Ejercicio 1. *Función continua. Casos de discontinuidad. Definición y ejemplos.*

Solución:

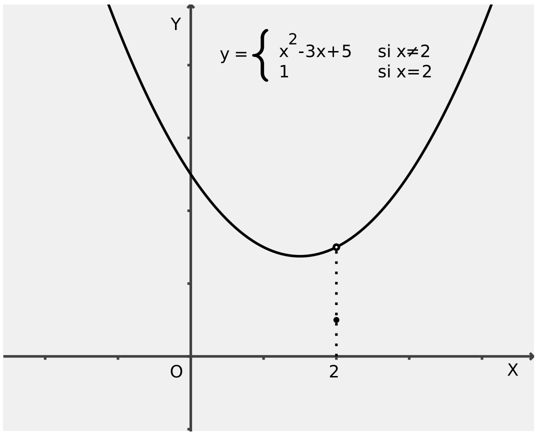
La función $f(x)$ es continua en el punto x_0 si

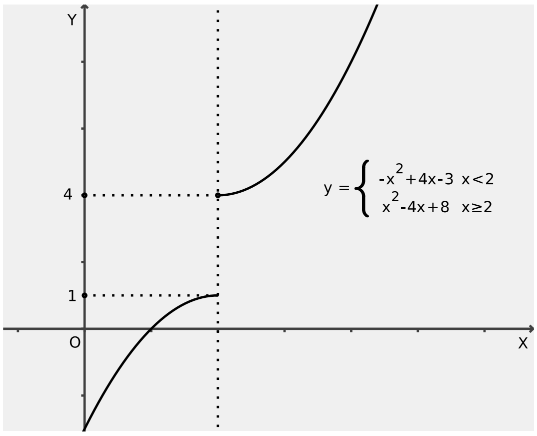
$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

es decir, el límite de la función en el punto coincide con el valor de la función en el punto. Para calcular límites de funciones continuas, basta calcular el valor de la función.

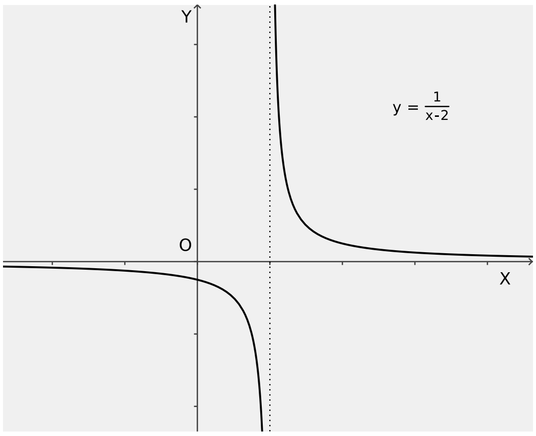
Los puntos en los que la función no es continua se llaman puntos de discontinuidad de la función. Podemos distinguir los siguientes tipos de discontinuidad:

- ◇ **Discontinuidad evitable**: existe el límite, pero no coincide con el valor de la función
- ◇ **Salto finito**: existen los límites laterales pero no coinciden.





- ◇ **Salto infinito**: uno o los dos límites laterales son infinitos.



- ◇ **Discontinuidad esencial**: no existe el límite de la función ni es infinito. Por ejemplo la función

$$f(x) = \operatorname{sen} \frac{1}{x}$$

en el punto $x = 0$. Cuando la variable x se aproxima a este valor oscila entre $+1$ y -1 con una frecuencia que tiende a infinito.

Ejercicio 2. *Definir el numero e como límite. Demostrar que*

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$$

A partir de este límite, obtener la fórmula para calcular límites indeterminados del tipo 1^∞.

