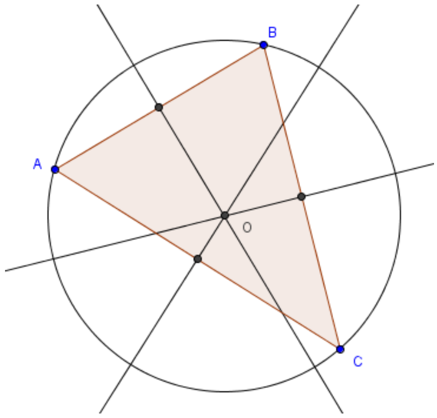
Ejemplo: calcular la mediatriz del segmento AB, con A(0,5) y B(3,-1)

1) d(P,A)= $\sqrt{(x-0)^2+(y-5)^2}$

d(P,B)= $\sqrt{(x-3)^2+(y+1)^2}$

2) d(P,A)=d(P,B) $x^2+(y-5)^2=(x-3)^2+(y+1)^2$ => 4y-2x-5=0 => r: y=1/2x+5/4

3.7.1. CIRCUNCENTRO

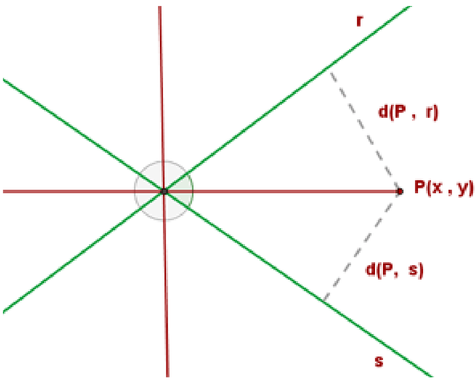


Definición: el circuncentro de un triángulo es el punto que se obtiene de la intersección de las 3 mediatrices. Se cumple que es el centro de la circunferencia que circunscribe el triángulo, ya que el punto donde se cortan las mediatrices equidista de los tres vértices.

Cálculo del circuncentro, dos pasos:

1. Calcular las mediatrices de dos de los tres lados.
2. Calcular la intersección de estas dos mediatrices.

3.8. Ecuaciones de las bisectrices



Bisectriz de un ángulo es el lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan de las rectas que forman el ángulo

$$\boldsymbol{d(P,r) = d(P,s)}$$

Si las ecuaciones de r y s son:

$$r \equiv A_1 x + B_1 y + C_1 = 0$$
$$s \equiv A_2 x + B_2 y + C_2 = 0$$

Ecuaciones de las dos bisectrices:

$$\frac{|A_1 x + B_1 y + C_1|}{\sqrt{A_1 + B_1}} = \frac{|A_2 x + B_2 y + C_2|}{\sqrt{A_2 + B_2}}$$

3.8.1. EJEMPLO

Hallar las ecuaciones de las bisectrices de los ángulos que determinan las rectas

r ≡ 3x - 4y + 5 = 0 y s ≡ 6x + 8y + 1 = 0.

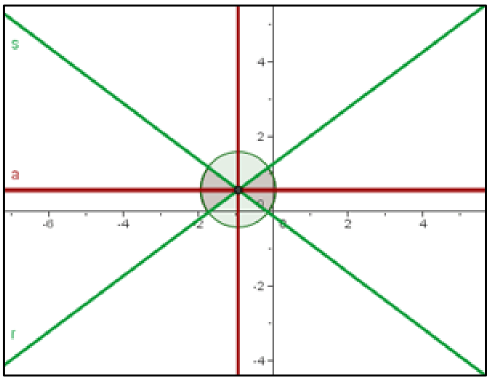
$$\frac{|3x-4y+5|}{\sqrt{3^2+4^2}}=\frac{|6x+8y+1|}{\sqrt{6^2+8^2}}$$

$$10(3x-4y+5)=5(6x+8y+1)\rightarrow 2(3x-4y+5)=6x+8y+1$$

$$6x-8y+10=6x+8y+1\rightarrow -16y-9=0$$

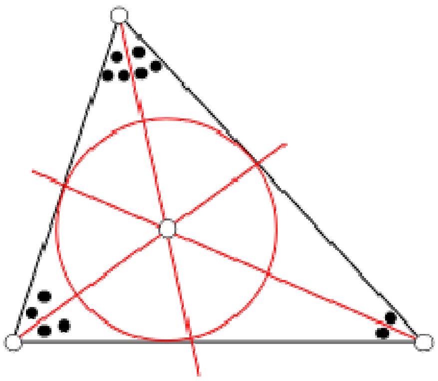
$$10(3x-4y+5)=-5(6x+8y+1)\rightarrow 2(3x-4y+5)=-6x-8y-1$$

