

Alumna/o: SOLUCIONES

Grupo aula MAT 4 Grupo aula 2º Bach. C

Se puede utilizar calculadora. No usar bolígrafo rojo.

Nota ortografía, caligrafía y sintaxis (0 a 4)

Todos los indicadores tienen el mismo peso en la nota final del examen.

Nota lenguaje matemático (0 a 4)

Nota limpieza y orden (0 a 4)

Indicador 3.3: Producto escalar.

Considerar los vectores $\vec{u} = (b, -\sqrt{3})$ y $\vec{v} = (-\frac{1}{2}, a)$

a) Hallar a y b: para que ambos vectores sean \perp , \vec{v} sea unitario y ambos estén en el semiplano inferior.

$$\|\vec{v}\|=1 \Rightarrow \sqrt{\frac{1}{4} + a^2} = 1 \quad ; \quad \frac{1}{4} + a^2 = 1$$

$$a^2 = \frac{3}{4} \quad \begin{cases} a = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ a = -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

descartado p.j. entonces \vec{v} estaría en el semiplano superior

TOTAL: **6**

$$\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \Rightarrow (b, -\sqrt{3}) \cdot (-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}) = -\frac{b}{2} + \frac{3}{2} = 0 \quad ; \quad \frac{b}{2} = \frac{3}{2} \quad ; \quad b = 3$$

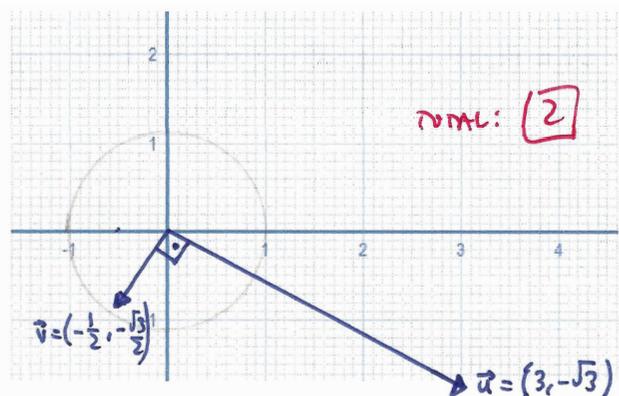
b) Comprobar gráficamente el resultado.

c) Si $b=0$, ¿podrían ser // para algún valor de a ?

$$b=0 \rightarrow \left. \begin{matrix} \vec{u} = (0, -\sqrt{3}) \\ \vec{v} = (-\frac{1}{2}, a) \end{matrix} \right\} \vec{u} \parallel \vec{v} \Leftrightarrow \frac{0}{-\frac{1}{2}} = \frac{-\sqrt{3}}{a}$$

$$0 = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad !!$$

TOTAL: **2** si $b=0$, no pueden ser paralelos



TOTAL: **2**

NOTA del indicador 3.3 (0 a 4)

¿Alcanza el mínimo (apdos. a y b)?

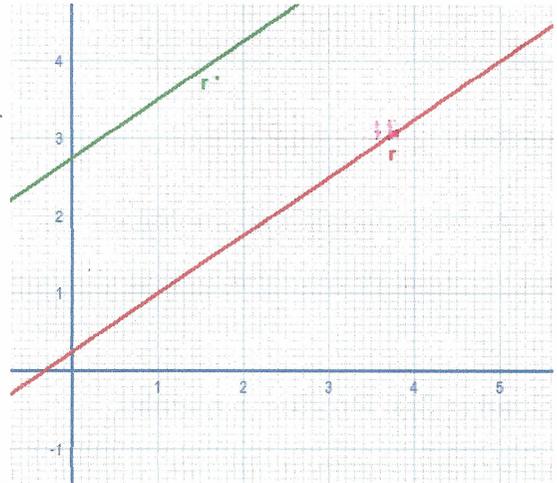
6+2+2

Indicador 4.1: Ecuaciones de la recta.

Indicador 4.4: Distancia punto-recta.

a) Hallar la ecuación de la recta r de la figura en todas las formas conocidas.

