PROBLEMAS DE RECTA TANGENTE

1. Dada la función $f(x) = 3\sqrt{x}$ determina la ecuación de la recta tangente a su gráfica en el punto de abscisa $x = 4$.
2. Dada la función $f(x) = x^3 - 1$ determina la ecuación de la recta tangente a su gráfica en el punto de ordenada $y = -2$.
3. Halla la ecuación de la recta tangente a $f(x) = \sqrt{x^2 + 3x + 6}$ en el punto de abscisa $x = 2$.
4. Halla la ecuación de la recta tangente a $f(x) = \dfrac{\sqrt{x+1}}{x+2}$ en el punto de abscisa $x = 0$.
5. Halla la ecuación de la recta tangente a $f(x) = x^2 \cdot e^{2-x}$ en el punto de abscisa $x = 1$.
6. Halla la ecuación de la recta tangente a $f(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ en el punto de abscisa $x = 1$.
7. Halla la ecuación de la recta tangente a $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4$ en el punto de ordenada $y = 0$.
8. Halla la ecuación de las rectas tangente y normal a la gráfica de la función $f(x) = \dfrac{x - \sqrt{x}}{x + \sqrt{x}}$ en el punto de abscisa $x = 4$.
9. Halla la ecuación de la recta tangente a $f(x) = \dfrac{x}{x-1}$ paralela a la recta de ecuación $r: 4x + y - 9 = 0$.
10. Halla las ecuaciones de las rectas tangente y normal a la gráfica de la función $f(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$ en el punto de abscisa $x = 2$. Calcula el área del triángulo determinado por dichas rectas y el eje de abscisas.
11. Halla las ecuaciones de las rectas tangente y normal a la gráfica de la función $f(x) = \ln(2 - x)$ en el punto de ordenada $y = 0$.
12. Halla los puntos de la curva $y = 3x^3 - 2x^2 + x$ en los que la recta tangente es paralela a la recta $2x - 3y + 5 = 0$. Escribe las ecuaciones de dichas tangentes.
13. Halla la ecuación de la recta tangente a la curva $y = 4x^3 - 2x^2 - 10$ en su punto de inflexión.
14. Determina los puntos de la gráfica de $f(x) = 2x^3 + x^2 + x - 2$ en los que la tangente es paralela a la secante que corta la curva en $x = 0$ y en $x = 1$.
15. Halla el punto de la función $f(x) = sen x^2$ en que la recta tangente tiene pendiente $-2\sqrt{\pi}$ y escribe su ecuación.
16. Halla los puntos de la curva $y = 3x^2 - 5x + 12$ en los que la recta tangente a ella pasa por el origen de coordenadas. Escribe las ecuaciones de dichas tangentes.
17. Halla los puntos de la curva $y = \dfrac{1}{4}x^2 + 4x - 4$ en los que la recta tangente a ésta pasa por el punto $P(0,-8)$. Escribe las ecuaciones de las rectas tangentes.
18. Dada la función $f(x) = x^2 - 3x + 4$
    a) Ecuación de la recta tangente a $f(x)$ en un punto cualquiera $x = a$.
    b) Halla el valor o los valores de "a" para que dicha recta tangente pase por el origen de coordenadas.

1 ¿Recta tangente a $f(x) = 3\sqrt{x}$ en $x = 4$?

* Pto?

$$\left.\begin{array}{l} P(4, f(4)) \\ f(4) = 3\sqrt{4} = 3 \cdot 2 = 6 \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{P(4,6)}$$

* Pendiente? Sabemos que $f'(a)$ = pendiente de la recta tg a $f(x)$ en $x = a$

$$\left.\begin{array}{l} \text{En nuestro caso, } m_t = f'(4) \\ f'(x) = 3 \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} \; ; \; f'(x) = \frac{3}{2\sqrt{x}} \end{array}\right\} \Rightarrow m_t = \frac{3}{2\sqrt{4}} \; ; \; \boxed{m_t = \frac{3}{4}}$$

* Luego

$$\left.\begin{array}{l} P(4,6) \\ m_t = \frac{3}{4} \end{array}\right\} \Rightarrow t: y = 6 + \frac{3}{4}(x-4) \Rightarrow t: y = 6 + \frac{3}{4}x - 3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{t: y = \frac{3}{4}x + 3}$$

2 ¿Recta tg a $f(x) = x^3 - 1$ en el pto de ordenada $y = -2$?

