6 CÓNICAS

6.I. Calcula las ecuaciones de los siguientes lugares geométricos e identifícalos.

a) Puntos que equidistan de $A(-3, 3)$ y de $B(-1, -5)$.

b) Puntos que equidistan de r: $2x + y = 0$ y s: $x - y = 0$.

c) Puntos que equidistan de las rectas paralelas r: $x + y = 5$ y s: $x + y = 9$.

d) Puntos del plano cuya distancia a la recta $x + 2y = 0$ es de 2 unidades.

e) Puntos del plano cuya distancia al origen de coordenadas es el doble que la distancia al punto (2, 0).

a) Mediatriz del segmento AB. Su ecuación es $x - 4y - 2 = 0$.

b) Bisectrices de los ángulos que forman las rectas r y s.

$$d(P, r) = d(P, s) \Rightarrow \frac{|2x + y|}{\sqrt{2^2 + 1^2}} = \frac{|x - y|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{2x + y}{\sqrt{5}} = \dfrac{x - y}{\sqrt{2}} \Rightarrow \left(2\sqrt{2} - \sqrt{5}\right) x + \left(\sqrt{2} + \sqrt{5}\right) y = 0 \\ \dfrac{2x + y}{\sqrt{5}} = \dfrac{y - x}{\sqrt{2}} \Rightarrow \left(2\sqrt{2} + \sqrt{5}\right) x + \left(\sqrt{2} - \sqrt{5}\right) y = 0 \end{cases}$$

c) Recta paralela a ambas por (0, 7).

$$d(P, r) = d(P, s) \Rightarrow \frac{|x + y - 5|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{|x + y - 9|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} \Rightarrow \begin{cases} x + y - 5 = x + y - 9 \Rightarrow -5 \neq -9 \\ x + y - 5 = -x - y + 9 \Rightarrow x + y - 7 = 0 \end{cases}$$

d) Rectas paralelas a la recta dada por $(0,2\sqrt{2})$ y $(0,-2\sqrt{2})$.

$$d(P, r) = 2 \Rightarrow \frac{|x + 2y|}{\sqrt{1^2 + 2^2}} = 2 \Rightarrow \begin{cases} x + 2y = 2\sqrt{5} \\ x + 2y = -2\sqrt{5} \end{cases}$$

e) Circunferencia de centro $\left(\frac{8}{3},0\right)$ y de radio $\frac{4}{3}$.

$$d(P;O) = 2d(P;(2,0)) \Rightarrow \sqrt{x^2 + y^2} = 2\sqrt{(x - 2)^2 + y^2} \Rightarrow x^2 + y^2 = 4(x - 2)^2 + 4y^2 \Rightarrow 3x^2 + 3y^2 - 16x + 16 = 0$$

EJERCICIOS PROPUESTOS

6.1. Escribe la ecuación de las circunferencias que verifican las siguientes condiciones.

a) El centro es el punto $C(-3, 1)$ y el radio es $r = 4$.

b) Uno de sus diámetros es el segmento de extremos $A(-2, 0)$ y $B(4, -2)$.

a) $(x + 3)^2 + (y - 1)^2 = 16 \Rightarrow x^2 + y^2 + 6x - 2y - 6 = 0$

b) Centro: $\left(\dfrac{-2 + 4}{2}, \dfrac{0 - 2}{2}\right) = (1\ -1)$ Radio: $\dfrac{d(A,B)}{2} = \dfrac{\sqrt{36 + 4}}{2} = \dfrac{\sqrt{40}}{2} = \sqrt{10}$

$(x - 1)^2 + (y + 1)^2 = 10 \Rightarrow x^2 + y^2 - 2x + 2y - 8 = 0$

6.2. Identifica cuáles de las curvas representadas por las siguientes ecuaciones son circunferencias y halla, si es posible, su centro y su radio.

a) $3x^2 + 3y^2 - 6x + 12y + 14 = 0$ b) $x^2 + y^2 - 6x = 0$ c) $x^2 + y^2 = 9$

En todos los casos, la ecuación representa una circunferencia:

a) $3x^2 + 3y^2 - 6x + 12y + 14 = 0 \Rightarrow x^2 + y^2 - 2x + 4y + \dfrac{14}{3} = 0 \Rightarrow C(1\ -2)$ $r = \sqrt{1 + 4 - \dfrac{14}{3}} = \dfrac{1}{\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$

Centro: $C = (1\ -2)$ Radio: $r = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$

b) $x^2 + y^2 - 6x = 0 \Rightarrow C\left(\dfrac{6}{2}, 0\right) = (3, 0)$, $r = \sqrt{9} = 3$ Centro: $C = (3, 0)$, Radio: $r = 3$

c) $x^2 + y^2 = 9 \Rightarrow$ Centro: $C = (0, 0)$, Radio: $r = 3$

6.3. Estudia, en cada caso, si el punto P es interior, exterior o perteneciente a la circunferencia: $x^2 + y^2 - 10x = 0$.

a) $P(2, 4)$ b) $P(2, 2)$ c) $P(2, 5)$

Centro: $C = (5, 0)$ Radio: $r = \sqrt{25} = 5$

a) $P(2, 4) \Rightarrow d(P, C) = \sqrt{9 + 16} = 5 \Rightarrow P \in$ circunferencia

b) $P(2, 2) \Rightarrow d(P, C) = \sqrt{9 + 4} = \sqrt{13} < 5 \Rightarrow P$ es interior a la circunferencia.

c) $P(2, 5) \Rightarrow d(P, C) = \sqrt{9 + 25} = \sqrt{34} > 5 \Rightarrow P$ es exterior a la circunferencia.

6.4. Dada la circunferencia $x^2 + y^2 - 6y - 16 = 0$ y la recta $4x + 3y = 34$:

a) Halla las coordenadas del centro y la medida del radio de la circunferencia y calcula la distancia del centro a la recta.

b) Resuelve el sistema de ecuaciones formado por la circunferencia y la recta y compara el resultado con el del apartado anterior.

a) Centro: C = (0, 3) Radio: r = 9 + 16 = 5

$$d(C, \text{recta}) = \frac{|4 + 0 + 3 + 3 - 34|}{\sqrt{16 + 9}} = \frac{25}{5} = 5 = r$$

La recta es tangente a la circunferencia

b) $\begin{matrix} x^2 + y^2 - 6y - 16 = 0 \\ 4x + 3y = 34 \end{matrix} \Rightarrow x = \dfrac{34 - 3y}{4} \Rightarrow \left(\dfrac{34 - 3y}{4}\right)^2 + y^2 - 6y - 16 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \dfrac{1156 + 9y^2 - 204y}{16} + y^2 - 6y - 16 = 0$

$1156 + 9y^2 - 204y + 16y^2 - 96y - 256 = 0 \Rightarrow 25y^2 - 300y + 900 = 0 \Rightarrow y^2 - 12y + 36 = 0 \Rightarrow$

$(y - 6)^2 = 0 \Rightarrow y = 6,\ x = \dfrac{34 - 18}{4} = 4$

La recta es tangente a la circunferencia en el punto P(4 6)

6.5. Indica la posición relativa de la circunferencia y la recta en los siguientes casos.

a) $x^2 + y^2 - 6x + 8y - 25 = 0$; $x - y + 5 = 0$

b) $x^2 + y^2 = 4$; $x + y = 0$

c) $x^2 + y^2 = 25$; $3x + 4y = 25$

a) $x^2 + y^2 - 6x + 8y - 25 = 0$; $x - y + 5 = 0$

Centro: $C = (3, -4)$ Radio: $r = \sqrt{9 + 16 + 25} = 5\sqrt{2}$

$d(C, \text{recta}) = \dfrac{|3 + 4 + 5|}{\sqrt{2}} = \dfrac{12}{\sqrt{2}} = 6\sqrt{2} > 5\sqrt{2} \Rightarrow$ La recta no corta a la circunferencia, es decir, es exterior a ella.

b) $x^2 + y^2 = 4$; $x + y = 0$

Centro: $C = (0, 0)$ Radio: $r = 2$

$d(C, \text{recta}) = 0 < 2 \Rightarrow$ La recta corta en dos puntos (es secante) a la circunferencia.

c) $x^2 + y^2 = 25$; $3x + 4y = 25$

Centro: $C = (0, 0)$ Radio: $r = 5$

$d(C\ \ \text{recta}) = \dfrac{|-25|}{\sqrt{25}} = 5 = r \Rightarrow$ La recta corta en un punto (es tangente) a la circunferencia.

6.6. Las trayectorias de dos partículas se describen mediante las circunferencias

$$x^2 + y^2 = 4 \text{ y } x^2 + y^2 - 10x + 16 = 0.$$

Determina la posición relativa de las trayectorias. ¿Es posible que las partículas se encuentren?

$\begin{cases} x^2 + y^2 - 10x + 16 = 0 \\ x^2 + y^2 = 4 \end{cases} \Rightarrow 4 - 10x + 16 = 0 \Rightarrow x = 2,\ y = 0$

Las trayectorias son tangentes en el punto $P(2, 0)$. Por tanto, las partículas pueden encontrarse en ese punto.

6.7. Estudia la posición relativa de las siguientes parejas de circunferencias.

a) $x^2 + y^2 - 6x + 8y - 25 = 0$; $x^2 + y^2 - 1 = 0$

b) $x^2 + y^2 = 4$; $x^2 + y^2 - 2x + 6y + 1 = 0$

c) $x^2 + y^2 = 25$; $2x^2 + 2y^2 + 3y - 3 = 0$

a) $\begin{cases} x^2 + y^2 - 6x + 8y - 25 = 0 \text{ centro } C_1(3, -4) \text{ radio } r_1 = \sqrt{9 + 16 + 25} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2} \\ x^2 + y^2 = 1 \text{ centro } C_2(0, 0) \text{ radio } r_2 = 1 \end{cases}$

$d(C_1, C_2) = \sqrt{9 + 16} = 5 \Rightarrow r_1 - r_2 = 5\sqrt{2} - 1 > d(C_1, C_2) \Rightarrow$ Las circunferencias son interiores. No tienen puntos en común.

b) $\begin{cases} x^2 + y^2 - 2x + 6y + 1 = 0 \text{ centro } C_1(1, -3) \text{ radio } r_1 = \sqrt{1 + 9 - 1} = 3 \\ x^2 + y^2 = 4 \text{ centro } C_2(0, 0) \text{ radio } r_2 = 2 \end{cases}$

$d(C_1, C_2) = \sqrt{1 + 9} = \sqrt{10} \Rightarrow \begin{cases} r_1 + r_2 > d(C_1, C_2) \\ r_1 + r_2 < d(C_1, C_2) \end{cases}$ Las circunferencias son secantes. Tienen dos puntos en común.

c) $\begin{cases} 2x^2 + 2y^2 + 3y - 3 = 0 \Rightarrow x^2 + y^2 + \frac{3}{2}y - \frac{3}{2} = 0 \text{ centro } C_1\left(0, -\frac{3}{4}\right) \text{ radio } r_1 = \sqrt{\frac{9}{16} + \frac{3}{2}} = \frac{\sqrt{33}}{4} \\ x^2 + y^2 = 25 \text{ centro } C_2\ (0, 0) \text{ radio } r_2 = 5 \end{cases}$

$d(C_1, C_2) = \frac{3}{4} \Rightarrow r_1 - r_2 > d(C_1, C_2) \Rightarrow$ Las circunferencias son interiores. No tienen puntos en común.

6.8. Halla la posición relativa entre cada punto y la circunferencia. $x^2 + y^2 - 2x - 2y + 1 = 0$

a) $P\left(1, \frac{2}{3}\right)$ **b)** $Q\left(\frac{2 + \sqrt{2}}{2}, \frac{2 + \sqrt{2}}{2}\right)$ **c)** $R\left(2, \frac{1}{4}\right)$

a) $Pot_{Cf}(P) = 1^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2 - 2 \cdot 1 - 2 \cdot \frac{3}{2} + 1 = -\frac{3}{4}$ Punto interior a la circunferencia

b) $Pot_{Cf}(P) = \left(\frac{2 + \sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{2 + \sqrt{2}}{2}\right)^2 - 2 \cdot \frac{2 + \sqrt{2}}{2} - 2 \cdot \frac{2 + \sqrt{2}}{2} + 1 = 2 \cdot \frac{4 + 2 + 4\sqrt{2}}{4} -$

$- 4 - 2\sqrt{2} + 1 = 2 + 1 + 2\sqrt{2} -4 - 2\sqrt{2} + 1 = 0$

Punto perteneciente a la circunferencia

c) $Pot_{Cf}(P) = 2^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^2 - 2 \cdot 2 - 2 \cdot \frac{1}{4} + 1 = \frac{9}{16}$ Punto exterior a la circunferencia

6.9. Estudia para qué valores de m el punto $P\,(5, m)$ es interior, para qué valores es exterior y para qué valores pertenece a la circunferencia $x^2 + y^2 - 4x - 4y - 17 = 0$.

