1. Dados $\vec{u}=(3,-4)$ y $\vec{v}=(a,2)$, se pide: *(1,75 puntos)*

a) Hallar **a** tal que $\vec{u}\cdot\vec{v}=4$

$(3,-4)\cdot(a,2) = 3a-8 = 4$; $3a = 12$; $\boxed{a=4}$ 0,25

b) ¿Qué ángulo formarán $\vec{u}$ y $\vec{v}$ en el caso anterior?

$$\cos\alpha = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|} = \frac{(3,-4)\cdot(4,2)}{\sqrt{9+16}\cdot\sqrt{16+4}} = \frac{12-8}{5\sqrt{20}} = \frac{4}{5\cdot 2\sqrt{5}} = \frac{2}{5\sqrt{5}} \Rightarrow \boxed{\alpha = \arccos\frac{2}{5\sqrt{5}} \simeq 79^\circ 41' 43''}$$

0,5

c) Hallar **a** tal que $\vec{u} \,//\, \vec{v}$

$\vec{u} \,//\, \vec{v} \Leftrightarrow \frac{3}{a} = \frac{-4}{2} \Rightarrow \boxed{a = \frac{6}{-4} = -\frac{3}{2}}$ 0.5

$\boxed{1,75}$
(0.25 + 0.5 + 0.5 + 0.5)

d) Hallar un vector ⊥ a $\vec{u}$ y de módulo 10

$\vec{u} = (3,-4) \xrightarrow{\perp} \vec{n} = (4,3)$

$|\vec{n}| = \sqrt{16+9} = 5$

Soluc: $2\vec{n} = \boxed{(8,6)}$ o su opuesto

0,5

2. Dada la recta r: x+y-3=0 y el punto P(-1,2), se pide: *(2 puntos)*

a) Hallar, en todas las formas conocidas, la ecuación de la recta ⊥ a r que pasa por P

$\vec{u}_r = (-B, A) = (-1,1) \xrightarrow{\perp} \vec{n} = (1,1)$, $P(-1,2)$

$\boxed{\begin{cases} x = -1+\lambda \\ y = 2+\lambda \end{cases}}$ PARAMÉTRICAS 0.2

$\Rightarrow \boxed{\frac{x+1}{1} = \frac{y-2}{1}}$ CONTINUA 0.2

$\Rightarrow x+1 = y-2$; $\boxed{x-y+3=0}$ GRAL. o IMPLÍCITA 0.2

$\boxed{y-2 = 1(x+1)}$ PTO-PDTE. 0.2

$\boxed{y = x+3}$ EXPLÍCITA 0.2

b) Hallar el punto de corte de la recta anterior y r

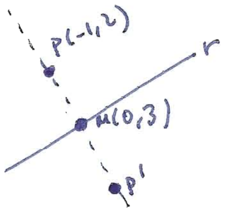
r: $x+y = 3$

anterior: $x-y = -3$

$2x = 0$

$x = 0 \xrightarrow[\text{en } r]{\text{sustituimos}} y = 3 \longrightarrow \boxed{M(0,3)}$ 0.5

c) Hallar el punto simétrico de P respecto de r



$$\frac{P+P'}{2}=M \Rightarrow P'=2M-P=2(0,3)-(-1,2)=(0,6)-(-1,2)=\boxed{(1,4)}$$

0,5

$\boxed{2}$ (1+ 0,5+0,5)

3. Con los mismos datos del ejercicio anterior, se pide: *(2 puntos)*

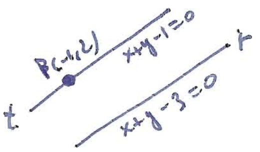
a) Hallar la ecuación general de la recta // a r que pasa por P

La recta pedida, al ser paralela a r, compartirá el mismo vector director:

$$\left.\begin{array}{l}\vec{u_r}=(-1,1)\\ P(-1,2)\end{array}\right\}\quad \frac{x+1}{-1}=\frac{y-2}{1} \Rightarrow x+1=-y+2;\quad \boxed{x+y-1=0}$$ 0.5