* Pto?

$$\left.\begin{array}{l} y = -2 \\ y = x^3 - 1 \end{array}\right\} \Rightarrow -2 = x^3 - 1 \Rightarrow x^3 = -1 \Rightarrow x = \sqrt[3]{-1} \Rightarrow x = -1$$

Luego $\boxed{P(-1,-2)}$

* Pendiente? Sabemos que $f'(a)$ = pendiente de la recta tg a $f(x)$ en $x = a$

$$\left.\begin{array}{l} \text{En nuestro caso, } m_t = f'(-1) \\ f'(x) = 3x^2 \end{array}\right\} \Rightarrow m_t = 3 \cdot (-1)^2 \Rightarrow \boxed{m_t = 3}$$

* Luego,

$$\left.\begin{array}{l} P(-1,-2) \\ m_t = 3 \end{array}\right\} \Rightarrow t: y = -2 + 3(x+1) \Rightarrow t: y = -2 + 3x + 3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{t: y = 3x + 1}$$

3 ¿Recta tangente a $f(x)=\sqrt{x^2+3x+6}$ en $x=2$?

* Pto?

$$\left.\begin{array}{l} P(2, f(2)) \\ f(2)=\sqrt{(2)^2+3\cdot(2)+6}=\sqrt{4+6+6}=4 \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{P(2,4)}$$

* Pendiente? Sabemos que $f'(a)=$ pendiente de la recta tg a $f(x)$ en $x=a$

En nuestro caso, $m_t=f'(2)$

$$\left.f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x^2+3x+6}}\cdot(2x+3) \; ; \; f'(x)=\frac{2x+3}{2\sqrt{x^2+3x+6}}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow m_t=\frac{2\cdot(2)+3}{2\sqrt{(2)^2+3\cdot(2)+6}} \; ; \; m_t=\frac{7}{2\cdot 4} \; ; \; \boxed{m_t=\frac{7}{8}}$$

* Por tanto,

$$\left.\begin{array}{l} m_t=\frac{7}{8} \\ P(2,4) \end{array}\right\} \Rightarrow t: y=4+\frac{7}{8}(x-2) \Rightarrow t: y=4+\frac{7}{8}x-\frac{7}{4} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t: y=\frac{7}{8}x+\frac{9}{4}$$

4 ¿Recta tg a $f(x)=\frac{\sqrt{x+1}}{x+2}$ en $x=$?

* Pto?

$$\left.\begin{array}{l} P(0\, f(0)) \\ f(0)=\frac{\sqrt{0+1}}{0+2} \; ; \; f(0)=\frac{1}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{P\left(0,\frac{1}{2}\right)}$$

* Pendiente? Sabemos que $f'(a)=$ pendiente de la recta tg a $f(x)$ en $x=a$

En nuestro caso,

$m_t=f'(0)$

$$f'(x)=\frac{\frac{1}{2\sqrt{x+1}}\cdot(x+2)-\sqrt{x+1}\cdot 1}{(x+2)^2}=\frac{\frac{x+2}{2\sqrt{x+1}}-\sqrt{x+1}}{(x+2)^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f'(x)=\frac{\frac{x+2-2(\sqrt{x+1})^2}{2\sqrt{x+1}}}{(x+2)^2} \Rightarrow f'(x)=\frac{x+2-2x-2}{2(x+2)^2\sqrt{x+1}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f'(x)=\frac{-x}{2(x+2)^2\sqrt{x+1}}$$

Luego, $m_t = f'(0) = \dfrac{0}{2 \cdot 4 \cdot 1} \Rightarrow \boxed{m_t = 0}$

* Por tanto,

$$\left.\begin{array}{l} P\left(0, \frac{1}{2}\right) \\ m_t = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow t: y = \frac{1}{2} + 0\,(x-0) \Rightarrow t: y = \frac{1}{2}$$

$\boxed{5}$ ¿Recta tg a $f(x) = x^2 \cdot e^{2-x}$ en $x = 1$?