Se ve que la recta r pasa por $A(1,1)$ y $B(5,4)$:



$$\vec{u}_r = \vec{AB} = B - A = (5,4) - (1,1) = (4,3) \quad \left. \begin{array}{l} \text{---} \rightarrow m = 3/4 \\ A(1,1) \end{array} \right\}$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} x = 1 + 4\lambda \\ y = 1 + 3\lambda \end{array} \right\} \text{PARAMÉTRICAS } 1/1$$

$$\Rightarrow \frac{x-1}{4} = \frac{y-1}{3} \Rightarrow 3x-3 = 4y-4 \quad \left. \begin{array}{l} \text{CONTINUA } 1/1 \\ \text{---} \end{array} \right\}$$

$$3x - 4y + 1 = 0 \quad \left. \begin{array}{l} \text{GRAL. o IMPLÍCITA } 1/1 \\ \text{---} \end{array} \right\}$$

$$\downarrow$$

$$y-1 = \frac{3}{4}(x-1) \quad \left. \begin{array}{l} \text{PTO.-POTE. } 1/1 \\ \text{---} \end{array} \right\}$$

$$\downarrow$$

$$3x+1 = 4y$$

$$\downarrow$$

$$y = \frac{3}{4}x + \frac{1}{4} \quad \left. \begin{array}{l} \text{EXPLÍCITA } 1/1 \\ \text{---} \end{array} \right\}$$

TOTAL: 5

b) Hallar la ecuación general o implícita de la recta r' sabiendo que dista 2 unidades de r .

INDICADOR 4.4

$$r' \parallel r \Rightarrow r': 3x - 4y + K = 0$$

Un punto de r es p.o.j. $A(1,1)$

$$d(r, r') = d(A, r') = \frac{|3-4+K|}{\sqrt{9+16}} = 2$$

TOTAL: 10

$$\frac{|-1+K|}{5} = 2 \Rightarrow |K-1| = 10$$

1/1

$$K-1 = 10 \Rightarrow K = 11 \rightarrow r': 3x - 4y + 11 = 0$$

3/1

← para $K=0$ esta r' corta al eje y en un valor positivo, según el dibujo.

$$K-1 = -10 \Rightarrow K = -9 \rightarrow r': 3x - 4y - 9 = 0$$

← descartada p.q. para $x=0$ corta al eje y en un valor negativo, en contra del dibujo.

3/1

c) Hallar la ecuación de la recta \perp a r que pasa por el origen, en forma explícita.

$$\vec{u}_r = (4,3) \xrightarrow{\perp} \vec{n} = (-3,4) \quad \left. \begin{array}{l} \text{---} \\ 0(0,0) \end{array} \right\} 1/1$$

$$\frac{x}{-3} = \frac{y}{4} \Rightarrow -3y = 4x$$

1/1

$$y = -\frac{4}{3}x$$

2/1

EXPLÍCITA

TOTAL: 5

NOTA del indicador 4.1 (0 a 10) 5+5

¿Alcanza el mínimo (apdo. a)?

NOTA del indicador 4.4 (0 a 10) 10

¿Alcanza el mínimo (Es mínimo aplicar la fórmula de la $d(P,r)$ en el apdo. b)?

Indicador 4.2: Posición relativa.

Indicador 4.3: Ángulo de dos rectas.

a) Hallar m para que la recta r de la figura sea \parallel a r' : $-4x + my + 6 = 0$

$$r: y = -\frac{2}{3}x - \frac{7}{3}$$

\Downarrow

$$3y = -2x - 7$$

\Downarrow

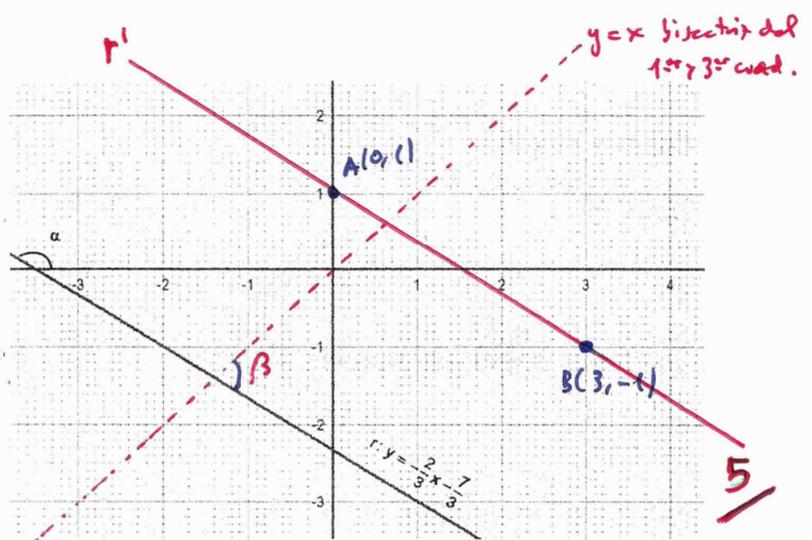
$$r: 2x + 3y + 7 = 0$$

$$r': -4x + my + 6 = 0$$

$$r \parallel r' \Leftrightarrow \frac{2}{-4} = \frac{3}{m}$$

$$2m = -12$$

$$m = -6$$



(NOTA: También se puede hacer igualando ambas pendientes)