(NOTA: también podría obtenerse haciendo $x+y+K=0$ y sustituyendo P para hallar K)

b) Hallar la distancia entre la recta anterior y r



$$d(r,t)=d(P,r)=\frac{|-1+2-3|}{\sqrt{1+1}}=\frac{|-2|}{\sqrt{2}}=\frac{2}{\sqrt{2}}=\frac{2\sqrt{2}}{2}=\boxed{\sqrt{2}\ u}$$

0.5

$\boxed{2}$ (0.5 cada apdo.)

c) Hallar la posición relativa de **r** y la recta **s**: 2x-y+5=0

$$\left.\begin{array}{l}r: x+y-3=0\\ s: 2x-y+5=0\end{array}\right\}\quad \frac{A}{A'}\neq\frac{B}{B'} \Leftrightarrow \text{secantes};\quad \frac{1}{2}\neq\frac{1}{-1} \Rightarrow \boxed{r \text{ y } s \text{ SECANTES}}$$

0,5

d) Hallar el ángulo entre **r** y **s**

0.5

$$\left.\begin{array}{l}\vec{u_r}=(-1,1)\\ \vec{u_s}=(1,2)\end{array}\right\}\quad \cos\alpha=\frac{|\vec{u_r}\cdot\vec{u_s}|}{\|\vec{u_r}\|\cdot\|\vec{u_s}\|}=\frac{|(-1,1)\cdot(1,2)|}{\sqrt{1+1}\cdot\sqrt{1+4}}=\frac{|-1+2|}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{5}}=\frac{1}{\sqrt{10}} \Rightarrow \boxed{\alpha=\arccos\frac{1}{\sqrt{10}}\simeq 71^\circ 33' 54''}$$

---

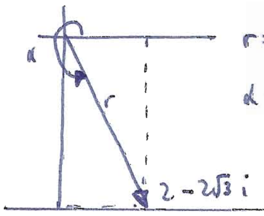
4. a) Operar en polar y dar el resultado en binómica:

$$\frac{(2-2\sqrt{3}i)^3}{(-\sqrt{3}+i)^4\cdot i}=\frac{(4_{300^\circ})^3}{(2_{150^\circ})^4\cdot 1_{90^\circ}}=\frac{2^6_{900^\circ}}{2^4_{690^\circ}}=(2^2)_{210^\circ}=\boxed{4_{210^\circ}}=4(\cos 210^\circ+i\cdot\operatorname{sen}210^\circ)=4\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{i}{2}\right)=\boxed{-2\sqrt{3}-2i}$$

0.1 0.1 0.1 0.5

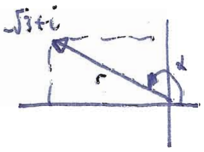
$\operatorname{sen}(180^\circ+30^\circ)=-\operatorname{sen}30^\circ$

$\cos(180^\circ+30^\circ)=-\cos 30^\circ$



$r=\sqrt{2^2+(-2\sqrt{3})^2}=\sqrt{4+12}=\boxed{4}$ 0.1

$\alpha=\operatorname{arctg}\frac{-2\sqrt{3}}{2}=\operatorname{arctg}(-\sqrt{3})=-\operatorname{arctg}\sqrt{3}$ → $\boxed{-60^\circ=300^\circ}$ / 120° descartado



$r=\sqrt{(-\sqrt{3})^2+1^2}=\sqrt{4}=\boxed{2}$ 0.1

$\alpha=\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{-\sqrt{3}}\right)=\operatorname{arctg}\frac{-\sqrt{3}}{3}$ → $-30^\circ=330^\circ$ descartado / $\boxed{150^\circ}$

b) Operar en binómica: $\frac{(2+3i)(3-2i)-(2-3i)^2}{17(1-i^{18})}=\frac{6-4i+9i+6-(4-12i-9)}{17(1-i)}=$

$i^{18}=i$

$$=\frac{12+5i-(-5-12i)}{17(1-i)}=\frac{17+17i}{17(1-i)}=\frac{\cancel{17}(1+i)}{\cancel{17}(1-i)}=\frac{(1+i)^2}{(1-i)(1+i)}=\frac{1+2i+\cancel{i^2}}{1-\cancel{i^2}}=\frac{2i}{2}=\boxed{i}$$

0.25 0.25 0.5 ($i^2=-1$)

$\boxed{2}$ (1 cada apdo.)

