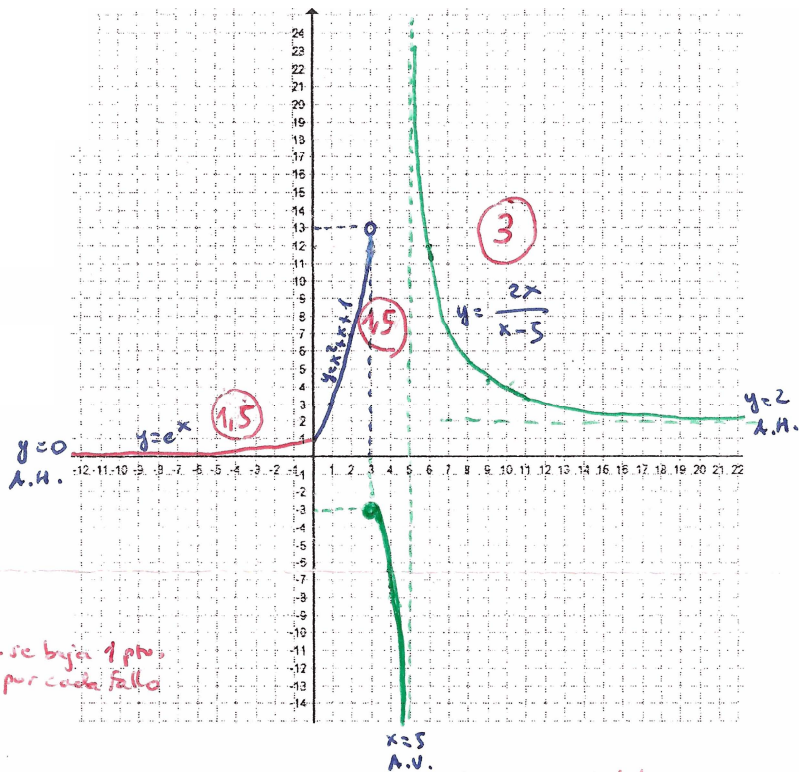


Dada $f(x) = \begin{cases} e^x & \text{si } x < 0 \\ x^2 + x + 1 & \text{si } 0 \leq x < 3 \\ \frac{2x}{x-5} & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$, se pide:

a) Representación gráfica

x	0	1	2	3
$y = x^2 + x + 1$	1	3	7	13

x	3	4	5	6	7	8	9	10	11	...	1005	...	∞
$y = \frac{2x}{x-5}$	-3	-8	$\nearrow$	12	7	5,3	4,5	4	3,6	...	2,01	...	2^+



b) $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{5\}$ (1) $\text{Im}(f) = (-\infty, -3] \cup (0, \infty)$ (1)

c) Intervalos de crecimiento. Posibles M y m

$f(x) \nearrow \forall x \in (-\infty, 3)$ (1)

$f(x) \searrow \forall x \in (3, \infty) - \{5\}$ (No presenta M ni m)

d) Estudiar su continuidad. En caso de presentar discontinuidades, clasificarlas.

La 1ª rama es continua (por ser una exponencial simple), al igual que la 2ª rama (por ser polinómica). La 3ª rama no está definida en $x = 5$, punto que está dentro de su dominio particular de definición. Además, hay que estudiar la continuidad en los posibles puntos de unión de las ramas, es decir, $x = 0$ y $x = 3$: 0,5

¿continua en $x = 0$?

1) $\exists f(0) = 1$ (2ª rama) 0,5

2) $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} e^x = e^0 = 1$ 0,5
 $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x^2 + x + 1) = 1$ 0,5
 $\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$ 0,5 (3)

3) Coinciden lím e imagen 0,5 $\Rightarrow f(x)$ continua en $x = 0$ (lo cual se constata también gráficamente)

¿continua en $x=3$? 0,5

1:) $\exists f(3) = \frac{6}{-2} = -3$ (3ª rama) 0,5

2:) $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} (x^2 + x + 1) = 13$
 $\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{2x}{x-5} = \frac{6}{-2} = -3$

$\Rightarrow \nexists \lim_{x \rightarrow 3} f(x)$ 0,5

$\Rightarrow$ discontinuidad de salto finito en $x=3$ (como se observa en la gráfica) 1

¿continua en $x=5$?