Necesitamos dos puntos para dibujarla:

b) Dibujar r' : $-4x - 6y + 6 = 0$; $-4x + 6 = 6y$; $y = -\frac{2}{3}x + 1$

$$x = 0 \rightarrow y = 1 \rightarrow A(0,1)$$

$$x = 3 \rightarrow y = -1 \rightarrow B(3,-1)$$

c) Deducir α (redondeado a los minutos) a partir de la ecuación de r

α es el ángulo que forma r con la parte positiva del eje x , y por definición su tangente es la pendiente de la recta:

$$m = \operatorname{tg} \alpha \Rightarrow -\frac{2}{3} = \operatorname{tg} \alpha \Rightarrow \alpha = \operatorname{arctg} \left(-\frac{2}{3}\right)$$

$\alpha = -33^\circ 41'$ descartado

$$\alpha \approx 146^\circ 19'$$

NOTA: 5

d) Hallar el ángulo (redondeado a los minutos) que forma r con la bisectriz del primer cuadrante.

La bisectriz del 1º (y 3º) cuadrante es la recta que divide a dicho cuadrante en dos ángulos iguales; por lo tanto, su ecuación será $y = x$ (recta discontinua del dibujo). El ángulo pedido es el β de la figura:

$$r: y = -\frac{2}{3}x - \frac{7}{3} \rightarrow m_1 = -\frac{2}{3}$$

$$\text{bisectriz: } y = x \rightarrow m_2 = 1$$

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 \cdot m_2} = \frac{1 - (-\frac{2}{3})}{1 + 1 \cdot (-\frac{2}{3})} = \frac{1 + \frac{2}{3}}{1 - \frac{2}{3}} = \frac{\frac{5}{3}}{\frac{1}{3}} = 5 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \beta = \operatorname{arctg} 5 \approx 78^\circ 41'$$

NOTA: 5

OTRA FORMA: Por Vectores

$$r: 2x + 3y + 7 = 0 \rightarrow \vec{u}_r = (-3, 2)$$

$$\text{bisectriz: } x - y = 0 \rightarrow \vec{u}_s = (1, 1)$$

$$\cos \alpha = \frac{|(-3, 2) \cdot (1, 1)|}{\sqrt{9+4} \cdot \sqrt{1+1}} =$$

$$= \frac{|-3+2|}{\sqrt{13} \cdot \sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{26}} \Rightarrow \alpha = \arccos \frac{1}{\sqrt{26}} \approx 78^\circ 41'$$

NOTA del indicador 4.2 (0 a 10) 5+5

¿Alcanza el mínimo (apdos. a y b)?

NOTA del indicador 4.3 (0 a 10) 5+5

¿Alcanza el mínimo (apdos. c y d)?

INDICADOR 4.2.

INDICADOR 4.3

Indicador 5.1: Operaciones con complejos en forma binómica.

a) Operar y simplificar:

$$\begin{aligned}
 \frac{(3-2i)(1+i)}{1+i-2i} &= \frac{3+3i-2i-2i^2}{1-i-2i} = \frac{3+3i-2i+2}{1-3i} = \frac{5+i}{1-3i} = \frac{(5+i) \cdot (1+3i)}{(1-3i) \cdot (1+3i)} = \\
 &= \frac{5+15i+i+3i^2}{1-9i^2} = \frac{5+15i+i-3}{1+9} = \frac{2+16i}{10} = \frac{1}{5} + \frac{8}{5}i
 \end{aligned}$$

NOTA: 6

 b) **TEORÍA:** ¿Cómo es siempre el producto de dos complejos conjugados? Razonar la respuesta en general, sin ejemplos.

$$z \cdot \bar{z} = (a+bi)(a-bi) = a^2 - b^2 i^2 = a^2 + b^2 > 0 \quad \forall z \in \mathbb{C} \quad 3/$$

Por lo tanto, "El producto de dos complejos conjugados da siempre como resultado un número real positivo" 1/

NOTA: 4

NOTA del indicador 5.1 (0 a 10) 6+4
 ¿Alcanza el mínimo (Apdo. a)?