$Pot_{Cf}(P) = 25 + m^2 - 20 - 4 + m - 17 = m^2 - 4m - 12$

$m^2 - 4m - 12 = 0$ *si* $m = 6$ ó $m = -2$ Puntos pertenecientes a la circunferencia

$m^2 - 4m - 12 < 0$ *si* $-2 < m < 6$ Puntos interiores a la circunferencia

$m^2 - 4m - 12 > 0$ *si* $m < -2$ ó $m > 6$ Puntos exteriores a la circunferencia

6.10. Calcula el eje radical de las circunferencias $C_1 \equiv x^2 + y^2 = 9$ y $C_2 \equiv x^2 + y^2 - 4x + 2y + 1 = 0$.

Eje radical: $4x - 2y - 9 - 1 = 0 \Rightarrow 4x - 2y - 10 = 0 \Rightarrow 2x - y - 5$

6.11. Calcula el centro radical de estas circunferencias.

$C_1 \equiv (x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 25$ $C_2 \equiv 3x^2 + 3y^2 + 6y = 0$ $C_3 \equiv x^2 + y^2 - 6x - 6y + 9 = 0$

Eje radical de C_1 y C_2: $2x - 4y - 20 - 2y = 0 \Rightarrow x - 3y - 10 = 0$

Eje radical de C_1 y C_2: $2x - 4y - 20 + 6x + 6y - 9 = 0 \Rightarrow 8x + 2y - 29 = 0$

Eje radical de C_2 y C_3: $2y + 6x + 6y - 9 = 0 \Rightarrow 6x + 8y - 9 = 0$

Centro radical: $\begin{cases} x - 3y = 10 \\ 6x + 8y = 9 \end{cases} \Rightarrow x = \frac{107}{26},\ y = -\frac{51}{26}$

6.12. Dadas las siguientes circunferencias.

$C_1 \equiv x^2 + (y - 1)^2 = 4 \qquad C_2 \equiv x^2 + y^2 - 8x - 2y + 16 = 0 \qquad C_3 \equiv x^2 + y^2 + 2x - 2y + 1 = 0$

a) Halla los ejes radicales de todas las posibles parejas entre las circunferencias dadas.

b) Razona si existe centro radical y, en su caso, hállalo.

a) $C_1 \equiv x^2 + y^2 - 2y - 3 = 0 \quad C_2 \equiv x^2 + y^2 - 8x - 2y + 16 = 0 \quad C_3 \equiv x^2 + y^2 + 2x - 2y + 1 = 0$

Eje radical de C_1 y C_2: $-2y - 3 + 8x + 2y - 16 = 0 \Rightarrow 8x - 19 = 0 \Rightarrow x = \dfrac{19}{8}$

Eje radical de C_1 y C_3: $-2y - 3 - 2x + 2y - 1 = 0 \Rightarrow -2x - 4 = 0 \Rightarrow x = -2$

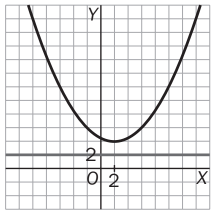
Eje radical de C_2 y C_3: $-8x - 2y + 16 - 2x + 2y - 1 = 0 \Rightarrow -10x + 15 = 0 \Rightarrow x = \dfrac{3}{2}$

b) Los ejes radicales son rectas paralelas y, por tanto, no se cortan. No hay centro radical.

6.13*. Encuentra la ecuación y dibuja la parábola que describe la trayectoria de un proyectil (tiro parabólico) sabiendo que tiene su vértice en el punto (2, 4), y que su directriz es la recta $y = 2$.

Vértice: (2, 4) Directriz: $y = 2 \Rightarrow p = 4$

$(x - a)^2 = 2p\,(y - b) \Rightarrow (x - 2)^2 = 8\,(y - 4) \Rightarrow y = \dfrac{x^2}{8} - \dfrac{x}{2} + \dfrac{9}{2}$



6.14. Para las siguientes parábolas, calcula las coordenadas del foco y del vértice, las ecuaciones del eje y de la directriz y dibújalas.

a) $x = y^2 - 6y + 10$

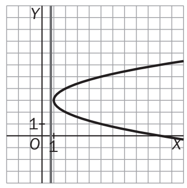
b) $y^2 + 4y = 2 - 3x$

c)* $x^2 + 6y + 13 = -5$

d) $x^2 - 4x = 6y - 28$

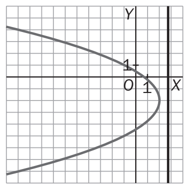
a) $x = (y - 3)^2 - 9 + 10 \Rightarrow x - 1 = (y - 3)^2 \Rightarrow$ Apertura hacia la derecha

Vértice (1, 3) Eje: $y = 3$ $\quad p = \dfrac{1}{2}$ $\quad$ Directriz: $x = 1 - \dfrac{1}{4} = \dfrac{3}{4}$ $\quad$ Foco: $\left(\dfrac{5}{4}, 3\right)$



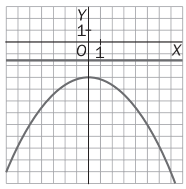
b) $(y + 2)^2 - 4 = 2 - 3x \Rightarrow (y + 2)^2 = -3\,(x - 2) \Rightarrow$ Apertura hacia la izquierda

Vértice (2, –2) $\quad$ Eje: $y = -2$ $\quad p = -\dfrac{3}{2}$ $\quad$ Directriz: $y = \dfrac{11}{4}$ $\quad$ Foco: $\left(\dfrac{5}{4}, -2\right)$



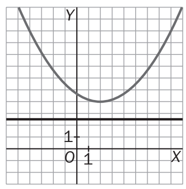
c) $x^2 + 6y + 13 = -5 \Rightarrow x^2 = -6\,(y + 3) \Rightarrow$ Apertura hacia abajo

Vértice (0, –3) $\quad$ Eje: x = 0 $\quad p = -3$ $\quad$ Directriz: $y = \dfrac{-3}{2}$ $\quad$ Foco: $\left(0, \dfrac{-9}{2}\right)$



d) $(x - 2)^2 - 4 = 6y - 28 \Rightarrow (x - 2)^2 = 6(y - 4) \Rightarrow$ Apertura hacia arriba

Vértice (2, 4) $\quad$ Eje: $x = 2$ $\quad p = 3$ $\quad$ Directriz: $y = \dfrac{5}{2}$ $\quad$ Foco: $\left(2, \dfrac{11}{2}\right)$



6.15. La cubierta de un estadio olímpico tiene forma de elipse. Halla su ecuación reducida si se conocen los siguientes datos. Centro (0, 0) , $a = 13$, $F(12, 0)$.

$a = 13 \;\; c = 12 \Rightarrow b = \sqrt{13^2 - 12^2} = 5 \Rightarrow \dfrac{x^2}{169} + \dfrac{y^2}{25} = 1$

6.16. Dibuja e indica los elementos de cada una de las siguientes elipses.

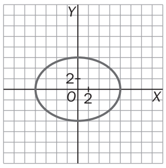
a) $\dfrac{x^2}{64} + \dfrac{y^2}{36} = 1$ b) $\dfrac{x^2}{144} + \dfrac{y^2}{169} = 1$ c) $\dfrac{(x-2)^2}{9} + \dfrac{(y+3)^2}{4} = 1$ d) $x^2 + \dfrac{(y-1)^2}{4} = 1$

a) $a = 8$, $b = 6$, $c = \sqrt{28}$. Centro: (0, 0).

Vértices: (8, 0), (−8, 0), (6, 0), (−6, 0)

Focos: $\left(-\sqrt{28}, 0\right)$. $\left(\sqrt{28}, 0\right)$

$e = \dfrac{c}{a} = \dfrac{\sqrt{28}}{8} = \dfrac{\sqrt{7}}{4}$

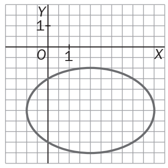


c) a = 13, b = 12, c = $\sqrt{9-4} = \sqrt{5}$. Centro: (2, −3)

Vértices: (6, −3), (−1, −3), (2, −1), (2, −5)

Focos: $\left(2-\sqrt{5}, -3\right)$ $\left(2+\sqrt{5}, -3\right)$

$e = \dfrac{c}{a} = \dfrac{\sqrt{5}}{3}$

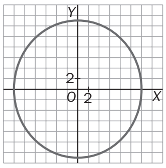


b) $a = 13$ $b = 12$ $c = \sqrt{25} = 5$. Centro: (0, 0)

Vértices: (0, 13), (0, −13), (12, 0), (−12, 0)

Focos: (0, 5), (0, −5).

$e = \dfrac{c}{a} = \dfrac{5}{13}$

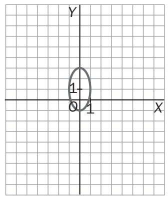


d) $a = 2$ $b = 1$ $c = \sqrt{3}$. Centro: (0, 1)

Vértices: (0, −1), (0, 3), (1, 0), (−12, 0)

Focos: $\left(0{,}1-\sqrt{3}\right)$, $\left(0{,}1+\sqrt{3}\right)$

$e = \dfrac{c}{a} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$



6.17. Calcula las ecuaciones de estas hipérbolas.

a) Vértice en $A(5, 0)$ y foco en $F(8, 0)$.

b) Foco en $F\left(\dfrac{15}{4}, 0\right)$ y pasa por $P(5, 3)$.

c) Asíntota, $y = 2x$, y eje real $2a$.

a) $a = 5$ $c = 8 \Rightarrow b = \sqrt{8^2 - 5^2} = \sqrt{39} \Rightarrow \dfrac{x^2}{25} - \dfrac{y^2}{39} = 1$

b) $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \begin{cases} c = \dfrac{15}{4} \Rightarrow b^2 = \dfrac{225}{16} - a^2 \\ \dfrac{25}{a^2} - \dfrac{9}{b^2} = 1 \end{cases} \Rightarrow \dfrac{25}{a^2} - \dfrac{9}{\dfrac{225}{16} - a^2} = 1 \Rightarrow a = 3 \;\; b = \dfrac{9}{4} \Rightarrow \dfrac{x^2}{9} - \dfrac{y^2}{\dfrac{81}{16}} = 1$

c) $\dfrac{b}{a} = 2 \Rightarrow b = 2a \Rightarrow c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{a^2 + 4a^2} = a\sqrt{5} \Rightarrow e = \dfrac{c}{a} = \dfrac{a\sqrt{5}}{a} = \sqrt{5} \Rightarrow 4x^2 - y^2 = 4a^2$

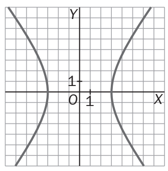
6.18. Dibuja e indica los elementos de cada una de las siguientes hipérbolas.

a) $\dfrac{x^2}{9} - \dfrac{y^2}{16} = 1$ b) $x^2 - y^2 = 16$ c) $\dfrac{(x+2)^2}{4} - \dfrac{(y-2)^2}{2} = 1$ d) $-\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{16} = 1$

a) $a = 3$ $b = 4$ $c = 9 + 16 = 5$

Centro: (0, 0) Vértices: (3, 0) (−3, 0) Focos: (−5, 0) (5, 0)

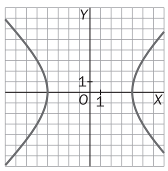
Excentricidad: $e = \dfrac{c}{a} = \dfrac{5}{3}$ Asíntotas: $y = \pm\dfrac{4}{3}x$



b) $a = 4$ $b = 4$ $c = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$

Centro: (0, 0) Vértices: (4, 0), (−4, 0) Focos: $\left(-\sqrt{32}, 0\right)$ $\left(\sqrt{32}, 0\right)$

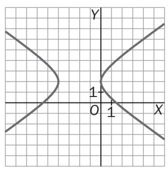
Excentricidad: $e = \dfrac{c}{a} = \dfrac{\sqrt{32}}{4} = \sqrt{2}$ Asíntotas: $y = \pm x$



c) $a = 2$ $b = \sqrt{2}$ $c = \sqrt{4+2} = 6$

Centro: (−2, 2) Vértices: (−4, 2) (0, 2) Focos: $\left(-2-\sqrt{6}, 2\right)$ $\left(-2+\sqrt{6}, 2\right)$

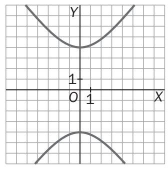
Excentricidad: $e = \dfrac{\sqrt{6}}{2}$ Asíntotas: $y - 2 = \pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}(x + 2)$



d) $a = 4 \quad b = 3 \quad c = 5$

Centro: (0, 0) Vértices: (0, 4) (0, −4) Focos: (0, 5) (0, −5)

Excentricidad: $e = \dfrac{c}{a} = \dfrac{5}{4}$ Asíntotas: $y = \pm\dfrac{4}{3}x$

