

1. Dada la función $f(x) = \begin{cases} \frac{5}{x-5} & \text{si } x \leq 0 \\ \sqrt{x+1} & \text{si } 0 < x \leq 3 \\ \frac{10}{x+2} & \text{si } x > 3 \end{cases}$ se pide:

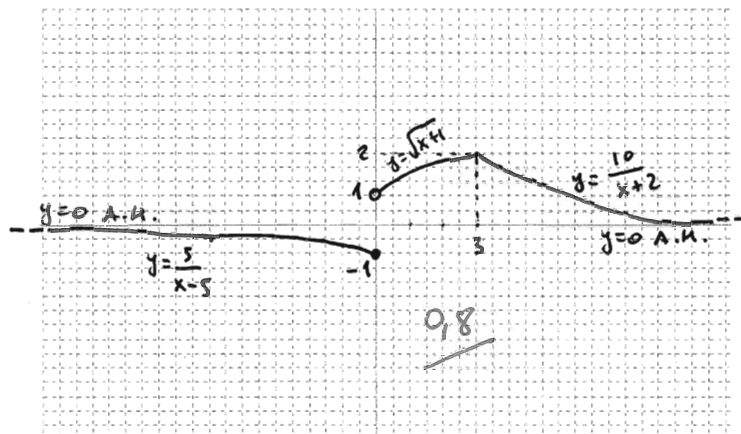
(2,5 puntos)

a) Gráfica.

x	$-\infty \dots -95 \dots$	-5	-4	-3	-2	-1	0
$y = \frac{5}{x-5}$	$0^- \dots -0,05 \dots$	-0,5	-0,3	-0,25	-0,2	-0,13	-1

x	0	1	2	3
$y = \sqrt{x+1}$	1	1,41	1,73	2

x	3	4	5	6	7	$\dots 98 \dots \infty$
$y = \frac{10}{x+2}$	2	1,6	1,43	1,25	1,1	$\dots 0,1 \dots 0^+$



b) Dom(f) e Im(f)

$\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$ $\text{Im}(f) = [-1, 0) \cup (0, 2] = [-1, 2] - \{0\}$

c) Intervalos de crecimiento. Posibles M y m.

$f(x) \nearrow \forall x \in (-\infty, 0) \cup (3, \infty)$ $M(3, 2)$
 $f(x) \searrow \forall x \in (0, 3)$

d) Continuidad.

$f(x)$ continua $\forall x \in \mathbb{R} - \{0\}$

nota: 2,5

e) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -1 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1 \end{cases} \Rightarrow \text{No existe } \lim_{x \rightarrow 0} f(x)$

$\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = 2 \\ \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = 2 \end{cases} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 2$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0 \quad 0.1$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0 \quad 0.1$$

f) Ecuación de las posibles asíntotas.

$$y = 0 \text{ A.N.} \quad 0.1$$

g) Hallar la antiimagen de $y=3/2$

$$y = \frac{3}{2} \xrightarrow{2^{\text{a rama}}} \sqrt{x+1} = \frac{3}{2}; \quad x+1 = \frac{9}{4}; \quad x = \frac{9}{4} - 1 = \frac{5}{4} \quad 0.25$$

$$\downarrow 3^{\text{a rama}} \\ \frac{10}{x+2} = \frac{3}{2}; \quad 20 = 3x+6; \quad 14 = 3x; \quad x = \frac{14}{3} \quad 0.25$$

2. a) Calcular: $\log \frac{\sqrt[3]{100}}{10} = \log \sqrt[3]{100} - \log 10 = \frac{1}{3} \log 100 - \log 10 = \frac{1}{3} \log 10^2 - \log 10^1 = \frac{2}{3} - 1 = \boxed{-\frac{1}{3}} \quad (2 \text{ puntos})$
0.5

b) Calcular: $\ln \frac{1}{\sqrt[3]{e^2}} = \ln 1 - \ln \sqrt[3]{e^2} = \ln 1 - \frac{1}{3} \ln e^2 = \ln 1 - \frac{1}{3} \cdot 2 \ln e = \ln 1 - \frac{2}{3} = \boxed{-\frac{2}{3}} \quad 0.5$

total: $\boxed{2}$
(0.5 cada apdo.).

c) Expresar $\log 0,27$ en función de $\log 3$

$$\log 0,27 = \log \frac{27}{100} = \log 27 - \log 100 = \log 3^3 - \log 100 = 3 \log 3 - \log 100 = \boxed{-2 + 3 \log 3} \quad 0.5$$

d) Expresar $\ln \sqrt{2e}$ en función de $\ln 2$

$$\ln \sqrt{2e} = \frac{1}{2} \ln(2e) = \frac{1}{2} (\ln 2 + \overset{1}{\cancel{\ln e}}) = \boxed{\frac{1 + \ln 2}{2}} \quad 0.5$$