$$6x-8y+10=-6x-8y-1\rightarrow 12x+11=0$$



3.8.2. INCENTRO

Definición: el incentro de un triángulo es el lugar donde corta las 3 bisectrices internas del mismo. Se cumple que es el centro de la circunferencia inscrita en el triángulo.



Pasos para calcular el incentro:

1. Calcular las bisectrices internas de dos vértices.

2. Calcular el punto de corte de estas dos bisectrices (resolver el sistema)

3.9. ELEMENTOS DE UN TRIÁNGULO.

1.- ***Long. Lados***: Distancia entre dos vértices.

2.- ***Ecuaciones de los lados:*** Recta que pasa por dos puntos.

3.- ***Long. Alturas:*** Distancia vértice al lado opuesto.

4.- ***Ecuac. Alturas:*** Recta que \`pasa por un vértice y es perpendicular al lado opuesto.

5.- ***Ortocentro:*** Corte de las alturas.

6.- ***Medianas:*** Rectas que pasan por un vértice y por el punto medio del lado opuesto.

7.- ***Baricentro:*** Punto de corte de las medianas $\Rightarrow \left(\frac{x_0 + x_1 + x_2}{3}, \frac{y_0 + y_1 + y_2}{3} \right)$

8.- ***Mediatrices:*** Recta perpendicular a un lado que pasa por su punto medio.

9.- ***Circuncentro:*** Corte mediatrices.

10.- ***Área:***

$$S = \frac{d(A,C).d(B,AC)}{2}$$

3.10. RELACIÓN DE PROBLEMAS TIPOS:

1.- Hallar la distancia del origen a los puntos A=(5,12) y B=(-3,4).

2.- Hallar todas las formas de la ecuación de la recta que pasa por el punto P=(1,3) y tiene por vector director $\vec{v} = (2,-1)$.

3.- Hallar la ecuación de la recta que pasa por los puntos P=(5,0) y Q=(3,-1).

4.- Hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto P=(1,2) y es paralela a la recta s de ecuación x-y+5=0.

5.- Hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto P=(2,3) y es perpendicular a la recta 2x-3y+1=0.

6.- Determinar el ángulo que forman los siguientes pares de rectas:

a) r $\Rightarrow \left.\begin{array}{l} x = 3 + 2\lambda \\ y = -1 + 2\lambda \end{array}\right\}$ s $\Rightarrow$ $x - 2 = \dfrac{y+4}{2}$

b) r $\Rightarrow$ 2x-3y+3=0 s $\Rightarrow$ 3x+2y-1=0

7.- Determinar el valor de m para que las siguientes rectas r$\Rightarrow 2x + my - 5 = 0$ y s$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} x = 1 + t \\ y = 2 - 3t \end{array}\right\}$ sean:

a) Paralelas.

b) Perpendiculares

c) Formen un ángulo de 45º.

8.- Una recta de ecuación x-2y+5=0 es mediatriz del segmento $\overleftrightarrow{AB}$, cuyo extremo A=(1,4). Hallar las coordenadas del extremo B.

9.- La recta 3x-5y+15=0 corta a los ejes de coordenadas en dos puntos. Hallar la ecuación de la mediatriz del segmento formado por dichos puntos de cortes.

10.- Hallar la ecuación de la recta que pasando por el punto P=(-2,5) forma un ángulo de 45º con la recta x-y=0.

11.- Hallar las ecuaciones de la recta que pasando por el punto P=(2,1) distan 3 unidades del punto Q=(2,-4).

12.- Dada la recta s $\Rightarrow$x-2y-4=0 y el punto P=(1,1), hallar el punto simétrico de P respecto la recta s.

13.- Hallar los puntos de la recta x-y=0 que disten 2 unidades del punto P=(2,0).

14.- Hallar todos los elementos del triángulo de vértices A=(0,0), B=(0,2) y C=(2,0).