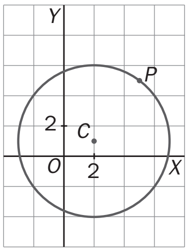


EJERCICIOS

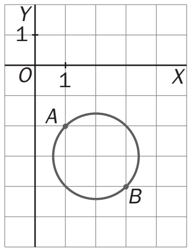
Circunferencia

6.19. Calcula la ecuación de las siguientes circunferencias.

a)



b)



c) De centro, $C(2, -3)$, y pasa por el punto $P(5, 1)$.

d) De centro, el punto C(5, −2), y tangente al eje de abscisas.

e) Pasa por los puntos $A(3, 2)$ y $B(1, -2)$, y tiene su centro en la recta $r \equiv 3x - y = 6$.

f) Pasa por el punto $A(3, 4)$, su radio vale r = 5 y su centro se encuentra en el eje de abscisas.

g) El centro es $C(3, 6)$, y es tangente a la bisectriz del primero y tercer cuadrantes.

h) Pasa por $A(7, -3)$, $B(5, 1)$ y $C(2, -8)$.

a) Centro $C(2, 1)$, pasa por $P(5, 5)$. El radio es $|\overrightarrow{CP}| = 5$, y la ecuación, $(x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 25$

b) Los puntos $A(1, -2)$ y $B(3, -4)$ son diametralmente opuestos. El centro será el punto medio, $C(2, -3)$, y el radio, la mitad de $|\overrightarrow{AB}|$, es decir, $\sqrt{2}$. La ecuación es $(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 2$

c) $r = d(C, P) = \sqrt{9 + 16} = 5 \Rightarrow (x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 25 \Rightarrow x^2 + 4 - 4x + y^2 + 9 + 6y = 25 \Rightarrow x^2 + y^2 - 4x + 6y - 12 = 0$

d) $r = 2 \Rightarrow (x - 5)^2 + (y + 2)^2 = 4 \Rightarrow x^2 + y^2 - 10x + 4y + 25 + 4 - 4 = 0 \Rightarrow x^2 + y^2 - 10x + 4y + 25 = 0$

e) Mediatriz del segmento AB: $\begin{array}{l} \overline{AB} \equiv \dfrac{x-3}{2} = \dfrac{y-2}{4} \Rightarrow 2x - 6 = y - 2 \Rightarrow 2x - y = 4 \\ x + 2y + k = 0 \Rightarrow 2 + 2 \cdot 0 + k = 0 \Rightarrow k = -2 \Rightarrow x + 2y - 2 = 0 \end{array}$

El centro estará en la intersección de la mediatriz y la recta r:

$$\begin{cases} x + 2y = 2 \\ 3x - y = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + 2y = 2 \\ 6x - 2y = 12 \end{cases} \Rightarrow C(2, 0) \qquad r = d(A, C) = \sqrt{(3-2)^2 + (2-0)^2} = \sqrt{5}$$

La ecuación de la circunferencia será: $(x - 2)^2 + y^2 = 5 \Rightarrow x^2 + 4 - 4x + y^2 - 5 = 0 \Rightarrow x^2 + y^2 - 4x - 1 = 0$.

f) El centro será de la forma $C(a, 0)$.

$$d(A, C) = 5 \Rightarrow (3 - a)^2 + 4^2 = 25 \Rightarrow \begin{cases} 3 - a = 3 \Rightarrow a = 0 \Rightarrow x^2 + y^2 = 25 \\ 3 - a = -3 \Rightarrow a = 6 \Rightarrow (x - 6)^2 + y^2 = 25 \Rightarrow x^2 + y^2 - 12x + 11 = 0 \end{cases}$$

g) $r = d(C, x = y) = \dfrac{|3 - 6|}{\sqrt{2}} = \dfrac{3\sqrt{2}}{2} \Rightarrow (x - 3)^2 + (y - 6)^2 = \dfrac{9}{2} \Rightarrow 2x^2 + 2y^2 - 12x - 24y + 81 = 0$

h) $x^2 + y^2 + Ax + Bx + C = 0 \begin{cases} 49 + 9 + 7A - 3B + C = 0 \\ 25 + 1 + 5A + B + C = 0 \Rightarrow A = -4,\ B = 6,\ C = -12 \Rightarrow x^2 + y^2 - 4x + 6y - 12 = 0 \\ 4 + 64 + 2A - 8B + C = 0 \end{cases}$

6.20. Determina el centro y el radio de la circunferencia que pasa por los puntos $A(0, 0)$, $B(0, 2)$ y $C(2, 4)$.

$$\left.\begin{array}{r}(0 - C_x)^2 + (0 - C_y)^2 = R^2\\(0 - C_x)^2 + (2 - C_y)^2 = R^2\\(2 - C_x)^2 + (4 - C_y)^2 = R^2\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l}(1)\ C_x^2 + C_y^2 = R^2\\(2)\ C_x^2 + 4 + C_y^2 - 4C_y = R^2\\(3)\ C_x^2 + 4 - 4C_x + C_y^2 + 16 - 8C_y = R^2\end{array}\right\}$$

$(1) = (2) \Rightarrow C_x^2 + C_y^2 = C_x^2 + 4 + C_y^2 - 4C_y \Rightarrow 4C_y = 4 \Rightarrow C_y = 1$

Sustituyendo, $\left.\begin{array}{r}C_x^2 + 1 = R^2\\C_x^2 - 4C_x + 13 = R^2\end{array}\right\} \Rightarrow C_x^2 + 1 = C_x^2 - 4C_x + 13 \Rightarrow 4C_x = 12 \Rightarrow C_x = 3$

$C_x^2 + 1 = R^2 \Rightarrow R = \sqrt{10}$

Por tanto, $C(3, 1)$ y $r = \sqrt{10}$

6.21. Confirma si las siguientes ecuaciones representan una circunferencia. En caso afirmativo, dibújalas e indica el centro y el valor del radio.

a) $x^2 + y^2 - 4x + 6y + 9 = 0$

b) $x^2 + y^2 - 2x + 2y + 3 = 0$

c) $2x^2 + 2y^2 - 6x = 0$

d) $x^2 + y^2 + 2x + 2y = 0$

a) $x^2 + y^2 - 4x + 6y + 9 = 0 \Rightarrow \begin{cases} C(2, -3) \\ r = \sqrt{4 + 9 - 9} = 2 \end{cases}$

b) $x^2 + y^2 - 2x + 2y + 3 = 0 \Rightarrow \begin{cases} C(1, -1) \\ r = \sqrt{1 + 1 - 3} \text{ no es real} \end{cases}$ No representa una circunferencia.

c) $x^2 + y^2 - 3x = 0 \Rightarrow \begin{cases} C\left(\frac{3}{2}, 0\right) \\ r = \sqrt{\frac{9}{4}} = \frac{3}{2} \end{cases}$

d) $x^2 + y^2 + 2x + 2y = 0 \Rightarrow \begin{cases} C(-1, -1) \\ r = \sqrt{1 + 1} = \sqrt{2} \end{cases}$

6.22. Halla la posición relativa de cada punto y de la circunferencia $x^2 + y^2 - 4x - 2y - 20 = 0$.

a) $A(5, 5)$ b) $B(3, 3)$ c) $C(-4, 3)$

a) $Pot_{Cf}(A) = 5^2 + 5^2 - 4 \cdot 5 - 2 \cdot 5 - 20 = 0 \Rightarrow$ El punto pertenece a la circunferencia.

b) $Pot_{Cf}(B) = 3^2 + 3^2 - 4 \cdot 3 - 2 \cdot 3 - 20 = -20 < 0 \Rightarrow$ El punto es interior a la circunferencia.

c) $Pot_{Cf}(C) = 4^2 + 3^2 - 4 \cdot (-4) - 2 \cdot 3 - 20 = 15 > 0 \Rightarrow$ El punto es exterior a la circunferencia.

6.23. Calcula la máxima y la mínima distancia del punto $P(5, 2)$ a la circunferencia $x^2 + y^2 + 6x + 8y = 0$.

$\begin{cases} C(-3, -4) \\ r = \sqrt{9 + 16} = 5 \end{cases}$

$Pot_{Cf}(P) = 5^2 + 2^2 + 6 \cdot 5 + 8 \cdot 2 = 75$

Si la recta que une P con el centro corta a la circunferencia primero a una distancia x y después a una distancia $x + 2r$: $x + (x + 2r) = 75 \Rightarrow x^2 + 10x - 75 = 0 \Rightarrow x = \frac{-10 \pm 20}{2} \Rightarrow \begin{cases} x = 5 \\ x = -15 \text{ no válida} \end{cases}$

Por tanto, la mínima distancia es 5, y la máxima, $5 + 2 \cdot 5 = 15$.

6.24. Para cada caso, estudia la posición relativa de la recta con la circunferencia que se indica.

a) $2x + y + 1 = 0$ con $x^2 + y^2 - 4x + 6y + 9 = 0$ c) $x + 7y = 30$ con $x^2 + y^2 - 10x = 0$

b) $x - 2 = 0$ con $x^2 + y^2 - 2x + 2y + 1 = 0$

a) $\begin{cases} C(2, -3) \\ r = \sqrt{4 + 9 - 9} = 2 \end{cases}$ $d(C, r) = \dfrac{|4 - 3 + 1|}{\sqrt{5}} = \dfrac{2}{\sqrt{5}} < r \Rightarrow$ La recta es secante a la circunferencia.

b) $\begin{cases} C(1, -1) \\ r = \sqrt{1 + 1 - 1} = 1 \end{cases}$ $d(C, r) = \dfrac{|1 - 2|}{\sqrt{1}} = 1 = r \Rightarrow$ La recta es tangente a la circunferencia.

c) $\begin{cases} C(5, 0) \\ r = \sqrt{25} = 5 \end{cases}$ $d(C, r) = \dfrac{|5 - 30|}{\sqrt{25 + 49}} = \dfrac{25}{\sqrt{74}} < r \Rightarrow$ La recta es secante a la circunferencia.

6.25. Halla, en función del parámetro positivo a, la posición relativa de la circunferencia de ecuación

$(x - 2)^2 + y^2 = a$ y la recta de ecuación $y = x$.

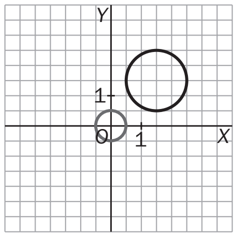
Centro: $C = (2, 0)$ Radio: $r = \sqrt{a}$ $d(C, recta) = \dfrac{|2 + 0 + 0|}{\sqrt{1 + 1}} = \dfrac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$

Si $a=2$, la recta es tangente a la circunferencia. Si $a>2$, es secante, y si $a<2$ es exterior a la circunferencia.

6.26. Estudia la posición relativa de la circunferencia $2x^2 + 2y^2 - 6x - 6y + 7 = 0$ con cada una de las siguientes circunferencias.

a) $x^2 + y^2 = \dfrac{1}{4}$ b) $2x^2 + 2y^2 = 5$ c) $x^2 + y^2 - 2x - 3y + 3 = 0$ d) $x^2 + y^2 - 3y + 2 = 0$

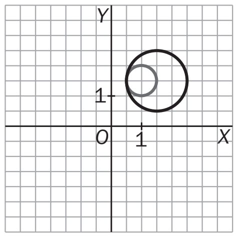
a) $\begin{cases} x^2 + y^2 = \dfrac{1}{4} \Rightarrow \text{centro: } C_1\,(0, 0) \text{ radio } r_1 = \dfrac{1}{2} \\ 2x^2 + 2y^2 - 6x - 6y + 7 = 0 \Rightarrow \text{centro: } C_2\left(\dfrac{3}{2}, \dfrac{3}{2}\right) \text{ radio } r_2 = 1 \end{cases}$



$d(C_1, C_2) = \sqrt{\dfrac{9}{4} + \dfrac{9}{4}} = \dfrac{3}{\sqrt{2}}$ $r_1 + r_2 = \dfrac{3}{2}$ $r_2 - r_1 = \dfrac{1}{2}$

$d(C_1, C_2) > r_1 + r_2 \Rightarrow$ Las circunferencias son exteriores.

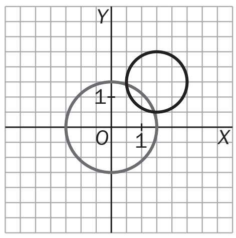
b) $\begin{cases} x^2 + y^2 - 2x^2 - 3y^2 + 3 = 0 \Rightarrow \text{centro: } C_1\left(1, \dfrac{3}{2}\right) \text{ radio } r_1 = \dfrac{1}{2} \\ 2x^2 + 2y^2 - 6x - 6y + 7 = 0 \Rightarrow \text{centro: } C_2\left(\dfrac{3}{2}, \dfrac{3}{2}\right) \text{ radio } r_2 = 1 \end{cases}$



$d(C_1, C_2) = \sqrt{\dfrac{1}{4}} = \dfrac{1}{2}$ $r_1 + r_2 = \dfrac{3}{2}$ $r_2 - r_1 = \dfrac{1}{2}$

$d(C_1, C_2) = r_1 - r_2 \Rightarrow$ Las circunferencias son tangentes interiores.