3. Resolver:

(2,25 puntos)

a) $2^{x-1} \cdot 3^{1-x} = 5^{2x-2}$

$$\log(2^{x-1} \cdot 3^{1-x}) = \log 5^{2x-2}$$

$$\log 2^{x-1} + \log 3^{1-x} = \log 5^{2x-2}$$

$$(x-1)\log 2 + (1-x)\log 3 = (2x-2)\log 5$$

$$x\log 2 - \log 2 + \log 3 - x\log 3 = 2x\log 5 - 2\log 5$$

$$\log 3 - \log 2 + 2\log 5 = 2x\log 5 - x\log 2 + x\log 3$$

$$\log 3 - \log 2 + 2\log 5 = x(2\log 5 - \log 2 + \log 3) \Rightarrow \boxed{x = \frac{2\log 5 - \log 2 + \log 3}{\log 3 - \log 2 + 2\log 5}} = \boxed{1} \quad 0.25/ \quad 0.25$$

b) $4^x - 2 \cdot 2^{x-1} = 6$

$$(2^2)^x - \cancel{2} \cdot \frac{2^x}{\cancel{2}} = 6$$

$$(2^x)^2 - 2^x - 6 = 0 \xrightarrow[\substack{\text{cambio de variable} \\ 2^x = t}]{\text{cambio de variable}} t^2 - t - 6 = 0$$

0.25

$$t = 3 = 2^x \Rightarrow \log 3 = \log 2^x$$

$$\log 3 = x \cdot \log 2$$

$$\boxed{x = \frac{\log 3}{\log 2} \approx 1.5850} \quad 0.25$$

$$t = -2 = 2^x \text{ no vale.}$$

0.25

c) $\log(x+11) - 2\log x = 1$

$$\log(x+11) - 2\log x = \log 10$$

$$\log(x+11) - \log x^2 = \log 10$$

$$\cancel{\log} \frac{x+11}{x^2} = \cancel{\log} 10 \xrightarrow[\text{inspección}]{\text{propiedad}} \frac{x+11}{x^2} = 10$$

0.25

$$10x^2 = x+11$$

$$10x^2 - x - 11 = 0$$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4 \cdot 10 \cdot (-11)}}{20} = \frac{1 \pm \sqrt{441}}{20} = \frac{1 \pm 21}{20} \Rightarrow \boxed{x = \frac{22}{20} = \frac{11}{10}} \quad 0.25$$

$x = \frac{-20}{20} = -1$ desechado pq. conduce a un log con argumento negativo
0.25

TOTAL: 2,25

(0,75 cada apdo.)

4. Calcular:

$$a) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x+2}{x^2-5x+6} = \frac{4}{0} = \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x+2}{(x-2)(x-3)} = \frac{4}{0^- \cdot (-1)} = \frac{4}{0^+} = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x+2}{(x-2)(x-3)} = \frac{4}{0^+ \cdot (-1)} = \frac{4}{0^-} = -\infty \end{cases} \Rightarrow \boxed{\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \pm \infty}$$

(1,5 puntos)

b) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x+2}{x^2-5x+6} = \frac{0}{20} = \boxed{0}$

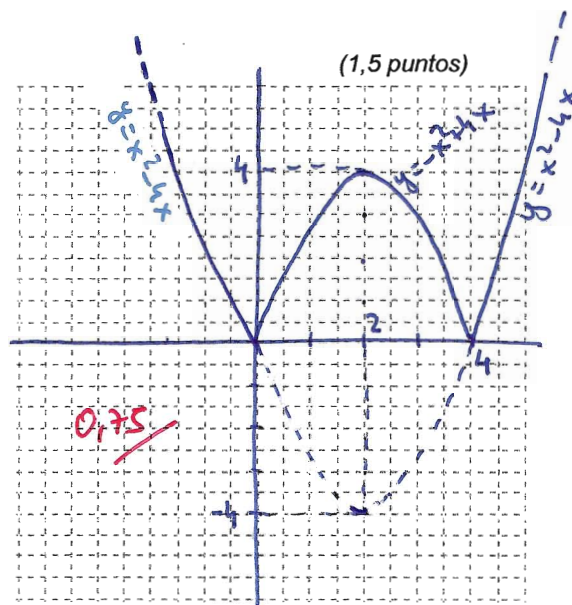
TOTAL: 1,5
(1+0,5)

5. Representar $f(x) = |x^2 - 4x|$ y expresarla como función definida a trozos.

* Representamos 1ª la parábola $y = x^2 - 4x$:

vértice: $x_v = -\frac{b}{2a} = \frac{4}{2} = 2 \rightarrow y_v = 4 - 8 = -4 \rightarrow V(2, -4)$

corte y x: $y = 0 \rightarrow x^2 - 4x = 0$
 $x(x-4) = 0 \rightarrow \begin{cases} x=0 \rightarrow (0,0) \\ x=4 \rightarrow (4,0) \end{cases}$



* Para hacer el val. abs. de la parábola dejamos inalteradas las ramas positivas y reflejamos el casquete negativo. Precisamente el hecho de reflejar el casquete negativo significa cambiar de signo la parábola:

$$f(x) = |x^2 - 4x| = \begin{cases} x^2 - 4x & \text{si } x \leq 0 \\ -x^2 + 4x & \text{si } 0 < x \leq 4 \\ x^2 - 4x & \text{si } x > 4 \end{cases}$$

TOTAL: 1,5

0,75

ORTOGRAFÍA, SINTAXIS, CALIGRAFÍA: 0,05
 ORDEN PLANTAMIENTO Y LIMPIEZA: 0,10
 CORRECCIÓN LENGUAJE MATEMÁTICO: 0,10

TOTAL: 0,25