1:) $\nexists f(5) = \frac{10}{0}$ 0,5

2:) $\lim_{x \rightarrow 5} f(x) = \lim_{x \rightarrow 5} \frac{2x}{x-5} = \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 5^-} \frac{2x}{x-5} = \frac{10}{0^-} = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 5^+} \frac{2x}{x-5} = \frac{10}{0^+} = +\infty \end{cases}$

$\Rightarrow \nexists \lim_{x \rightarrow 5} f(x)$ 0,5

$\Rightarrow$ discontinuidad asintótica en $x=5$ 1

(Como se observa en la gráfica)

Soluc: $f(x)$ continua $\forall x \in \mathbb{R} - \{3, 5\}$ 0,5

e) Ecuación de las posibles asíntotas horizontales y/o verticales. $x=5$ A.V.; $y=0$ A.H.; $y=2$ A.H. 0,3 0,3 0,4

NOTA del indicador 6.3 (0 a 10) 6,4

¿Alcanza el mínimo? (Es mínimo la representación gráfica de la función a trozos) + b y c

NOTA del indicador 8.1 (0 a 10) 3,3+4

¿Alcanza el mínimo? (Es mínimo calcular límites laterales) se admite el fallo

NOTA del indicador 8.3 (0 a 10) H2

¿Alcanza el mínimo? (No es mínimo clasificar las discontinuidades)

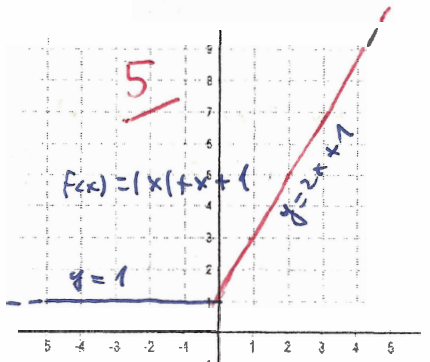
Dada $f(x) = |x| + x + 1$ representarla gráficamente y expresarla como función definida a trozos.

$\downarrow$
 $x \text{ anula en } x=0$

$f(x) = |x| + x + 1 = \begin{cases} -x + x + 1 & \text{si } x \leq 0 \\ x + x + 1 & \text{si } x > 0 \end{cases} = \begin{cases} 1 & \text{si } x \leq 0 \\ 2x + 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$

x	0	1
y=2x+1	1	3

Nota: se baja 1 pto por no indicar el nombre de cada rama
 " " " " " dar más de 2 valores para las rectas
 se baja hasta 2 ptos. por no expresar la solución con lenguaje matemático correcto



NOTA del indicador 6.4 (0 a 10) 5+5

¿Alcanza el mínimo? (Es mínimo la representación gráfica)

a) TEORÍA: ^{razonablemente} Obtener $\log_4 2$ con la calculadora científica básica. Indicar a continuación la definición de logaritmo, y justificar mediante ésta el resultado anterior.

① $\log_4 2 = \frac{\log 2}{\log 4} = \frac{0,3010...}{0,6020...} = \frac{1}{2}$ (fórmula del cambio de base) TOTAL: 4

② "El logaritmo en base a de un número es el exponente al que hay que elevar la base para obtener dicho número":

TOTAL: 3 $\log_a N = x \iff a^x = N$ donde $a > 0$ y $a \neq 1$

③ P.ej. $\log_4 2 = \frac{1}{2}$ porque $4^{1/2} = \sqrt{4} = 2$ TOTAL: 3

b) Aplicando las fórmulas del cálculo logarítmico, calcular:

$\ln \frac{1}{e^2 \sqrt{e}} = \ln 1 - \ln(e^2 \sqrt{e}) = -(\ln e^2 + \ln \sqrt{e}) =$
 $= -(2 \ln e + \frac{1}{2} \ln e) = -2 - \frac{1}{2} = -\frac{5}{2}$

se baja 1 pto. por cada paréntesis no indicado

NOTA del indicador 7.1 (0 a 10)

4+3+3

¿Alcanza el mínimo? (Es mínimo la definición y su aplicación)

☐

NOTA del indicador 7.2 (0 a 10)

10

¿Alcanza el mínimo? (Apdo. b)

☐

Indicador 7.3: Ecuaciones exponenciales y logarítmicas

Resolver (en caso de tener solución no exacta, no calculadora:

expresarla en forma decimal) y **comprobar** sin

$e^{2x} = e^x + 6$; $(e^x)^2 = e^x + 6$; ^{1/} cambio de variable $e^x = t \Rightarrow t^2 = t + 6$

$t^2 - t - 6 = 0 \rightarrow t = -2 = e^x$ ~~soluc.~~ ^{1/} pñ. $e^x > 0$

$t = 3 = e^x \Rightarrow \ln 3 = \ln e^x$ ^{1/}

3/ $\ln 3 = x$

se baja 1 pto. si no se reacciona claramente la solución

Comprobación: $e^{2 \ln 3} = e^{\ln 3} + 6$

$(e^{\ln 3})^2 = 3 + 6$ ^{3/}

$3^2 = 3 + 6$ o.k.