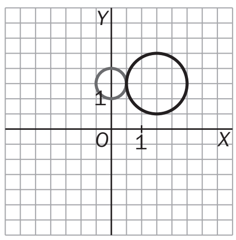
c) $\begin{cases} 2x^2 + 2y^2 = 5 \Rightarrow \text{centro: } C_1\,(0, 0) \text{ radio } r_1 = \dfrac{5}{2} \\ 2x^2 + 2y^2 - 6x - 6y + 7 = 0 \Rightarrow \text{centro: } C_2\left(\dfrac{3}{2}, \dfrac{3}{2}\right) \text{ radio } r_2 = 1 \end{cases}$



$d(C_1, C_2) = \sqrt{\dfrac{18}{4}} = \dfrac{3}{\sqrt{2}}$ $r_1 + r_2 = \dfrac{7}{2}$ $r_2 - r_1 = \dfrac{3}{2}$

$r_1 - r_2 < d(C_1, C_2) < r_1 + r_2 \Rightarrow$ Las circunferencias son secantes.

d) $\begin{cases} x^2 + y^2 - 3y^2 + 2 = 0 \Rightarrow \text{centro: } C_1\,(0, \dfrac{3}{2}) \text{ radio } r_1 = \dfrac{1}{2} \\ 2x^2 + 2y^2 - 6x - 6y + 7 = 0 \Rightarrow \text{centro: } C_2\left(\dfrac{3}{2}, \dfrac{3}{2}\right) \text{ radio } r_2 = 1 \end{cases}$



$d(C_1, C_2) = \dfrac{3}{2}$ $r_1 + r_2 = \dfrac{3}{2}$ $r_2 - r_1 = \dfrac{1}{2}$

$d(C_1, C_2) = r_1 + r_2 \Rightarrow$ Las circunferencias son tangentes exteriores.

6.27. Calcula la potencia de cada punto respecto de la circunferencia indicada y señala su posición relativa.

a) $P(1, 3)$ y $8x^2 + 8y^2 - 79x - 32y + 95 = 0$
b) $P(1, -1)$ y $2x^2 + 2y^2 - x = 0$
c) $P(5, 3)$ y $x^2 + y^2 - 7x - 8y = 0$

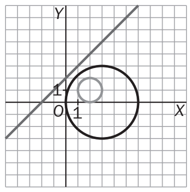
a) $Pot_{Cf}(P) = 8 \cdot 1^2 + 8 \cdot 3^2 - 79 \cdot 1 - 32 \cdot 3 + 95 = 0$ El punto pertenece a la circunferencia.
b) $Pot_{Cf}(P) = 2 \cdot 1^2 + 2 \cdot (-1)^2 - 1 = 3 > 0$ El punto es exterior a la circunferencia.
c) $Pot_{Cf}(P) = 5^2 + 3^2 - 7 \cdot 5 - 8 \cdot 3 = -25 < 0$ El punto es interior a la circunferencia.

6.28. Calcula el eje radical de las siguientes parejas de circunferencias y representa gráficamente la situación en cada caso.

a) $x^2 + y^2 - 4x - 2y + 4 = 0$; $x^2 + y^2 - 6x = 0$
b) $x^2 + y^2 - 2y - 3 = 0$; $2x^2 + 2y^2 - 4y = 0$

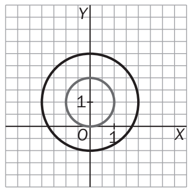
a) $\begin{cases} x^2 + y^2 - 4x - 2y + 4 = 0 \\ x^2 + y^2 - 6x = 0 \end{cases} \Rightarrow -4x - 2y + 4 + 6x = 0$

$\Rightarrow 2x - 2y + 4 = 0 \Rightarrow x - y + 2 = 0$ Eje radical: $x - y + 2 = 0$



b) $\begin{cases} x^2 + y^2 - 2y - 3 = 0 \\ 2x^2 + 2y^2 - 4y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 - 2y - 3 = 0 \\ x^2 + y^2 - 2y = 0 \end{cases}$

Las circunferencias son concéntricas. No existe el eje radical.



6.29. Halla el centro radical de las circunferencias $C_1 \equiv x^2 + y^2 = 16$, $C_2 \equiv x^2 + y^2 - 2x + 4y - 4 = 0$, $C_3 \equiv x^2 + y^2 + 6x - 6y + 14 = 0$

$C_1 \equiv x^2 + y^2 = 16$ $C_2 \equiv x^2 + y^2 - 2x + 4y - 4 = 0$ $C_3 \equiv x^2 + y^2 + 6x - 6y + 14 = 0$
Eje radical de C_1 y C_2: $2x - 4y - 16 + 4 = 0 \Rightarrow x - 2y - 6 = 0$
Eje radical de C_1 y C_3: $-16 - 6x + 6y - 14 = 0 \Rightarrow x - y + 5 = 0$
Eje radical de C_2 y C_3: $-2x + 4y - 6x + 6y - 14 = 0 \Rightarrow 4x - 5y + 9 = 0$
Centro radical: $\begin{cases} x - 2y = 6 \\ x - y = -5 \end{cases} \Rightarrow y = -11,\ x = -16 \quad (-16, -11)$

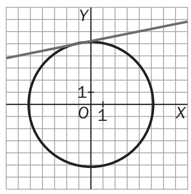
6.30. Calcula las tangentes a las circunferencias siguientes en el punto dado.

a) $x^2 + y^2 = 26$ en $P(-1, 5)$
b) $3x^2 + 3y^2 - 4x + 17y + 23 = 0$ en $P(1, -2)$

a) La recta tangente debe ser perpendicular al radio correspondiente al punto:

$C(0, 0)\ P(-1, 5) \Rightarrow \overline{CP} = \dfrac{x}{-1} = \dfrac{y}{5} \Rightarrow 5x + y = 0$

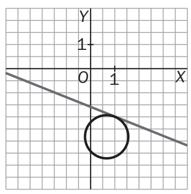
La tangente será:
$x - 5y + k = 0 \Rightarrow -1 - 25 + k = 0 \Rightarrow k = 26 \Rightarrow x - 5y + 26 = 0$



b) La recta tangente debe ser perpendicular al radio correspondiente al punto:

$C\left(\dfrac{2}{3}, -\dfrac{17}{6}\right) P(1, -2) \Rightarrow \overline{CP} = \dfrac{x - 1}{2} = \dfrac{y + 2}{5} \Rightarrow 5x - 5 = 2y + 4 \Rightarrow 5x - 2y - 9 = 0$

La tangente será: $2x + 5y + k = 0 \Rightarrow 2 - 10 + k = 0 \Rightarrow k = 8 \Rightarrow 2x + 5y + 8 = 0$



6.31. **Dada la circunferencia $(x + 3)^2 + (y - 1)^2 = 25$, calcula las ecuaciones de sus tangentes paralelas a la recta $3x + 4y - 16 = 0$.**

Las posibles soluciones serán de la forma $3x + 4y + k = 0$.

La distancia del centro a la recta debe coincidir con el radio:

$$\frac{|3 + (-3) + 4 \cdot 1 + k|}{\sqrt{9 + 16}} = 5 \Rightarrow \begin{cases} -5 + k = 25 \Rightarrow k = 30 \Rightarrow 3x + 4y + 30 = 0 \\ 5 - k = 25 \Rightarrow k = -20 \Rightarrow 3x + 4y - 20 = 0 \end{cases}$$

6.32. **Calcula las ecuaciones de las tangentes a la circunferencia $x^2 + y^2 - 4x + 4y - 17 = 0$ que sean perpendiculares a la recta de ecuación $3x - 4y = 14$.**

Centro: $(2, -2)$ Radio: $r = \sqrt{4 + 4 + 17} = 5$

Las posibles soluciones serán de la forma $4x + 3y + k = 0$.

La distancia del centro a la recta debe coincidir con el radio:

$$\frac{|4 \cdot 2 + 3 \cdot (-2) + k|}{\sqrt{25}} = 5 \Rightarrow \begin{cases} 2 + k = 25 \Rightarrow k = 23 \Rightarrow 4x + 3y + 23 = 0 \\ -2 - k = 25 \Rightarrow k = -27 \Rightarrow 4x + 3y - 27 = 0 \end{cases}$$

6.33. **Dada la circunferencia $4x^2 + 4y^2 - 24x + 4y + 33 = 0$, calcula la ecuación de otra concéntrica con ella y cuyo radio mida la mitad.**

Centro: $\left(3, -\frac{1}{2}\right)$ Radio: $r = \sqrt{9 + \frac{1}{4} - \frac{33}{4}} = 1$

$$(x - 3)^2 + \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} \Rightarrow x^2 + 9 - 6x + y^2 + \frac{1}{4} + y - \frac{1}{4} = 0 \Rightarrow x^2 + y^2 - 6x + y + 9 = 0$$

6.34. **Halla la ecuación de la circunferencia que pasando por el punto $P(2, 9)$ es tangente a los dos ejes de coordenadas.**

El centro debe ser el punto $(r\ \ r)$, siendo r el radio:

$(x - r)^2 + (y - r)^2 = r^2 \Rightarrow x^2 + y^2 - 2rx - 2ry + r^2 = 0$

$4 + 81 - 4r - 18r + r^2 = 0 \Rightarrow r^2 - 22r + 85 = 0 \Rightarrow r = \dfrac{22 \pm 12}{2}$

$\Rightarrow \begin{cases} r = 17 \\ r = 5 \end{cases}$

$x^2 + y^2 - 34x - 34y + 289 = 0$

$x^2 + y^2 - 10x - 10y + 25 = 0$

6.35. **Calcula la ecuación de la circunferencia que tiene por centro el punto $C(1, 4)$ y es tangente a la recta**

$3x + 4y - 4 = 0$.

La distancia del centro a la recta debe coincidir con el radio:

$$\frac{|3 \cdot 1 + 4 \cdot 4 - 4|}{\sqrt{25}} = r^2 \Rightarrow \frac{15}{5} = r^2 \Rightarrow 3 = r^2$$

La ecuación de la circunferencia es $(x - 1)^2 + (y - 4)^2 = 3$.

Parábola

6.36*.Calcula la ecuación de las siguientes parábolas. (En c), d), e) y f), el vértice es el origen.)

a) Foco, $F(2, 0)$, y directriz, $x = 6$.

b) Foco, $F(0, 4)$, y directriz, $y = 1$.

c) Parámetro, $p = 2$ y abierta hacia la derecha.

d) Parámetro, $p = 4$ y abierta hacia la izquierda.

e) Parámetro, $p = 6$ y abierta hacia arriba.

f) Parámetro, $p = 8$ y abierta hacia abajo.

g) Vértice, $V(2, 1)$, y foco, $F(6, 1)$.

h) Vértice, $V(-2, 1)$, y directriz, $y = -2$.

i) Vértice, $V(-2, -2)$, y foco, $F(-2, -6)$.

j) Vértice, $V(0, 1)$, y directriz, $x = 7$.

a) Vértice en $(4, 0)$, $p = 4$; $y^2 = -2p\,(x - 4) \Rightarrow y^2 = -8x + 32$

b) Vértice en $\left(0, \frac{5}{2}\right)$, $p = 3$, $x^2 = 2p\left(y - \frac{5}{2}\right) \Rightarrow x^2 = 6y - 15$

c) $p = 2$, $y^2 = 2px \Rightarrow y^2 = 4x$

d) $p = 4$, $y^2 = -2px \Rightarrow y^2 = -8x$

e) $p = 6$, $x^2 = 2py \Rightarrow x^2 = 12y$

f) $p = 8$, $x^2 = -2py \Rightarrow x^2 = -16y$

g) Abierta hacia la derecha. $p = 8$, $(y - 1)^2 = 16(x - 2)$

h) Abierta hacia arriba. $p = 6$, $(x + 2)^2 = 12(y - 1)$

i) Abierta hacia abajo. $p = 8$, $(x + 2)^2 = -16(y + 2)$

j) Abierta hacia la izquierda. $p = 14$, $(y - 1)^2 = -28x$

6.37. Para las siguientes parábolas, halla el vértice, el foco y la ecuación de la directriz.

a) $y^2 = 10x$

b) $x^2 = 2y$

c) $y^2 = 2(x - 4)$

d) $y^2 = -x$

e) $x^2 = -3y$

f) $(y - 1)^2 = 8(x - 1)$

a) Vértice: $(0, 0)$. Foco: $\left(\frac{5}{2}, 0\right)$. Directriz: $x = -\frac{5}{2}$

b) Vértice: $(0, 0)$. Foco: $\left(0, \frac{1}{2}\right)$. Directriz: $y = -\frac{1}{2}$