5. Dada $f(x)=x^3-3x^2$ se pide: *(2 puntos)*

a) $\boxed{Dom(f) = \mathbb{R}}$ pq. es polinómica 0.1

b) Posible simetría.

0.2

$f(-x) = (-x)^3 - 3(-x)^2 = -x^3 - 3x^2 \neq \pm f(x) \Rightarrow$ $\boxed{\text{no simétrica}}$

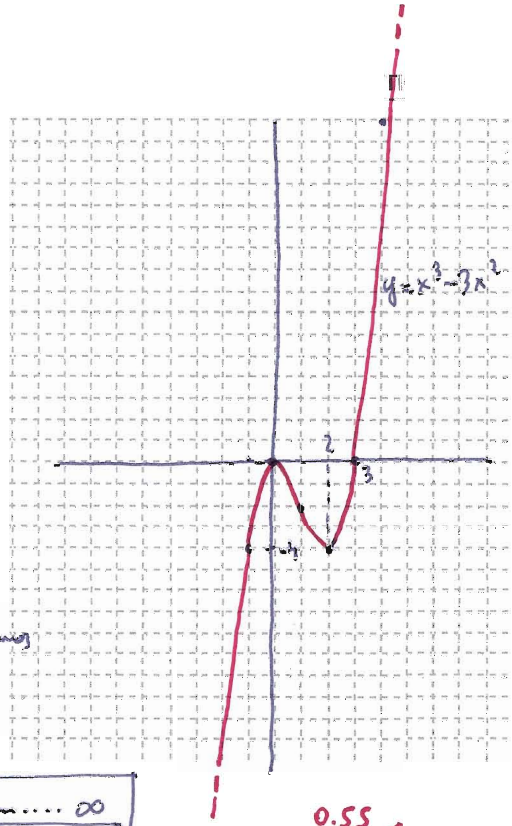
c) Posibles cortes con los ejes.

corte eje x: $y=0 \Rightarrow x^3-3x^2=0$ 0.2

$x^2(x-3)=0 \;\begin{cases} x^2=0;\ x=0 \rightarrow (0,0) \\ x-3=0;\ x=3 \rightarrow (3,0) \end{cases}$

nos ahorramos el corte con el eje y

d) Tabla de valores apropiada y representación gráfica.



x	$-\infty$	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	.... ∞
$y=x^3-3x^2$	$-\infty$	-112	-54	-20	-4	0	-2	-4	0	16	50	108	.... ∞

0.55

e) Intervalos de crecimiento. Posibles M y m.

$\left.\begin{array}{l} f(x) \nearrow \forall x \in (-\infty,0) \cup (2,\infty) \\ f(x) \searrow \forall x \in (0,2) \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} M(0,0) \\ m(2,-4) \end{array}$ 0.2

f) ¿Es continua?

$\boxed{f(x) \text{ continua } \forall x \in \mathbb{R}}$ pq. es polinómica 0.1

g) A la vista de la gráfica, indicar su Im(f)

$\boxed{Im(f) = \mathbb{R}}$ 0.1

h) Ecuación de las posibles asíntotas.

$\boxed{\text{no tiene asíntotas}}$, como puede verse en la gráfica 0.05

i) $\lim_{x\to -\infty} f(x)$ y $\lim_{x\to \infty} f(x)$

$\boxed{\lim_{x\to -\infty} f(x) = -\infty}$ $\boxed{\lim_{x\to \infty} f(x) = \infty}$ 0.1

j) Hallar la antiimagen de y=-2

$x^3-3x^2=-2;\ x^3-3x^2+2=0$

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & -3 & 0 & 2 \\ 1 & & 1 & -2 & -2 \\ \hline & 1 & -2 & -2 & \boxed{0} \end{array}$$

$\boxed{x=1}$

$x = \frac{2 \pm \sqrt{4+8}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{12}}{2} = \frac{2 \pm 2\sqrt{3}}{2} = 1 \pm \sqrt{3}$

¡se ve en la gráfica!

Soluc: $\boxed{x=1;\ x=1+\sqrt{3};\ x=1-\sqrt{3}}$

0.4

2