Solución:

El número e se define como el siguiente límite:

$$e = \lim_{x\to\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \lim_{x\to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}}$$

A partir de esta definición:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{x}\ln(1+x) = \lim_{x\to 0} \ln(1+x)^{\frac{1}{x}} = \ln e = 1$$

en donde se ha aplicado la propiedad del logaritmo de la potencia. La equivalencia entre $\ln(1+x)$ y x cuando x tiende a cero nos sirve para transformar los límites indeterminados del tipo 1^∞:

sea el límite $A = \lim u^v$ donde u tiende a 1 y v tiende a ∞.

$$A = \lim u^v \quad \Longrightarrow \quad \ln A = \lim v \ln u = \lim v \ln[1+(u-1)]$$

Puesto que $u \to 1$, $u-1 \to 0$ y $\ln[1+(u-1)]$ es equivalente a $u-1$. Entonces:

$$\ln A = \lim v(u-1) \quad \Longrightarrow \quad A = e^{\lim v(u-1)}$$

Ejercicio 3. *Calcular los puntos de intersección de la parábola* $y = 2x^2 - 5x + 1$ *y la recta* $y = -x - 1$. *Representar gráficamente la parábola y la recta.*

Solución:

Las coordenadas de los puntos de intersección son las soluciones del sistema

$$\begin{cases} y = 2x^2 - 5x + 1 \\ y = -x - 1 \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad 2x^2-5x+1 = -x-1 \quad \Longrightarrow \quad 2x^2-4x+2 = 0 \quad \Longrightarrow \quad x^2-2x+1 = 0$$

Esta ecuación tiene una única solución $x = 1$ a la que corresponde el valor $y = -2$. Así pues el punto de intersección de la parábola y la recta es $(1, -2)$.

Para representar la parábola calculamos su vértice:

$$x_0 = -\frac{b}{2a} = \frac{5}{4}$$

$$y_0 = 2 \cdot \frac{25}{16} - 5 \cdot \frac{5}{4} + 1 = -\frac{17}{8}$$

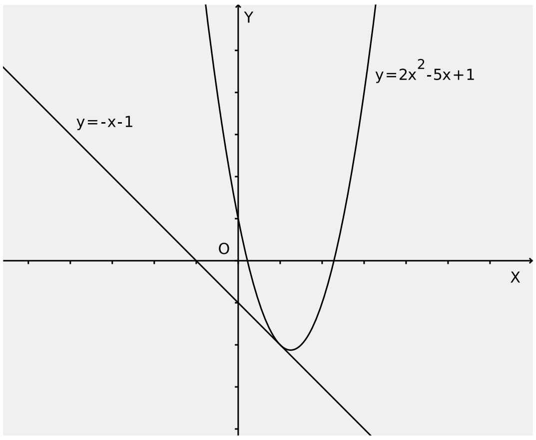
Así pues, el vértice es el punto $V\left(\frac{5}{4}, -\frac{17}{8}\right)$. Las intersecciones con el eje OX son:

$$\begin{cases} y = 2x^2 - 5x + 1 \\ y = 0 \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad x_1 = \frac{5+\sqrt{17}}{4}, \quad x_2 = \frac{5-\sqrt{17}}{4}$$

y la intersección con el eje OY:

$$\begin{cases} y = 2x^2 - 5x + 1 \\ x = 0 \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad y = 1$$

Con estos datos, la gráfica de la parábola es:



Ejercicio 4. *Calcular el dominio de las funciones*

1. $y = \sqrt{3 - x^2}$
2. $y = \ln \dfrac{x^2 - 4}{x + 5}$

Solución:

◇ El dominio $y = \sqrt{3 - x^2}$ de la función es el conjunto

$$D = \{x \in \mathbb{R} \quad | \quad 3 - x^2 \geq 0\}$$

El polinomio $3 - x^2$ tiene dos raíces, $-\sqrt{3}$ y $+\sqrt{3}$. Es fácil ver que el polinomio es positivo entre las dos raíces. Por consiguiente:

$$D = [-\sqrt{3}, +\sqrt{3}]$$

◇ El dominio de la función es el conjunto:

$$D = \left\{ x \in \mathbb{R} \quad | \quad \frac{x^2 - 4}{x + 5} > 0 \right\}$$