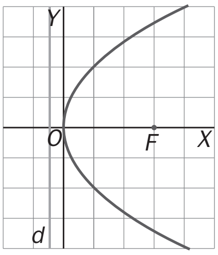
c) Vértice: $(4, 0)$. Foco: $\left(\frac{9}{2}, 0\right)$. Directriz: $x = \frac{7}{2}$

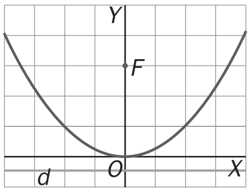
d) Vértice: $(0, 0)$. Foco: $\left(-\frac{1}{4}, 0\right)$. Directriz: $x = \frac{1}{4}$

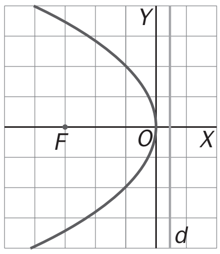
e) Vértice: $(0, 0)$. Foco: $\left(0, -\frac{3}{4}\right)$. Directriz: $x = \frac{3}{4}$

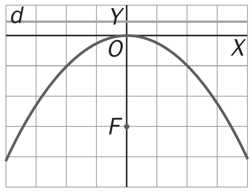
f) Vértice: $(1, 1)$. Foco: $(3, 1)$. Directriz: $x = -1$

6.38. Para cada una de las siguientes parábolas, calcula su vértice, su foco y su directriz, el valor del parámetro p y su ecuación reducida.

a)


b)


c)


d)


a) Vértice: (0, 0). Foco: (3, 0). Directriz: $x = -3$; $p = 6$; $y^2 = 12x$

b) Vértice: (0, 0). Foco: (−4, 0). Directriz: $x = 4$; $p = 8$; $y^2 = -16x$

c) Vértice: (0, 0). Foco: (0, 1). Directriz: $y = -1$; $p = 2$; $x^2 = 4y$

d) Vértice: (0, 0). Foco: (0, −3). Directriz: $y = -3$; $p = 6$; $x^2 = -12y$

6.39. Halla el vértice, el foco y la ecuación de la directriz en cada una de las siguientes parábolas.

a) $y^2 - 4y - 2x + 2 = 0$

b) $x^2 - 2x - y + 1 = 0$

a) $(y - 2)^2 - 4 - 2x + 2 = 0 \Rightarrow (y - 2)^2 = 2(x + 1)$ Vértice: $(-1, 2)$ Foco: $\left(-\frac{1}{2}, 2\right)$ Directriz: $x = -\frac{3}{2}$

b) $(x - 1)^2 = y$ Vértice: $(1, 0)$ Foco: $\left(1, \frac{1}{4}\right)$ Directriz: $y = -\frac{1}{4}$

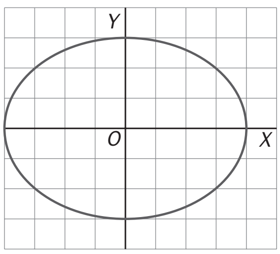
6.40. La parábola de ecuación $y^2 - 4y - 6x - 5 = 0$ tiene por foco el punto (0, 2). Halla su directriz.

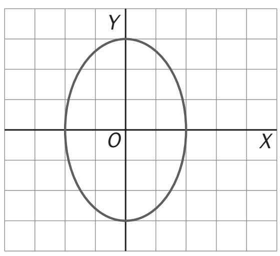
Completando cuadrados: $(y - 2)^2 - 9 - 6x = 0 \Rightarrow (y - 2)^2 = 9 + 6x \Rightarrow (y - 2)^2 = 2 \cdot 3\left(x - \frac{3}{2}\right)$.

Por tanto, $p = 3$, el vértice es $\left(\frac{3}{2}, 2\right)$, y la directriz, $x = 3$.

Elipse

6.41. Para cada una de las elipses de la figura, indica las medidas de sus semiejes y de su semidistancia focal, escribe las coordenadas de los vértices y de los focos, y calcula el valor de la excentricidad. Escribe su ecuación.

a)


b)


a) $a = 4$, $b = 3$, $c = \sqrt{16 - 9} = \sqrt{7}$. Vértices: (4, 0), (−4, 0), (0, 3) y (0, −3)

Focos: $(\sqrt{7}, 0)$, $(-\sqrt{7}, 0)$. Excentricidad: $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{7}}{4}$. Ecuación: $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$

b) $a = 3$, $b = 2$, $c = \sqrt{9 - 4} = \sqrt{5}$. Vértices: (2, 0), (−2, 0), (0, 3), (0, −3)

Focos: $(0, \sqrt{5})$, $(0, -\sqrt{5})$. Excentricidad: $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{5}}{3}$. Ecuación: $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$

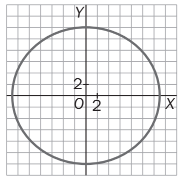
6.42. Para cada una de las siguientes elipses, indica las medidas de sus semiejes y de su semidistancia focal, escribe las coordenadas de los vértices y de los focos, y calcula el valor de la excentricidad. Dibújalas.

a) $\frac{x^2}{169} + \frac{y^2}{144} = 1$ b) $16x^2 + 25y^2 = 400$ c) $\frac{(x-3)^2}{10} + \frac{(y+2)^2}{6} = 1$ d) $2(x-1)^2 + y^2 = 2$

a) $a = 13$ $b = 12$ $c = \sqrt{169 - 144} = 5$

Vértices: $(-13, 0)$ $(13, 0)$ $(0, 12)$ $(0, -12)$ Focos: $(5, 0)$ $(-5, 0)$

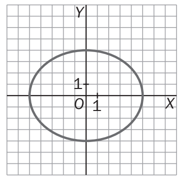
Excentricidad: $e = \frac{c}{a} = \frac{5}{13}$



b) $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1 \Rightarrow a = 5$ $b = 4$ $c = \sqrt{25 - 16} = 3$

Vértices: $(5, 0)$ $(-5, 0)$ $(0, 4)$ $(0, -4)$ Focos: $(-3, 0)$ $(3, 0)$

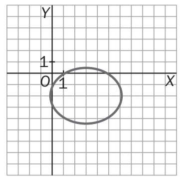
Excentricidad: $e = \frac{c}{a} = \frac{3}{5}$



c) $a = \sqrt{10}$ $b = \sqrt{6}$ $c = \sqrt{10 - 6} = 2$

Vértices: $\left(3 - \sqrt{10}, -2\right)$ $\left(3 + \sqrt{10}, -2\right)$ $\left(3, -2 - \sqrt{6}\right)$ $\left(3, -2 + \sqrt{6}\right)$

Focos: $(1, -2)$ $(5, -2)$ Excentricidad: $e = \frac{c}{a} = \frac{2}{\sqrt{10}}$

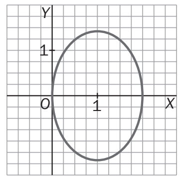


d) $\frac{(x-1)^2}{1} + \frac{y^2}{2} = 1$

$a = \sqrt{2}$ $b = 1$ $c = \sqrt{2 - 1} = 1$

Vértices: $(2, 0)$ $(0, 0)$ $\left(1, \sqrt{2}\right)$ $\left(1, -\sqrt{2}\right)$

Focos: $(1, 1)$ $(1, -1)$ Excentricidad: $e = \frac{c}{a} = \frac{1}{\sqrt{2}}$



6.43. Calcula la ecuación de las siguientes elipses. (Salvo indicación, el centro es el origen.)

a) $a = 5$, $c = 3$.

b) Los radios vectores de un punto miden 7 y 3, y $c = 4$.

c) Foco, $F(3, 0)$, y vértice, $A(4, 0)$.

d) Vértices, $A(6, 0)$ y $B(0, 3)$.

e) Foco, $F'(-2, 0)$, y excentricidad, $e = 0{,}4$.

f) Pasa por los puntos $P(1, 2)$ y $Q(-2, 0)$.

g) Pasa por $P(5, 0)$ y su excentricidad es $\frac{3}{5}$.

h) Foco, $F'(0, 2)$, y semieje mayor, $a = 3$.

i) Centro, el punto $C(-2, 1)$, $a = 13$ y $b = 5$.

a) $b = \sqrt{25 - 9} = 4 \Rightarrow \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$

b) $2a = 7 + 3 \Rightarrow a = 5,$ $c = 4,$ $b = \sqrt{25 - 16} = 3 \Rightarrow \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$

c) $a = 4$, $c = 3$, $b = \sqrt{16 - 9} = \sqrt{7} \Rightarrow \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{7} = 1$

d) $a = 6$, $b = 3 \Rightarrow \frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{9} = 1$

e) $c = 2$, $e = \frac{c}{a} \Rightarrow a = \frac{2}{0{,}4} = 5 \Rightarrow b = \sqrt{25 - 4} = \sqrt{21} \Rightarrow \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{21} = 1$

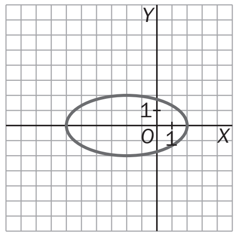
f) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{a^2} + \frac{4}{b^2} = 1 \\ \frac{4}{a^2} = 1 \end{cases} \Rightarrow a = 2,\ b = \frac{4}{\sqrt{3}} \Rightarrow \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{\frac{16}{3}} = 1$

g) $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{c}{a} = \dfrac{3}{5} \\ \dfrac{25}{a^2} = 1 \end{cases} \Rightarrow a = 5,\ c = 3,\ b = 4 \Rightarrow \dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{16} = 1$

h) $a = 3,\ c = 2,\ b = \sqrt{9 + 4} = \sqrt{13} \Rightarrow \dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{13} = 1$

i) $\dfrac{(x + 2)^2}{169} + \dfrac{(y - 1)^2}{25} = 1$

6.44. Dada la elipse $x^2 + 4y^2 + 4x - 12 = 0$, dibújala, y calcula las medidas de los semiejes y de la semidistancia focal, el centro, los focos, los vértices y la excentricidad. ¿Cuál es la ecuación de la elipse que tiene los mismos elementos pero cuyo centro es el origen de coordenadas?



$(x + 2)^2 - 4 + 4y^2 = 12 \Rightarrow \dfrac{(x + 2)^2}{16} + \dfrac{y^2}{4} = 1$

$a = 4,\ b = 2,\ c = \sqrt{16 - 4} = \sqrt{12}$

Centro $(-2, 0)$ Focos $\left(-2 - \sqrt{12},\ 0\right)$ $\left(-2 + \sqrt{12},\ 0\right)$

Vértices $(-6, 0)$ $(2, 0)$ $(-2, 2)$ $(-2, -2)$

Excentricidad: $e = \dfrac{c}{a} = \dfrac{\sqrt{12}}{4}$ Ecuación reducida: $\dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{4} = 1$

Hipérbola

6.45. Halla la ecuación de las siguientes hipérbolas. (Salvo indicación, el centro es el origen.)

a) $a = 3$, $c = 5$.

b) Distancia focal, 10, y los radios vectores de un punto miden 10 y 2.

c) Foco, $F(4, 0)$, y vértice, $A(2, 0)$.

d) Vértices, $A(6, 0)$ y $B(0, 3)$.

e) Foco, $F'(-6, 0)$, y excentricidad, $e = 1{,}25$.

f) Pasa por los puntos $P(3, 0)$ y $Q(5, -3)$.

g) Pasa por $P(2, 0)$ y su excentricidad es $e = 1{,}5$.

h) Pasa por $P(15, 4)$, y su distancia focal vale $2\sqrt{90}$.

i) Centro, $C(2, -3)$, $a = 8$ y $c = 10$.

a) $b = \sqrt{25 - 9} = 4 \Rightarrow \dfrac{x^2}{9} - \dfrac{y^2}{16} = 1$

b) $2a = 10 - 2 \Rightarrow a = 4,\ \ c = 5,\ \ b = \sqrt{25 - 16} = 3 \Rightarrow \dfrac{x^2}{16} - \dfrac{y^2}{9} = 1$

c) $a = 2,\ \ c = 4,\ \ b = \sqrt{16 - 4} = \sqrt{12} \Rightarrow \dfrac{x^2}{4} - \dfrac{y^2}{12} = 1$

d) $\dfrac{x^2}{36} + \dfrac{y^2}{9} = 1$

e) $c = 6\ \ e = \dfrac{c}{a} \Rightarrow a = \dfrac{6}{1{,}25} = 4{,}8 \Rightarrow b = \sqrt{36 - 23{,}04} = 3{,}6 \Rightarrow \dfrac{x^2}{23{,}04} - \dfrac{y^2}{12{,}96} = 1$

f) $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{25}{a^2} - \dfrac{9}{b^2} = 1 \\ \dfrac{9}{a^2} = 1 \end{cases} \Rightarrow a = 3,\ \ b = \dfrac{9}{4} \Rightarrow \dfrac{x^2}{9} - \dfrac{y^2}{\dfrac{81}{16}} = 1$

g) $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{c}{a} = 1{,}5 \\ \dfrac{4}{a^2} = 1 \end{cases} \Rightarrow a = 2,\ \ c = 3,\ \ b = \sqrt{5} \Rightarrow \dfrac{x^2}{4} - \dfrac{x^2}{5} = 1$

h) $\begin{cases} \dfrac{225}{a^2} - \dfrac{16}{b^2} = 1 \\ c = \sqrt{90} = \sqrt{a^2 + b^2} \end{cases} \Rightarrow a = 9,\ \ b = 3 \Rightarrow \dfrac{x^2}{81} - \dfrac{y^2}{9} = 1$

i) $\dfrac{(x - 2)^2}{64} - \dfrac{(y + 3)^2}{36} = 1$

6.46. Encuentra la ecuación de la hipérbola que tiene por focos los puntos $F(3, 0)$ y $F'(-3, 0)$ y que pasa por el punto $P(8, 5\sqrt{3})$.

