

EXAMEN ÁLGEBRA

1.- Resuelve las siguientes ecuaciones:

(2,25 puntos)

a) $x^4 - x^2 = 600$

b) $x^4 - x^3 - 16x^2 - 20x = 0$

c) $2x - \sqrt{3x-2} = 1$

2.- Resuelve el sistema:

(1 punto)

$$\left. \begin{array}{l} \frac{x}{2} + \frac{y}{4} = 3 \\ x + 2y = 12 \end{array} \right\}$$

3.- Dado el sistema de ecuaciones:

$$\left. \begin{array}{l} x^2 + y = 5 \\ x + y = 3 \end{array} \right\}$$

Resuélvelo analítica y gráficamente (1,5 puntos)

4.- Opera y simplifica:

(1,5 puntos)

a) $\frac{2x+1}{x-2} \cdot \frac{x^2+x-6}{x^2+3x} =$

b) $\left(\frac{5}{x} - \frac{3x+2}{x+1} \right) : \frac{x-3}{x^2+x} =$

5.- Resuelve el siguiente sistema de inecuaciones y responde a las cuestiones:

$$\left. \begin{array}{l} x + y \geq 5 \\ 2x - y < -2 \end{array} \right\}$$

(1,75 puntos)

a) Escribe tres puntos que sean solución del sistema.

b) ¿Es solución el punto (5, 1)? ¿Y el (0, 7)?

6.- Resuelve las siguientes inecuaciones:

(2 puntos)

a) $\frac{x-1}{3} - \frac{x+1}{2} < 4$

b) $-2x^2 + x + 6 \geq 0$

SOLUCIONES

1.- a) $x^4 - x^2 = 600 \Rightarrow x^4 - x^2 - 600 = 0$ ecuación bicuadrada, que haciendo el cambio $z = x^2$, queda la ecuación de segundo grado:

$$z^2 - z - 600 = 0 \Rightarrow z = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 2400}}{2} = \frac{1 \pm 49}{2} = \begin{cases} 25 \\ -24 \end{cases}$$

$$x = \sqrt{z} = \begin{cases} \pm \sqrt{25} = \pm 5 \\ \pm \sqrt{-24} = \text{no existe} \end{cases}$$

Solución: 5 y -5

b) $x^4 - x^3 - 16x^2 - 20x = 0$ para resolver esta ecuación, factorizamos el polinomio $x^4 - x^3 - 16x^2 - 20x = x(x^3 - x^2 - 16x - 20) = x(x+2)(x+2)(x-5) = 0$

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & -1 & -16 & -20 \\ -2 & & -2 & 6 & 20 \\ \hline & 1 & -3 & -10 & 0 \end{array} \quad x^2 - 3x - 10 = 0 \Rightarrow x = \frac{3 \pm \sqrt{49}}{2} = \begin{cases} -2 \\ 5 \end{cases}$$

Soluciones: $x = 0$; $x = -2$ (doble) y $x = 5$

c) $2x - \sqrt{3x-2} = 1 \Rightarrow 2x - 1 = \sqrt{3x-2} \Rightarrow (2x-1)^2 = (\sqrt{3x-2})^2$

$$4x^2 - 4x + 1 = 3x - 2 \Rightarrow 4x^2 - 7x + 3 = 0 \Rightarrow x = \frac{7 \pm \sqrt{1}}{8} = \begin{cases} 1 \\ \frac{3}{4} \end{cases}$$

Comprobación:

$$2 - \sqrt{3-2} = 2 - 1 = 1 \quad \text{SI} \quad \frac{6}{4} - \sqrt{\frac{9}{4} - 2} = \frac{3}{2} - \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{3}{2} - \frac{1}{2} = 1 \quad \text{SI}$$

LUEGO, LA SOLUCIÓN ES $x = 0$ y $x = \frac{3}{4}$

$$2.- \left. \begin{array}{l} \frac{x}{2} + \frac{y}{4} = 3 \\ x + 2y = 12 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \frac{2x}{4} + \frac{y}{4} = \frac{12}{4} \\ x = 12 - 2y \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 2x + y = 12 \\ x = 12 - 2y \end{array} \right\} \text{ por sustitución:}$$

$$2(12 - 2y) + y = 12 \Rightarrow 24 - 4y + y = 12 \Rightarrow -3y = -12 \Rightarrow y = 4 \Rightarrow x = 12 - 8 = 4$$

Solución: $x = 4$, $y = 4$

$$3.- \left. \begin{array}{l} x^2 + y = 5 \\ x + y = 3 \end{array} \right\} \text{ lo resolvemos primero}$$

$$\text{gráficamente: } \left. \begin{array}{l} y = -x^2 + 5 \\ y = 3 - x \end{array} \right\} \text{ son una}$$

parábola y una recta:

Parábola: $y = -x^2 + 5$

1) Mira hacia abajo

2) Vértice: $x = -\frac{0}{-2} = 0$ vértice $(0, 5)$

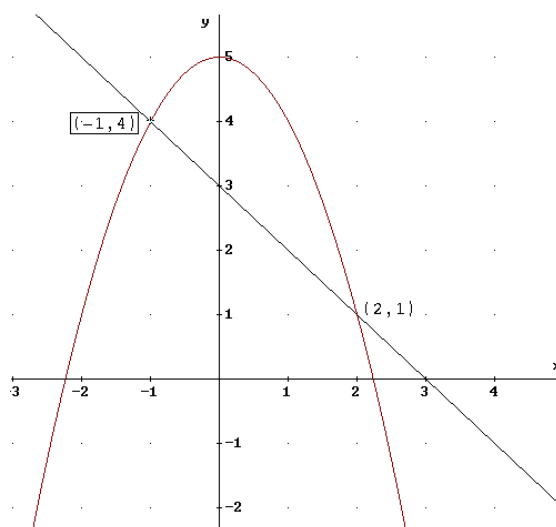
3) Corta eje OY en $(0, 5)$

4) Corta eje OX:

$$-x^2 + 5 = 0 \Rightarrow x^2 = 5 \Rightarrow x = \pm\sqrt{5}$$

$$\text{Analíticamente: } \left. \begin{array}{l} y = -x^2 + 5 \\ y = 3 - x \end{array} \right\} \Rightarrow -x^2 + 5 = 3 - x \Rightarrow -x^2 + x + 2 = 0 \Rightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{9}}{-2} = \begin{cases} -1 \\ 2 \end{cases}$$

$$\text{Para } x = -1 \Rightarrow y = 3 - (-1) = 4 \quad \text{Para } x = 2 \Rightarrow y = 3 - 2 = 1$$



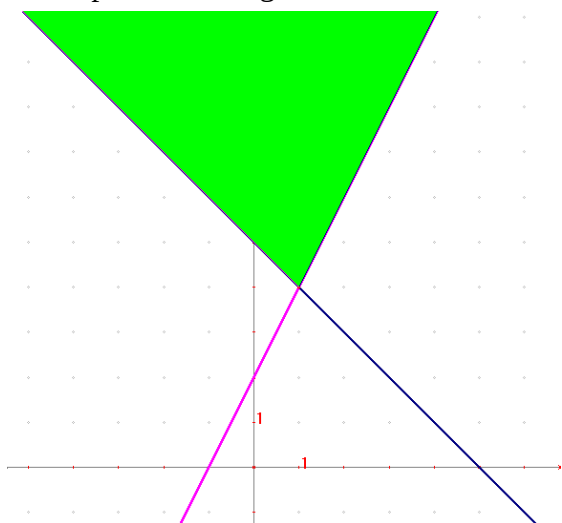
SOLUCIONES (-1, 4) y (2, 1)

$$3.- a) \frac{2x+1}{x-2} \cdot \frac{x^2+x-6}{x^2+3x} = \frac{(2x+1)(x^2+x-6)}{(x-2)(x^2+3x)} = \frac{(2x+1)(x-2)(x+3)}{(x-2)x(x+3)} = \frac{2x+1}{x}$$

$$b) \left(\frac{5}{x} - \frac{3x+2}{x+1} \right) : \frac{x-3}{x^2+x} = \frac{5(x+1) - x(3x+2)}{x(x+1)} : \frac{x-3}{x^2+x} = \frac{5x+5-3x^2-2x}{x(x+1)} : \frac{x-3}{x^2+x} = \frac{(-3x^2+3x+5)(x^2+x)}{x(x+1)(x-3)} = \frac{(-3x^2+3x+5)x(x+1)}{x(x+1)(x-3)} = \frac{-3x^2+3x+5}{x-3}$$

$$4.- \left. \begin{array}{l} x+y \geq 5 \\ 2x-y < -2 \end{array} \right\} \text{Gráficamente, } \left. \begin{array}{l} x+y=5 \\ 2x-y=-2 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} y=5-x \\ y=2x+2 \end{array} \right\}$$

Representamos gráficamente las dos rectas:



Vemos el semiplano solución de cada una de las inecuaciones, por ejemplo comprobando si el punto (0,0) es solución, y luego la intersección de ambos semiplanos será la solución del sistema (zona en verde), incluida la semirrecta azul pero no la morada.

- a) Puntos solución del sistema serán puntos de esa zona verde, por ejemplo: (1, 8), (1, 10), (2, 25)
- b) El punto (5, 1) no es solución del sistema, pero el (0, 7) si que lo es.

$$5.- a) \frac{x-1}{3} - \frac{x+1}{2} < 4 \Rightarrow \frac{2(x-1)}{6} - \frac{3(x+1)}{6} < \frac{24}{6}$$

$$2x-2-3x-3 < 24 \Rightarrow -x-5 < 24 \Rightarrow -x < 29 \Rightarrow x > -29 \quad \text{Solución: } (-29, +\infty)$$

b) $-2x^2 + x + 6 \geq 0$ para resolver esta inecuación de segundo grado, representamos gráficamente la parábola $y = -2x^2 + x + 6$

mira hacia abajo

$$\text{Vértice: } x = -\frac{1}{-4} = 0'25$$

$$y = -2(0'25)^2 + 0'25 + 6 = 6'125$$

Vértice (0'25, 6'125)

Corte con los ejes:

$$\text{Eje y: } x=0, y=6$$

$$\text{Eje x: } -2x^2 + x + 6 = 0$$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{49}}{-4} = \left\{ -\frac{3}{2}, 2 \right\}$$

$$\text{SOLUCIÓN: } \left[-\frac{3}{2}, 2 \right]$$