NOTA del indicador 7.3 (0 a 10)

7+3

¿Alcanza el mínimo? (Todo es mínimo)

☐

o.j. mínimo la resolución de la comprobación

Indicador 8.2: Resolución de indeterminaciones

Calcular los siguientes límites:

a) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3 + 3x^2 + 3x + 2}{x^3 + 2x^2} \stackrel{7/0}{=} \lim_{x \rightarrow -2} \frac{(x+2)(x^2+x+1)}{x^2(x+2)} = \frac{3}{4}$

TOTAL: 3

	1	3	3	2
-2		-2	-2	-2
	1	1	1	0

NOTA: se baja 1 pto. si se factoriza el denominador por Ruffini
 " " " " si se omite el símbolo $\lim_{x \rightarrow -2}$

b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3 + 3x^2 + 3x + 2}{x^3 + 2x^2} \xrightarrow{\text{indeterminado}} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3}{x^3} = \boxed{1}$

TOTAL: 1

c) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\ln x - \frac{3x+2}{x^2} \right) = \ln 0^+ - \frac{2}{0^+} = -\infty - \infty = \boxed{-\infty}$

TOTAL: 2

d) $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + 4x} - \sqrt{x^2 - 1}) \xrightarrow{\text{indeterminado}} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{x^2 + 4x} - \sqrt{x^2 - 1}) \cdot (\sqrt{x^2 + 4x} + \sqrt{x^2 - 1})}{\sqrt{x^2 + 4x} + \sqrt{x^2 - 1}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 4x - (x^2 - 1)}{\sqrt{x^2 + 4x} + \sqrt{x^2 - 1}} =$
 $= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x + 1}{\sqrt{x^2 + 4x} + \sqrt{x^2 - 1}} \xrightarrow{\text{indeterminado}} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{4x}{x} + \frac{1}{x}}{\sqrt{\frac{x^2}{x^2} + \frac{4x}{x^2}} + \sqrt{\frac{x^2}{x^2} - \frac{1}{x^2}}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4 + \frac{1}{x}}{\sqrt{1 + \frac{4}{x}} + \sqrt{1 - \frac{1}{x}}} = \frac{4}{2} = \boxed{2}$

NOTA del indicador 8.2 (0 a 10)

3+1+2+4

¿Alcanza el mínimo? (Apos. a y b)

TEORÍA: Obtener, utilizando la definición (es decir, mediante un límite), la derivada de $f(x) = \sqrt{x}$

$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h} \xrightarrow{\text{indeterminado}} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{x+h} - \sqrt{x})(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})}{h \cdot (\sqrt{x+h} + \sqrt{x})} =$
 $= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x+h - x}{h \cdot (\sqrt{x+h} + \sqrt{x})} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h}{h \cdot (\sqrt{x+h} + \sqrt{x})} = \boxed{\frac{1}{2\sqrt{x}}} \text{ (C.Q.D.)}$

NOTA del indicador 9.1 (0 a 10)

10

¿Alcanza el mínimo? (Es mínimo la fórmula)

Obtener la derivada **simplificada** de cada una de las siguientes funciones:

a) $y = \frac{x^2}{\sqrt{x}} = \frac{x^2}{x^{1/2}} = x^{3/2} \xrightarrow{x^n} y' = \frac{3}{2} x^{1/2} = \boxed{\frac{3}{2} \sqrt{x}}$

nota: se baja 1 pto. si se deriva como u/v, aunque esté bien

b) $y = \frac{3x^4 - 2x^2 + 5}{2} = \frac{1}{2} (3x^4 - 2x^2 + 5) \xrightarrow{k \cdot u} y' = \frac{1}{2} (12x^3 - 4x) = \boxed{6x^3 - 2x}$

c) $y = (3x^2 + 5)^5 \xrightarrow{u^n} y' = 5(3x^2 + 5)^4 \cdot 6x = \boxed{30x(3x^2 + 5)^4}$

d) $y = \frac{2x}{x^2 + x + 1} \xrightarrow{u/v} y' = \frac{2(x^2 + x + 1) - 2x \cdot (2x + 1)}{(x^2 + x + 1)^2} = \frac{2x^2 + 2x + 2 - 4x^2 - 2x}{(x^2 + x + 1)^2} = \boxed{\frac{-2x^2 + 2}{(x^2 + x + 1)^2}}$

nota: se baja 1 pto. en cualquiera de las derivadas si se omite algún paso previo fundamental

NOTA del indicador 9.2 (0 a 10)

2,5 cada apdo.

¿Alcanza el mínimo? (Todo es mínimo; se admite un fallo)