$2c = d(F, F') \Rightarrow c = 3$

$$\begin{cases} \dfrac{64}{a^2} - \dfrac{75}{b^2} = 1 \\ a^2 + b^2 = 9 \end{cases} \Rightarrow \frac{64}{(9 - b)^2} - \frac{75}{b^2} = 1 \Rightarrow b^4 + 130b^2 - 675 = 0 \Rightarrow b^2 = \frac{-130 \pm \sqrt{16900 + 4 \cdot 675}}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} b^2 = 5 \Rightarrow a^2 = 4 \\ b^2 = 135 \Rightarrow a^2 = -126 \text{ } \textit{imposible} \end{cases}$$

La hipérbola es $\dfrac{x^2}{4} - \dfrac{y^2}{5} = 1$.

6.47. Calcula la ecuación de una hipérbola si un foco es el punto $F(0, 10)$ y una asíntota la recta $y = x$.

$$\begin{cases} a = b \\ c = 10 \Rightarrow \sqrt{a^2 + b^2} \end{cases} \Rightarrow 2a^2 = 100 \Rightarrow a^2 = b^2 = 50$$

La hipérbola es $\dfrac{x^2}{50} - \dfrac{y^2}{50} = 1$.

6.48. Para cada una de las siguientes hipérbolas, indica las medidas de sus semiejes y de su semidistancia focal, escribe las coordenadas de los vértices y de los focos, y calcula las ecuaciones de las asíntotas y el valor de la excentricidad. Dibújalas.

a) $\dfrac{x^2}{144} - \dfrac{y^2}{25} = 1$

b) $36x^2 - 64y^2 = 2304$

c) $\dfrac{(x + 1)^2}{8} - \dfrac{(y - 2)^2}{6} = 1$

d) $-\dfrac{x^2}{64} + \dfrac{y^2}{225} = 1$

e) $4y^2 - x^2 = 4$

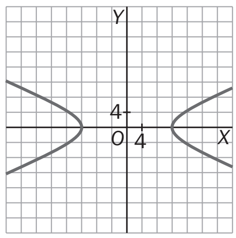
f) $-x^2 + 2(y + 1)^2 = 2$

a) $a = 12, \quad b = 5, \quad c = \sqrt{144 + 25} = 13$

Vértices: $(-12, 0) \quad (12, 0)$ Focos: $(-13, 0) \quad (13, 0)$

Asíntotas: $y = \pm\dfrac{5}{12}x$

Excentricidad: $e = \dfrac{c}{a} = \dfrac{13}{12}$

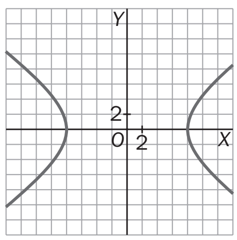


b) $\dfrac{x^2}{64} - \dfrac{y^2}{36} = 1 \quad a = 8, b = 6, c = 10$

Vértices: $(-8, 0) \quad (8, 0)$ Focos: $(-10, 0) \quad (10, 0)$

Asíntotas: $y = \pm\dfrac{3}{4}x$

Excentricidad: $e = \dfrac{c}{a} = \dfrac{5}{4}$



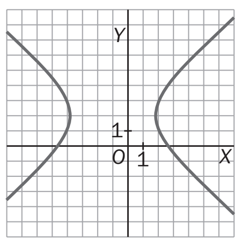
c) $a = \sqrt{8}, \quad b = \sqrt{6}, \quad c = \sqrt{14}$

Vértices: $\left(-1 - \sqrt{8}, 2\right) \quad \left(-1 + \sqrt{8}, 2\right)$

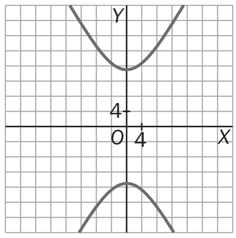
Focos: $\left(-1 - \sqrt{14}, 2\right) \quad \left(-1 + \sqrt{14}, 2\right)$

Asíntotas: $y - 2 = \pm\dfrac{\sqrt{6}}{\sqrt{8}}(x + 1)$

Excentricidad: $e = \dfrac{c}{a} = \dfrac{\sqrt{14}}{\sqrt{8}} = \sqrt{\dfrac{7}{4}}$



d) $a = 15, \quad b = 8, \quad c = \sqrt{225 + 64} = 17$

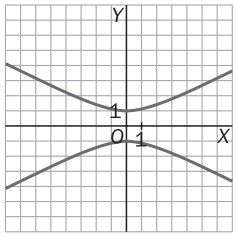


Vértices: (0, 15) (0, −15) Focos: (0, −17) (0, 17)

Asíntotas: $y = \pm\dfrac{8}{15}y$

Excentricidad: $e = \dfrac{c}{a} = \dfrac{17}{15}$

e) $\dfrac{y^2}{1} - \dfrac{x^2}{4} = 1, \quad a = 1, \quad b = 2, \quad c = \sqrt{5}$

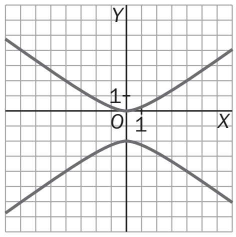


Vértices: (0, 1) (0, −1) Focos: $\left(0, -\sqrt{5}\right)$ $\left(0, \sqrt{5}\right)$

Asíntotas: $y = \pm 2y$

Excentricidad: $e = \dfrac{c}{a} = \sqrt{5}$

f) $\dfrac{(y + 1)^2}{1} - \dfrac{x^2}{2} = 1$



$a = 1, \quad b = \sqrt{2}, \quad c = \sqrt{3}$

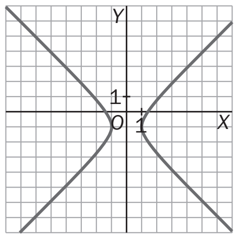
Vértices: (0, 0) (0, −2) Focos: $\left(0, -1+\sqrt{3}\right)$ $\left(0, -1-\sqrt{3}\right)$

Asíntotas: $x = \pm\sqrt{2}\,(y + 1)$

Excentricidad: $e = \dfrac{c}{a} = \sqrt{3}$

6.49. Dada la hipérbola $x^2 - y^2 - 2y - 2 = 0$, dibújala, y calcula el centro, los semiejes, la semidistancia focal, los focos, los vértices y la excentricidad. ¿Cuál es la ecuación de la hipérbola que tiene los mismos elementos pero cuyo centro es el origen?

$x^2 - \left[(y + 1)^2 - 1\right] - 2 = 0 \Rightarrow x^2 - (y + 1)^2 = 1 \Rightarrow a = 1, \quad b = 1, \quad c = \sqrt{2}$

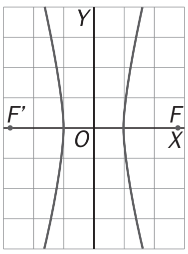


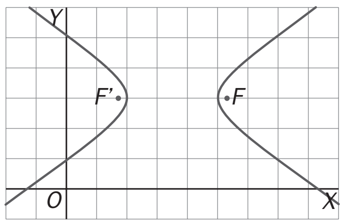
Vértices: (1, −1) (−1, −1) Focos: $\left(-\sqrt{2}, \; -1\right)$ $\left(\sqrt{2}, \; -1\right)$

Asíntotas: $y + 1 = \pm x$ Excentricidad: $e = \dfrac{c}{a} = \sqrt{2}$

Ecuación reducida: $x^2 - y^2 = 1$

6.50. Para cada una de las hipérbolas, indica las medidas de sus semiejes y de su semidistancia focal, escribe las coordenadas de los vértices y de los focos, y el valor de la excentricidad. Halla su ecuación y las de sus asíntotas.





a) $a = 1, \quad b = 3, \quad c = \sqrt{1 + 9} = \sqrt{10}$ $\qquad \dfrac{x^2}{1} - \dfrac{y^2}{9} = 1$

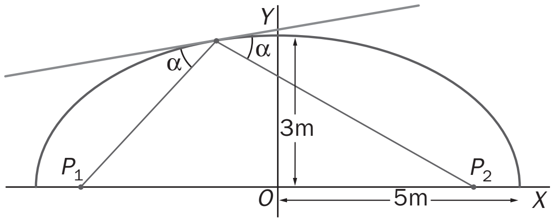
Vértices: (−1, 0), (1, 0) Focos: $\left(-\sqrt{10}, 0\right), \left(\sqrt{10}, 0\right)$ Asíntotas: $y = \pm 3x$ Excentricidad: $e = \dfrac{c}{a} = \sqrt{10}$

b) $a = 1, \quad b = 3 \quad c = \sqrt{4 + 1} = \sqrt{5}$ $\qquad \dfrac{x^2}{1} - \dfrac{y^2}{9} = 1$

Vértices: (6, 4), (2, 4) Focos: $\left(4 + \sqrt{5}, 4\right), \left(4 - \sqrt{5}, 4\right)$ Asíntotas: $y - 4 = \pm\dfrac{1}{2}(x - 4)$ Excentricidad: $e = \dfrac{c}{a} = \dfrac{\sqrt{5}}{2}$

PROBLEMAS

6.51. El techo de una estación de metro tiene forma elíptica tal y como muestra el dibujo.



a) Suponiendo las distancias y el sistema de referencia indicado, halla la ecuación de la elipse del techo y calcula las coordenadas de los focos.

b) Si dos personas se sitúan una en cada foco y una de ellas habla en cualquier dirección, el sonido rebota de manera que el ángulo α que forma esta dirección con la tangente es el mismo que el que forma la dirección rebotada con esa misma tangente. ¿Hacia dónde se dirigirá el sonido rebotado con toda seguridad?

c) Comprueba la propiedad anterior suponiendo que la primera persona hable en dirección al punto $\left(4, \frac{9}{5}\right)$ de la elipse. Para ello calcula la ecuación de la recta correspondiente al sonido rebotado y estudia si pasa por el otro foco.

a) $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$ Focos $F'(-4, 0)$ y $F(4, 0)$

b) Al ser la tangente la bisectriz de dos radios vectores y ser la dirección de salida un radio vector, la dirección rebotada debe ser el otro radio vector del punto de choque y pasar, por tanto, por el otro foco.

c) Los radios vectores son $\begin{cases} PF' \equiv \dfrac{x+4}{8} = \dfrac{y}{9/5} \Rightarrow 9x - 40y + 36 = 0 \\ PF \equiv x = 4 \end{cases}$

Las bisectrices de los radios vectores son $\left\{ \dfrac{9x - 40y + 36}{41} = \pm(x - 4) \right.$

Como la pendiente debe ser negativa, la bisectriz que interesa es $9x - 40y + 36 = 41(x - 4) \Rightarrow$

$\Rightarrow 4x + 5y + 25 = 0$

Al resolver el sistema $\begin{cases} \dfrac{x^2}{25} = \dfrac{y^2}{9} = 1 \\ 4x + 5y + 25 = 0 \end{cases}$ se comprueba que la solución es única $\left(4, \frac{9}{5}\right)$ y que, por tanto, la bisectriz es tangente a la elipse.

6.52. Los tres tipos de cónicas se pueden definir todos a la vez de la siguiente manera: "Una cónica es el lugar geométrico de los puntos del plano tales que el cociente de distancias a un punto fijo llamado foco y a una recta fija llamada directriz es constante".

Si la constante es menor que la unidad, la cónica es una elipse.

Si la constante es igual a la unidad, la cónica es una parábola.

Si la constante es mayor que la unidad, la cónica es una hipérbola.