Para resolver la inecuación hay que comparar los signos del numerador y del denominador. Las raíces del numerador son -2 y $+2$. La raíz del denominador es -5. Los signos están reflejados en el siguiente esquema:

	-5		-2		2	
$+$		$+$		$-$		$+$
$-$		$+$		$+$		$+$

La fracción es positiva en los intervalos en que coinciden los signos del numerador y del denominador. Así pues:

$$D = (-5, -2) \cup (2, \infty)$$

Ejercicio 5. *Calcular los siguientes límites:*

◇ $\displaystyle \lim_{x \to 2} \frac{x^4 - 2x^3 + x - 2}{x^3 + 4x^2 - 11x - 2}$

◇ $\displaystyle \lim_{x \to -2} \frac{x^4 + 4x^3 + 5x^2 + 4x + 4}{x^4 + 4x^3 + 4x^2}$

- $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{1-x}-1}{x}$
- $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\dfrac{x^2+1}{x^2-2}\right)^x$
- $\lim\limits_{x \to 2} \left(\dfrac{x+2}{2x}\right)^{\frac{1}{x-2}}$
- $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{3x+5}{x^2+1}$
- $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x^3-2x+1}{x^3-3x^2+2x-1}$
- $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x^2-5x+2}{x^4-1}$

Solución:

- Se trata de un límite indeterminado del tipo $\frac{0}{0}$. Debemos factorizar los polinomios y simplificar la fracción:

$$\begin{aligned}\lim_{x \to 2} \frac{x^4-2x^3+x-2}{x^3+4x^2-11x-2} &= \lim_{x \to 2} \frac{(x-2)(x^3+1)}{(x-2)(x^2+6x+1)} \\ &= \lim_{x \to 2} \frac{x^3+1}{x^2+6x+1} \\ &= \frac{9}{17}\end{aligned}$$

- Lo mismo que el anterior, pero en éste es preciso simplificar dos veces:

$$\begin{aligned}\lim_{x \to -2} \frac{x^4+4x^3+5x^2+4x+4}{x^4+4x^3+4x^2} &= \lim_{x \to -2} \frac{(x+2)(x^3+2x^2+x+2)}{(x+2)(x^3+2x^2)} \\ &= \lim_{x \to -2} \frac{x^3+2x^2+x+2}{x^3+2x^2} \\ &= \lim_{x \to -2} \frac{(x+2)(x^2+1)}{(x+2)x^2} \\ &= \lim_{x \to -2} \frac{x^2+1}{x^2} \\ &= \frac{5}{4}\end{aligned}$$

- Multiplicando y dividiendo por el conjugado:

$$\begin{aligned}\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{1-x}-1}{x} &= \lim_{x \to 0} \frac{(\sqrt{1-x}-1)(\sqrt{1-x}+1)}{x(\sqrt{1-x}+1)} \\ &= \lim_{x \to 0} \frac{1-x-1}{x(\sqrt{1-x}+1)} \\ &= \lim_{x \to 0} \frac{-x}{x(\sqrt{1-x}+1)} \\ &= \lim_{x \to 0} \frac{-1}{\sqrt{1-x}+1} \\ &= -\frac{1}{2}\end{aligned}$$

  También puede calcularse el límite aplicando la equivalencia $\sqrt{1-x} \sim 1 - \frac{1}{2}x$:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{1-x}-1}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{1-\frac{1}{2}x-1}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{-\frac{1}{2}x}{x} = -\frac{1}{2}$$

- Se trata de una indeterminación del tipo 1^∞:

$$\lim_{x \to \infty} \left(\frac{x^2+1}{x^2-2}\right)^x = \lim_{x \to \infty} e^{\left(\frac{x^2+1}{x^2-2}-1\right)x} = \lim_{x \to \infty} e^{\frac{x^2+1-x^2+2}{x^2-2}\,x} = \lim_{x \to \infty} e^{\frac{3x}{x^2-2}} = e^0 = 1$$

