I.E.S. "Fernando de Mena" Socuéllamos (Ciudad Real)	EXAMEN 3ª EVALUACIÓN **MATEMÁTICAS I**	1º BACH. A+B CURSO 2009-2010	Junta de Comunidades de Castilla-La Mancha Consejería de Educación y Ciencia

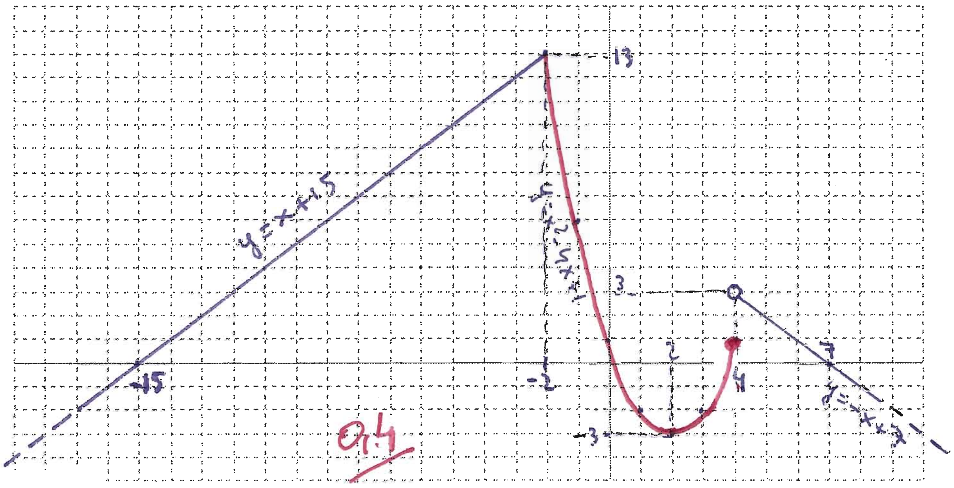
Nombre: SOLUCIONES **Grupo de:** 18 ☐ 20 ☐

1. Dada la función $f(x)=\begin{cases} x+15 & \text{si} \quad x \le -2 \\ x^2-4x+1 & \text{si} \quad -2 < x \le 4 \\ -x+7 & \text{si} \quad x > 4 \end{cases}$ se pide: *(2 puntos)*

a) Gráfica.

x	$-\infty \ldots$	-15	-2
$y=x+15$	$-\infty \ldots$	0	13

x	4	7	$\ldots\ldots\infty$
$y=-x+7$	3	0	$\ldots\ldots\infty$



x	-2	-1	0	1	2	3	4
$y=x^2-4x+1$	13	6	1	-2	-3	-2	1

$V(2,-3)$

b) Dom(f) e Im(f)

$\boxed{Dom(f)=\mathbb{R}}$ $\boxed{Im(f)=(-\infty,13]}$ 0.2

c) Intervalos de crecimiento. Posibles M y m.

$\left.\begin{array}{l} f(x) \nearrow \forall x \in (-\infty,-2) \cup (2,4) \\ f(x) \searrow \forall x \in (-2,2) \cup (4,\infty) \end{array}\right\} \Rightarrow M(-2,13) \quad m(2,-3)$

0.4

$\boxed{2}$

d) $\lim_{x \to -2} f(x) = 13$ 0.1

$\lim_{x \to 4} f(x) = \begin{cases} \lim_{x \to 4^-} f(x) = 1 \\ \lim_{x \to 4^+} f(x) = 3 \end{cases} \Rightarrow \nexists \lim_{x \to 4} f(x)$

0.2

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

0,1

$\lim_{x \to \infty} f(x) = -\infty$

e) Clasificar las posibles discontinuidades.

F(x) presenta una discontinuidad de salto finito en x = 4 0.2

f) Ecuación de las posibles asíntotas.