Comprueba lo anterior hallando:

a) El lugar geométrico de los puntos del plano tales que el cociente de distancias al punto $F(3, 0)$ y a la recta $x = \frac{25}{3}$ es 0,6.

b) El lugar geométrico de los puntos del plano tales que el cociente de distancias al punto $F(5, 0)$ y a la recta $x = \frac{16}{5}$ es 1,25.

c) En los dos casos anteriores, ¿a qué es igual la constante de la definición?

a) $\dfrac{\sqrt{(x-3)^2+y^2}}{x-\dfrac{25}{3}} = \dfrac{3}{5} \Rightarrow \left(5\sqrt{(x-3)^2+y^2}\right)^2 = (3x-25)^2 \Rightarrow 25(x^2+9-6x+y^2) = 9x^2+625-150x \Rightarrow$

$\Rightarrow 16x^2 + 25y^2 = 400 \Rightarrow \dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{16} = 1$ Elipse

b) $\dfrac{\sqrt{(x-5)^2+y^2}}{x-\dfrac{16}{5}} = \dfrac{5}{4} \Rightarrow \left(4\sqrt{(x-5)^2+y^2}\right)^2 = (5x-16)^2 \Rightarrow 16(x^2+25-10x+y^2) = 25x^2+256-160x \Rightarrow$

$\Rightarrow 9x^2 + 16y^2 = 144 \Rightarrow \dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{9} = 1$ Hipérbola

c) La constante coincide con la excentricidad de la cónica.

6.53. Cuando se chuta un balón, la trayectoria que describe el mismo es una parábola. El tipo de parábola depende del ángulo con el que se golpea el balón y de la velocidad inicial con que se lanza el mismo.

Un jugador A ha golpeado un balón hacia su compañero B y ha conseguido las siguientes distancias.

- Altura máxima alcanzada por el balón: 2,75 m.
- Distancia hasta el punto donde el balón ha botado: 12,5 m.

Con estos datos:

a) Escribe la ecuación de la trayectoria tomando una referencia adecuada.

b) Indica las coordenadas del foco y del vértice, y la ecuación de la directriz.

c) Si el jugador B se encuentra a 5 m del A, ¿a qué altura pasa el balón por su vertical?

Tomando como origen el punto A:

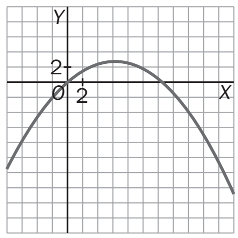
$(x - 6{,}25)^2 = -p(y - 2{,}75)$

Como debe pasar por el origen: $6{,}25^2 = -2p \cdot 2{,}75 \Rightarrow p = 7{,}1$

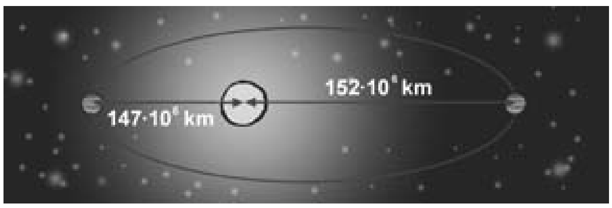
a) $(x - 6{,}25)^2 = -14{,}2\,(y - 2{,}75)$

b) Vértice: $(6{,}25;\ 2{,}75)$ Foco: $(6{,}25;\ -0{,}8)$ Directriz: $d \equiv y = 6{,}3$

c) $x = 5 \Rightarrow (5 - 6{,}25)^2 = -14{,}2(y - 2{,}75) \Rightarrow y = 2{,}64$ metros



6.54. La Tierra gira alrededor del Sol describiendo una elipse en uno de cuyos focos se encuentra el Sol. El punto en el que la distancia entre la Tierra y el Sol es máxima se denomina afelio, y el punto donde es mínima, perihelio.



Con los datos de la figura, calcula la excentricidad de la órbita de la Tierra e interprétala.

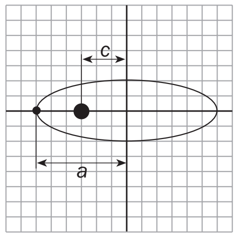
$\begin{cases} a + c = 152 \\ a - c = 147 \end{cases} \Rightarrow a = 149{,}5 \quad c = 2{,}5 \Rightarrow e = \dfrac{c}{a} = 0{,}0167$

La órbita es una elipse muy poco achatada. Es casi una circunferencia.

6.55. La máxima distancia que separa a la Tierra de la Luna es de 63 veces el radio de la Tierra, y la excentricidad de la órbita que describe la Luna en su movimiento de traslación alrededor de la Tierra es, aproximadamente, $e = 0{,}0678$.

Calcula la distancia mínima, en kilómetros, que puede separar a la Tierra de la Luna.

Radio de la Tierra: 6357 km.



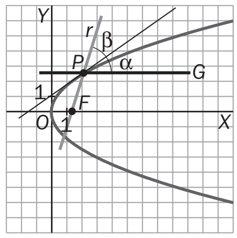
Mínima distancia entre la Luna y la Tierra: $a - c$

Máxima distancia entre la Luna y la Tierra: $a + c$

$$\begin{cases} a + c = 63 \cdot 6357 = 400491 \\ \dfrac{c}{a} = 0{,}0678 \end{cases} \Rightarrow a = 375\,061,\ c = 25\,429 \Rightarrow a - c = 349\,632 \text{ km}$$

6.56. En la figura aparece la sección de un faro de un coche con forma parabólica. La bombilla está situada en el foco y emite rayos en todas las direcciones. Demuestra que la dirección de cualquier rayo rebotado es paralela al eje de la parábola. ¿Te parece conveniente que las secciones de los faros de los coches tengan forma parabólica?

Tracemos la recta tangente a la parábola en un punto *P*. Tracemos la recta que une *P* con el foco *F* de la parábola y la recta *PG* que pasa por *P* y es paralela al eje de simetría x de la parábola. Los ángulos *a* y *b* que forma la recta tangente en *P* con las rectas *PF* y *PG* son iguales. Así, la tangente es bisectriz del ángulo entre las rectas *r* y *PG*, y *PG* es la dirección del rayo rebotado.



6.57. ¿Para qué valores del parámetro k la ecuación $\dfrac{x^2}{25 - k} + \dfrac{y^2}{16-k} = 1$ representa una elipse? Comprueba que todas esas elipses tienen los mismos focos.

Se tiene que $\begin{cases} a^2 = 25 - k \\ b^2 = 16 - k \end{cases}$. Por la relación general de la elipse: $c^2 = a^2 - b^2 = 25 - k - (16 - k) = 9 \Rightarrow c = \pm 3$

Por tanto, los focos son $(3\ ,\ 0)$ y $(-3\ ,\ 0)$.

La ecuación representa una elipse si se cumple que $k < 25$ y $k < 16$, es decir si $k < 16$.

6.58. Un avión de la ONU está lanzando víveres sobre un punto del suelo situado en un campamento de refugiados. Si el avión se mueve a una velocidad de 150 metros por segundo, y la ecuación que relaciona la altura, *h*, a la que se encuentra la carga sobre el suelo con el tiempo medido desde que cae del avión es

$$h = 400 - 4{,}9\, t^2$$

a) Calcula cuánto tiempo tardará la carga en alcanzar el suelo.

b) Determina a qué distancia del punto elegido debe soltar la carga el piloto para que ésta aterrice en el punto marcado.

Suponemos que la acción del aire es despreciable.

a) Cuando la carga alcanza el suelo, $h = 0$. Por tanto, $400 - 4{,}9\, t^2 = 0 \Rightarrow t = \sqrt{\dfrac{400}{4{,}9}} = \dfrac{200}{7} = 28{,}57$.

La carga tarda 28,57 segundos en alcanzar el suelo.

b) Cuando el avión libera la carga, la velocidad de la misma, en la dirección del eje *OX*, es de 150 m/s. Por tanto, en 28,57 segundos habrá recorrido $28{,}57 \cdot 150 = 12\,856{,}5$ metros. Debe soltar la carga a 12 856,5 metros del punto indicado.

PROFUNDIZACIÓN

6.59. Dados los puntos $A(2, 3)$ y $B(6, 1)$, halla la ecuación y describe el lugar geométrico de los puntos $P(x, y)$ del plano tales que los vectores $\overrightarrow{AP}$ y $\overrightarrow{BP}$ son perpendiculares entre sí.

Sea $P(x, y)$ un punto genérico.

$$\begin{cases} \overrightarrow{AP} = (x - 2, y - 3) \\ \overrightarrow{BP} = (x - 6, y - 1) \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{BP} = (x - 2) \cdot (x - 6) + (y - 3)(y - 1) = x^2 - 8x + 12 + y^2 - 4y + 3 = 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow (x - 4)^2 - 16 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} + 15 = 0 \Rightarrow (x - 4)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{5}{4}$ Es decir, se trata de una circunferencia de centro $\left(4, \frac{1}{2}\right)$ y radio $\frac{\sqrt{5}}{2}$

6.60. Identifica cada una de las siguientes cónicas y establece sus elementos más importantes.

a) $x^2 - 4x - 4y = 0$

b) $x^2 + y^2 + 6x - 10y + 33 = 0$

c) $9x^2 - 4y^2 - 24y - 72 = 0$

d) $3x^2 + 4y^2 - 18x + 16y + 31 = 0$

e) $25x^2 - 144y^2 + 288y - 3744 = 0$

a) $(x - 2)^2 - 4 = 4y \Rightarrow (x - 2)^2 = 4(y + 1)$ Parábola abierta hacia arriba y con vértice en el punto $(2, -1)$

b) $(x + 3)^2 - 9 + (y - 5)^2 - 25 + 33 = 0 \Rightarrow (x + 3)^2 + (y - 5)^2 = 1$ Circunferencia de centro $(-3, 5)$ y radio 1

c) $9x^2 - 4(y^2 + 6y) - 72 = 0 \Rightarrow 9x^2 - 4(y + 3)^2 + 36 - 72 = 0 \Rightarrow 9x^2 - 4(y + 3)^2 = 36 \Rightarrow \frac{x^2}{4} - \frac{(y + 3)^2}{9} = 1$

Hipérbola centrada en $(0, -3)$ y semiejes $a = 2$ y $b = 3$.

d) $3(x^2 - 6x) + 4(y^2 + 4y) + 31 = 0 \Rightarrow 3(x - 3)^2 - 27 + 4(y + 2)^2 - 16 + 31 = 0 \Rightarrow 3(x - 3)^2 + 4(y + 2)^2 = 12$

$\Rightarrow \frac{(x - 3)^2}{4} + \frac{(y + 2)^2}{3} = 1$. Es una elipse centrada en $(3, -2)$ y semiejes $a = 2$ y $b = \sqrt{3}$

e) $25x^2 - 144(y - 1)^2 + 144 - 3744 = 0 \Rightarrow \frac{x^2}{144} - \frac{(y - 1)^2}{25} = 1$. Hipérbola de centro $(0, 1)$ y semiejes $a = 12$ y $b = 5$.

6.61. Calcula los puntos de intersección de las siguientes parejas de cónicas y verifica los resultados observando sus gráficas.

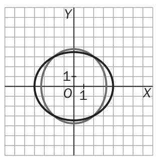
a) $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{12} = 1$ con $\frac{x^2}{10} + \frac{y^2}{15} = 1$

b) $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{12}$ con $x^2 + y^2 - 6x - 1 = 0$

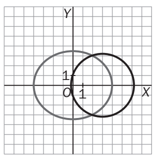
c) $9x^2 - 4y^2 = 36$ con $x^2 + y^2 = 43$

d) $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{64}$ con $y^2 - 36x + 144 = 0$

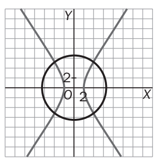
a) $\begin{cases} \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{12} = 1 \\ \frac{x^2}{10} + \frac{y^2}{15} = 1 \end{cases} \Rightarrow (2, 3)\ (-2, 3)\ \ (2, -3)\ \ (-2, -3)$



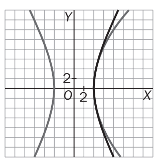
b) $\begin{cases} \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{12} = 1 \\ x^2 + y^2 - 6x - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow (2, 3)\ \ (2, -3)$



c) $\begin{cases} 9x^2 - 4y^2 = 36 \\ x^2 + y^2 = 43 \end{cases} \Rightarrow \left(4, 3\sqrt{3}\right)\ \left(4, -3\sqrt{3}\right)\ \left(-4, 3\sqrt{3}\right)\ \left(-4, -3\sqrt{3}\right)$



d) $\begin{cases} \frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{64} = 1 \\ y^2 - 36x + 144 = 0 \end{cases} \Rightarrow (4, 0)\ \ (5, 6)\ \ (5, -6)$



6.62. Halla las circunferencias inscrita y circunscrita al triángulo de vértices $A(0, 1)$, $B(3, -3)$ y $C(4, 4)$.

Se trata de un triángulo isósceles y rectángulo.