◇ Es otro límite indeterminado del mismo tipo que el anterior:

$$\lim_{x\to 2}\left(\frac{x+2}{2x}\right)^{\frac{1}{x-2}} = \lim_{x\to 2} e^{\left(\frac{x+2}{2x}-1\right)\frac{1}{x-2}} = \lim_{x\to 2} e^{\frac{x+2-2x}{2x(x-2)}} = \lim_{x\to 2} e^{\frac{2-x}{2x(x-2)}} = \lim_{x\to 2} e^{\frac{-1}{2x}} = e^{\frac{-1}{4}}$$

Los restantes límites son muy sencillos. Basta comparar los grados del numerador y del denominador:

◇ $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{3x+5}{x^2+1} = 0$

◇ $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{x^3-2x+1}{x^3-3x^2+2x-1} = 1$

◇ $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-5x+2}{x^4-1} = 0$

Ejercicio 6. *Calcular los siguientes límites:*

◇ $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{x^4-3x^3+2}{4x^4+2}$

◇ $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{x^3}{e^x}$

◇ $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{e^x-1}{x^2}$

◇ $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{x^3-2x+3}{1+e^x}$

◇ $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{2^x}{3^x}$

◇ $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}^2 x}{3x}$

◇ $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{arsen} x}{1-\cos x}$

◇ $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}^2 x}{\cos x-1}$

Solución:

◇ $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{x^4-3x^3+2}{4x^4+2} = \frac{1}{4}$

◇ $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{x^3}{e^x} = 0$

◇ $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{e^x-1}{x^2} = \infty$

◇ $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{x^3-2x+3}{1+e^x} = 0$

◇ $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{2^x}{3^x} = 0$

◇ $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}^2 x}{3x} = \lim_{x\to 0}\frac{x^2}{3x} = \lim_{x\to 0}\frac{x}{3} = 0$

◇ $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{arsen} x}{1-\cos x} = \lim_{x\to 0}\frac{x}{\frac{x^2}{2}} = \lim_{x\to 0}\frac{2}{x} = \infty$

◇ $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}^2 x}{\cos x-1} = \lim_{x\to 0}\frac{x^2}{-\frac{x^2}{2}} = -2$

Ejercicio 7. *Calcular las asíntotas de las siguientes curvas:*

◇ $\displaystyle y = \frac{1}{x^2+1}$

◇ $\displaystyle y = \frac{x^3+1}{x^2-3x+2}$

Solución:

- ◇ El denominador de la primera función no se anula para ningún valor de x y, por consiguiente, la función no tiene asíntotas verticales. Puesto que:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^2+1} = 0$$

la recta $y = 0$ es asíntota horizontal de la función.

- ◇ El denominador se anula para $x = 1$ y $x = 2$. Entonces:

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^3+1}{x^2-3x+2} = \infty \quad \Longrightarrow \quad x = 1 \text{ es asíntota vertical de la función}$$
$$\lim_{x\to 2} \frac{x^3+1}{x^2-3x+2} = \infty \quad \Longrightarrow \quad x = 2 \text{ es asíntota vertical de la función}$$

No hay asíntotas horizontales puesto que:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^3+1}{x^2-3x+2} = \infty$$

Veamos si la curva tiene asíntotas oblicuas:

$$m = \lim_{x\to\infty} \frac{x^3+1}{x^3-3x^2+2x} = 1$$
$$b = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{x^3+1}{x^2-3x+2} - 1\cdot x \right) = \lim_{x\to\infty} \frac{x^3+1-x^3+3x^2-2x}{x^2-3x+2} = 3$$

Por consiguiente, la curva tiene una asíntota oblicua $y = x + 3$.