∄ asíntotas 0.1

2

g) Hallar la antiimagen de y=6

analíticamente

$y=6 \xrightarrow{1^a \text{ rama}} 6 = x+15\ ;\ \boxed{x=-9}$

0.3

$\xrightarrow{2^a \text{ rama}} x^2-4x+1=6\ ;\ x^2-4x-5=0$ → $\boxed{x=-1}$

→ x = 5 desechada, debido a la gráfica

2. a) Calcular: $\log_2 \frac{\sqrt[5]{64}}{8} = \log_2 \sqrt[5]{64} - \log_2 8 = \frac{1}{5}\log_2 64 - \log_2 8 = \frac{6}{5} - 3 = \boxed{-\frac{9}{5}}$ *(2 puntos)*

0,25

b) Expresar $\ln \frac{e^3}{4}$ en función de ln 2

$\ln \frac{e^3}{4} = \ln e^3 - \ln 4 = 3\ln e - \ln 2^2 = \boxed{3-2\ln 2}$ 0.25

2

(0,25+0,25+0,75+0,75)

c) Resolver: $11\cdot 3^x - 9^x = 18$

$11\cdot 3^x - (3^2)^x = 18$

$11\cdot 3^x - (3^x)^2 = 18$

$0 = (3^x)^2 - 11\cdot 3^x + 18 \xrightarrow[3^x = t]{\text{cambio de variable}} t^2 - 11t + 18 = 0$ 0.25

→ $t = 2 = 3^x \Rightarrow \log 2 = x\cdot \log 3$; $\boxed{x = \frac{\log 2}{\log 3} \simeq 0,63}$ 0.25

→ $t = 9 = 3^x \Rightarrow \boxed{x=2}$ 0.25

d) Resolver: $2\ln(x-3) = \ln x - \ln 4$

$\ln(x-3)^2 = \ln\frac{x}{4} \xrightarrow[\text{inyectiva}]{\text{propiedad}} (x-3)^2 = \frac{x}{4}; \quad x^2-6x+9 = \frac{x}{4}; \quad 4x^2-24x+36 = x$

$4x^2-25x+36=0$; $x = \frac{25\pm\sqrt{625-576}}{8} = \frac{25\pm 7}{8}$ $\nearrow \boxed{x=\frac{32}{8}=4}$ 0.25 **2**

0.25

$\searrow x = \frac{18}{8} = \frac{9}{4}$ descartado, pq. el 1º logaritmo tendría argumento negativo

0.25

3. Calcular: *(2 puntos)*

a) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^3-1}{x^2-2x+1} \underset{\text{indet.}}{\overset{0/0}{=}} \lim\limits_{x\to 1}\frac{\cancel{(x-1)}(x^2+x+1)}{\cancel{(x-1)}(x-1)} = \frac{3}{0} = \begin{cases}\lim\limits_{x\to 1^-}\frac{x^2+x+1}{x-1} = \frac{3}{0^-} = -\infty \\ \lim\limits_{x\to 1^+}\frac{x^2+x+1}{x-1} = \frac{3}{0^+} = \infty\end{cases} \Rightarrow \boxed{\lim\limits_{x\to 1} f(x) = \pm\infty}$ 0.25 0.25 0.25

	1	0	0	-1
1		1	1	1
	1	1	1	$\boxed{0}$

	1	-2	1
1		1	-1
	1	-1	$\boxed{0}$

2 $(0{,}75+0{,}5+0{,}75)$

b) $\lim\limits_{x\to -\infty}\frac{x^3-1}{x^2-2x+1} \underset{\text{indet.}}{\overset{-\infty/\infty}{=}} \lim\limits_{x\to -\infty}\frac{x^3}{x^2} = \lim\limits_{x\to -\infty} x = \boxed{-\infty}$ 0.5

c) $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\sqrt{x^2+3x}-\sqrt{x^2+1}\right) \underset{\text{indet.}}{\overset{\infty-\infty}{=}} \lim\limits_{x\to\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+3x}-\sqrt{x^2+1}\right)\left(\sqrt{x^2+3x}+\sqrt{x^2+1}\right)}{\sqrt{x^2+3x}+\sqrt{x^2+1}} = \lim\limits_{x\to\infty}\frac{(x^2+3x)-(x^2+1)}{\sqrt{x^2+3x}+\sqrt{x^2+1}} =$