Circunferencia circunscrita:

El circuncentro estará situado en el punto medio de la hipotenusa: $T\left(\frac{7}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

$$\left(x - \frac{7}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{25}{2}$$

Circunferencia inscrita:

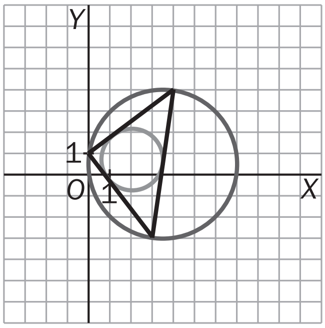
Bisectriz del ángulo A:

$$AT \equiv \frac{x}{7} = \frac{y-1}{-1} \Rightarrow -x = 7y - 7 \Rightarrow x + 7y = 7$$

Bisectriz del ángulo C: $\frac{3x - 4y + 4}{5} = -\frac{7x - y - 24}{5\sqrt{2}} \Rightarrow \left(3\sqrt{2} + 7\right)x - \left(4\sqrt{2} + 1\right)y + 4\sqrt{2} - 24 = 0$

Incentro: $\begin{cases} x + 7y = 7 \\ \left(3\sqrt{2} + 7\right) - \left(4\sqrt{2} + 1\right)y + 4\sqrt{2} - 24 = 0 \end{cases} \Rightarrow I\left(7 - \frac{7\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ Radio: $5 - \frac{5\sqrt{2}}{2}$

$$\left(x - 7 + \frac{7\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \left(5 - \frac{5\sqrt{2}}{2}\right)^2$$



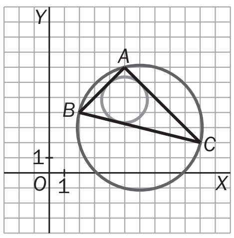
6.63. Determina las circunferencias inscrita y circunscrita al triángulo cuyos lados están sobre las rectas:

$$r \equiv x - y + 2 = 0, \qquad s \equiv x + y = 12, \qquad t \equiv x + 4y = 18$$

Los vértices $A(5, 7)$, $B(2, 4)$ y $C(10, 2)$, puntos de intersección entre las rectas, determinan un triángulo rectángulo.

Circunferencia circunscrita:

El circuncentro estará situado en el punto medio de la hipotenusa: $T(6, 3)$ y el radio será la distancia de T a B, $r = \sqrt{17}$, con lo que la circunferencia circunscrita es $(x - 6)^2 + (y - 3)^2 = 17$



Circunferencia inscrita:

Bisectriz del ángulo A: $\frac{x - y + 2}{\sqrt{2}} = -\frac{x + y - 12}{\sqrt{2}} \Rightarrow x = 5$

Bisectriz del ángulo B: $\frac{x - y + 2}{\sqrt{2}} = -\frac{x + 4y - 18}{\sqrt{17}}$

Resolviendo el sistema formado por las ecuaciones de las bisectrices:

$$\frac{5 - y + 2}{\sqrt{2}} = -\frac{5 + 4y - 18}{\sqrt{17}} \Rightarrow \frac{3 - y}{\sqrt{2}} = \frac{13 - 4y}{\sqrt{17}} \Rightarrow y = \frac{13\sqrt{2} - 3\sqrt{17}}{4\sqrt{2} - \sqrt{17}} = \frac{53 + \sqrt{34}}{15} \Rightarrow$$

Incentro: $\left(5, \frac{53 + \sqrt{34}}{15}\right)$.

Radio de la circunferencia inscrita: $d(I, r) = \frac{\left|5 - \frac{53 + \sqrt{34}}{15} + 2\right|}{\sqrt{2}} = \frac{52 + \sqrt{34}}{15\sqrt{2}} = \frac{26\sqrt{2} + \sqrt{17}}{15} = R.$

Así la ecuación de la circunferencia es: $(x - 5)^2 + \left(y - \frac{53 + \sqrt{34}}{15}\right)^2 = \frac{1369 + 52\sqrt{34}}{225}$

6.64. Halla las longitudes de las cuerdas comunes a la parábola $y^2 = 2x + 4$ y la elipse $2x^2 + y^2 = 8$.

Primero se hallan los puntos comunes a las dos cónicas:

Puntos comunes: $\begin{cases} y^2 = 2x + 4 \\ 2x^2 + y^2 = 8 \end{cases} \Rightarrow 2x^2 + 2x + 4 = 8 \Rightarrow x^2 + x - 2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 1,\ y = \pm\sqrt{6} \\ x = -2,\ y = 0 \end{cases}$

Los puntos comunes son: $A\left(1, \sqrt{6}\right)$ $B\left(1, -\sqrt{6}\right)$, $C\left(-2, 0\right)$.

Las longitudes pedidas serán las distancias entre las puntos anteriores:

$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$; $|\overrightarrow{AC}| = \sqrt{9 + 6} = \sqrt{15}$; $|\overrightarrow{BC}| = \sqrt{9 + 6} = \sqrt{15}$

6.65. Calcula las rectas tangentes a la elipse de ecuación $\dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{4} = 1$, cuya pendiente sea igual a 1. Halla los puntos de tangencia correspondientes.

Deben ser rectas de la forma $y - x + k = 0$.

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{16} - \dfrac{y^2}{4} = 1 \\ y - x + k = 0 \end{cases} \Rightarrow \frac{x^2}{16} + \frac{(x - k)^2}{4} = 1 \Rightarrow x^2 + 4x^2 + 4k^2 - 8xk = 16 \Rightarrow 5x^2 - 8kx + 4k^2 - 16 = 0$$

Esta última ecuación de segundo grado debe tener una única solución. Su discriminante ha de ser nulo:

$$\Delta = 64k^2 - 20(4k^2 - 16) = 0 \Rightarrow -16k^2 + 320 = 0 \Rightarrow k = \pm\sqrt{20} \Rightarrow \begin{cases} y - x + \sqrt{20} = 0 \\ y - x - \sqrt{20} = 0 \end{cases}$$

6.66. Calcula las rectas tangentes a la hipérbola de ecuación $x^2 - 4y^2 = 4$, cuya pendiente sea igual a -1. Calcula los puntos de tangencia.

Deben ser rectas de la forma $y + x + k = 0$.

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{4} + y^2 = 1 \\ y + x + k = 0 \end{cases} \Rightarrow \frac{x^2}{4} + (x + k)^2 = 1 \Rightarrow x^2 + 4x^2 + 4k^2 + 8xk = 4 \Rightarrow 5x^2 + 8kx + 4k^2 - 4 = 0$$

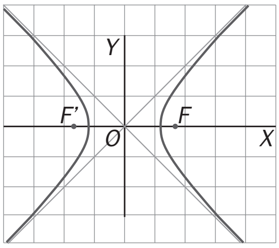
Esta última ecuación de segundo grado debe tener una única solución. Su discriminante ha de ser nulo:

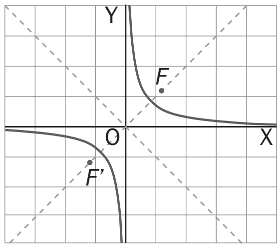
$$\Delta = 64k^2 - 20 \cdot (4k^2 - 4) = 0 \Rightarrow -16k^2 + 80 = 0 \Rightarrow k = \pm\sqrt{5} \Rightarrow \begin{cases} y + x + \sqrt{5} = 0 \\ y + x - \sqrt{5} = 0 \end{cases}$$

Los puntos de tangencia se calculan a partir de las soluciones de la ecuación de segundo grado. Las soluciones son:

$$\begin{cases} x = \dfrac{-8\sqrt{5}}{10} = \dfrac{-4\sqrt{5}}{5} \Rightarrow y = \dfrac{4\sqrt{5}}{5} - \sqrt{5} = \dfrac{-\sqrt{5}}{5} \Rightarrow P\left(\dfrac{-4\sqrt{5}}{5}, \dfrac{-\sqrt{5}}{5}\right) \\ x = \dfrac{8\sqrt{5}}{10} = \dfrac{4\sqrt{5}}{5} \Rightarrow y = \dfrac{-4\sqrt{5}}{5} + \sqrt{5} = \dfrac{\sqrt{5}}{5} \Rightarrow Q\left(\dfrac{4\sqrt{5}}{5}, \dfrac{\sqrt{5}}{5}\right) \end{cases}$$

6.67. Al girar una hipérbola equilátera, $x^2 - y^2 = a^2$, 45°, según lo mostrado en las siguientes figuras, las asíntotas de la hipérbola coinciden con los ejes de coordenadas. Demuestra, utilizando las nuevas coordenadas de los focos y la definición de hipérbola como lugar geométrico, que respecto de estos nuevos ejes la ecuación de la hipérbola se escribe en la forma $xy = \frac{a^2}{2}$.





Las coordenadas de los nuevos focos serán $F(a, a)$ y $F'(-a, -a)$.

Por la definición de hipérbola:

$$\sqrt{(x + a)^2 + (y + a)^2} - \sqrt{(x + a)^2 + (y + a)^2} = 2a \Rightarrow \sqrt{x^2 + y^2 + 2xa + 2ya + 2a^2} =$$

$$= 2a + \sqrt{x^2 + y^2 - 2xa - 2ya + 2a^2}$$

Elevando al cuadrado:

$$x^2 + y^2 + 2xa + 2ya + 2a^2 = 4a^2 + x^2 + y^2 - 2xa - 2ya + 2a^2 + 4a^2\sqrt{x^2 + y^2 - 2xa - 2ya + 2a^2} \Rightarrow$$

$$x + y - a = \sqrt{x^2 + y^2 - 2xa - 2ya + 2a^2} \Rightarrow x^2 + y^2 + a^2 + 2xy - 2xa - 2ya = x^2 + y^2 - 2xa - 2ya + 2a^2 \Rightarrow$$

$$2xy = a^2 \Rightarrow xy = \frac{a^2}{2}$$

6.68. Dada la hipérbola equilátera $xy = 2$, calcula el área del triángulo formado por los dos ejes de coordenadas y la tangente a la hipérbola en el punto $P(1, 2)$. Comprueba si esta área es independiente del punto P elegido.

La recta debe ser de la forma $y = mx + n$.

$$\begin{cases} xy = 2 \\ y = mx + n = 0 \end{cases} \Rightarrow \frac{2}{x} = mx + n \Rightarrow mx^2 + nx - 2 = 0$$

Esta última ecuación de segundo grado debe tener una única solución. Su discriminante ha de ser nulo:

$$\Delta = n^2 + 8m = 0$$

Como la recta pasa por (1, 2), se tiene $\begin{cases} n^2 + 8m = 0 \\ 2 = m + n \end{cases} \Rightarrow n^2 + 8(2 - n) = 0 \Rightarrow \begin{cases} n = 4 \\ m = -2 \end{cases}$

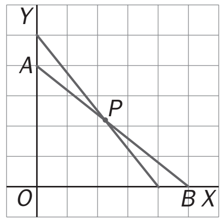
La recta es $y = -2x + 4$. Dicha recta corta a los ejes en los puntos (0, 4) y (2, 0), por lo que el área del triángulo es $A = \frac{b \cdot h}{2} = 4$.

En el caso genérico se tiene $\begin{cases} n^2 + 8m = 0 \\ y = mx + n \end{cases} \Rightarrow y = -\frac{n^2}{8}x + n = 0$. Dicha reta corta a los ejes en los puntos $(0, n)$ y $\left(\frac{8}{n}, 0\right)$, por lo que el área del triángulo queda: $A = \frac{b \cdot h}{2} = \frac{n\frac{8}{n}}{2} = 4$. El área es independiente del punto elegido.

6.69. Un segmento AB de longitud 5 unidades se desliza de forma que el extremo A siempre está sobre el eje de ordenadas, y el extremo B, sobre el de abscisas.

a) Determina el lugar geométrico que describe el centro del segmento a lo largo de su deslizamiento.

b) Calcula el lugar geométrico que describe el punto del segmento que dista 2 unidades de A y 3 de B.



a) Sean $A(0, a)$ y $B(b, 0)$, de forma que $a^2 + b^2 = 5$.

Sea $X(x, y)$ un punto genérico del lugar geométrico pedido $\Rightarrow (x, y) = \left(\frac{b}{2}, \frac{a}{2}\right) \Rightarrow \begin{cases} b = 2x \\ a = 2y \end{cases}$

Como $a^2 + b^2 = 5 \Rightarrow 4y^2 + 4x^2 = 25$ Circunferencia de centro el origen y radio $\frac{5}{2}$

b) De nuevo sean $A(0, a)$ y $B(b, 0)$ $\quad a^2 + b^2 = 5$.

El punto $\left(\frac{2b}{5}, \frac{3a}{5}\right)$ está situado a 2 unidades de A y 3 de B.

Sea $X(x, y)$ un punto genérico del lugar pedido $\Rightarrow (x, y) = \left(\frac{2b}{5}, \frac{3a}{5}\right) \Rightarrow \begin{cases} b = \frac{5x}{2} \\ a = \frac{5y}{3} \end{cases}$

Como $a^2 + b^2 = 5 \Rightarrow \frac{25y^2}{9} + \frac{25x^2}{4} = 25 \Rightarrow \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9}$ Elipse con $a = 3$ $b = 2$ y eje mayor situado en el eje de ordenadas.