$= \lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x-1}{\sqrt{x^2+3x}+\sqrt{x^2+1}} = \lim\limits_{x\to\infty}\frac{\frac{3x}{x}-\frac{1}{x}}{\sqrt{\frac{x^2}{x^2}+\frac{3x}{x^2}}+\sqrt{\frac{x^2}{x^2}+\frac{1}{x^2}}} = \lim\limits_{x\to\infty}\frac{3-\cancel{\frac{1}{x}}^{\,0}}{\sqrt{1+\cancel{\frac{3}{x}}_{0}}+\sqrt{1+\cancel{\frac{1}{x^2}}_{0}}} = \boxed{\frac{3}{2}}$

0.25 0.25 0.25

4. Derivar y simplificar: *(2 puntos)*

a) $y = \frac{1}{x^3}+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}+1 \longrightarrow y' = \frac{-3x^2}{x^6}+\frac{-2x}{x^4}-\frac{1}{x^2} = \boxed{\frac{-3}{x^4}-\frac{2}{x^3}-\frac{1}{x^2}}$ 0,25

0,25

b) $y = 2\sqrt[3]{x^4} - 3\sqrt{x+1}$ $= 2\cdot x^{4/3} - 3\cdot\sqrt{x+1} \longrightarrow y' = 2\cdot\frac{4}{3}\cdot x^{1/3} - 3\cdot\frac{1}{2\sqrt{x+1}} = \boxed{\frac{8}{3}\sqrt[3]{x} - \frac{3}{2\sqrt{x+1}}}$

0,25 0,25

$\boxed{2}$

(0,5 cada apdo.)

c) $y = (x^2-3)(2x^2-5)^3$ $\xrightarrow{u\cdot v} y' = 2x\cdot(2x^2-5)^3 + (x^2-3)\cdot\left[(2x^2-5)^3\right]^I =$

$= 2x(2x^2-5)^3 + (x^2-3)\cdot 3\cdot(2x^2-5)^2\cdot 4x =$

0,25 $= (2x^2-5)^2\cdot\left[2x\cdot(2x^2-5) + 12x\cdot(x^2-3)\right] = \boxed{(2x^2-5)^2\cdot(16x^3-46x)}$

0,25

d) $y = \frac{2x^2-1}{x^2+2}$ $\xrightarrow{u/v} y' = \frac{4x(x^2+2) - (2x^2-1)\cdot 2x}{(x^2+2)^2} = \boxed{\frac{10x}{(x^2+2)^2}}$ 0,25

0,25

5. Hallar la <u>función derivada</u> de $f(x)=x^2 - 4$ mediante la definición, es decir, mediante un límite. *(1,75 puntos)*

$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^2-4-(x^2-4)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\cancel{x^2}+2xh+h^2-\cancel{4}-\cancel{x^2}+\cancel{4}}{h} =$

0.25 0.25

$= \lim_{h\to 0}\frac{2xh+h^2}{h} = \lim_{h\to 0}(2x+h) = \boxed{2x}$

0.25 0.5 0.5

$\boxed{1{,}75}$

ORTOGRAFÍA, SINTAXIS, CALIGRAFÍA : 0,05
ORDEN PLANTEAMIENTO Y LIMPIEZA : 0,10
CORRECCIÓN LENGUAJE MATEMÁTICO: 0,10

0,25

NOTA: La ortografía y sintaxis, presentación cuidada (orden en el planteamiento, limpieza, caligrafía, etc.) y corrección en el lenguaje matemático se calificarán con un máximo de 0,25 puntos.