* Pto?

$$\left.\begin{array}{l} P(1, f(1)) \\ f(1) = (1)^2 \cdot e^{2-1} \ ; \ f(1) = e \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{P(1, e)}$$

* Pendiente? Sabemos que $f'(a) =$ pendiente de la recta tg a $f(x)$ en $x = a$

En nuestro caso,

$$\left.\begin{array}{l} m_t = f'(1) \\ \boxed{f'(x) = 2x \cdot e^{2-x} + x^2 \cdot e^{2-x} \cdot (-1) = e^{2-x} \cdot (2x - x^2)} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow m_t = f'(1) = e^1 \cdot \underbrace{(2-1)}_{1} \Rightarrow \boxed{m_t = e}$$

* Por tanto,

$$\left.\begin{array}{l} m_t = e \\ P(1, e) \end{array}\right\} \Rightarrow t: y = e + e(x-1) \Rightarrow t: y = \cancel{e} + ex - \cancel{e} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t: y = ex$$

6 ¿Recta tg a $f(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$ en $x=1$?

* Pto?

$$\left.\begin{array}{l} P(1,f(1)) \\ f(1)=\frac{1}{2\sqrt{1}} \Rightarrow f(1)=\frac{1}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{P(1,1/2)}$$

* Pendiente? Sabemos que $f'(a)=$ pendiente de la recta tg a $f(x)$ en $x=a$

En nuestro caso,

$$m_t=f'(1)$$

$$f'(x)=\frac{\cancel{0\cdot 2\sqrt{x}}-1\cdot 2\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}}{(2\sqrt{x})^2}=\frac{\frac{-2}{2\sqrt{x}}}{4x}=\frac{\frac{-1}{\sqrt{x}}}{4x}=\frac{-1}{4x\sqrt{x}}=\frac{-1}{4\sqrt{x^3}}$$

$$\Rightarrow f'(x)=\frac{-1}{4\sqrt{x^3}}$$

Luego, $m_t=f'(1)=\frac{-1}{4\sqrt{(1)^3}} \Rightarrow \boxed{m_t=\frac{-1}{4}}$

* Por tanto,

$$\left.\begin{array}{l} P(1,1/2) \\ m_t=-\frac{1}{4} \end{array}\right\} \Rightarrow t: y=\frac{1}{2}-\frac{1}{4}(x-1) \Rightarrow t: y=\frac{1}{2}-\frac{1}{4}x+\frac{1}{4} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{t: y=-\frac{1}{4}x+\frac{3}{4}}$$

7 ¿Recta tg a $f(x)=x^3-3x^2+4$ en el pto de ordenada $y=0$?

* Pto?

$$\left.\begin{array}{l} y=0 \\ y=x^3-3x^2+4 \end{array}\right\} \Rightarrow x^3-3x^2+4=0 \Rightarrow (x-2)\cdot(x^2-x-2)=0 \Rightarrow$$

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & -3 & 0 & 4 \\ 2 & & 2 & -2 & -4 \\ \hline & 1 & -1 & -2 & \underline{|0} \end{array}$$

$x-2=0$; $x=2$ $\boxed{P_1(2,0)}$

$\Rightarrow$

$x^2-x-2=0 \Rightarrow x=\frac{1\pm\sqrt{1+8}}{2}=\frac{1\pm 3}{2}$ → $x=2$ $\boxed{P_1(2,0)}$; $x=-1$ $\boxed{P_2(-1,0)}$

* Pendiente? $f'(a)$ = pendiente de la tg a $f(x)$ en $x=a$

$$\left.\begin{array}{l}\boxed{P_1(2,0)} \Rightarrow m_1 = f'(2) \\ f'(x) = 3x^2 - 6x\end{array}\right\} \Rightarrow m_1 = 3\cdot(1)^2 - 6(1) \Rightarrow \boxed{m_t = -3}$$

$$\left.\begin{array}{l}\boxed{P_2(-1,0)} \Rightarrow m_t = f'(-1) \\ f'(x) = 3x^2 - 6x\end{array}\right\} \Rightarrow m_2 = 3\cdot(-1)^2 - 6\cdot(-1) \Rightarrow \boxed{m_t = 9}$$

* Por tanto,

$$\left.\begin{array}{l}P_1(2,0) \\ m_1 = -3\end{array}\right\} \Rightarrow t_1: y = 0 - 3(x-2) \Rightarrow t_1: y = -3x+6$$

$$\left.\begin{array}{l}P_2(-1,0) \\ m_2 = 9\end{array}\right\} \Rightarrow t_2: y = 0 + 9(x+1) \Rightarrow t_2: y = 9x+9$$

8 ¿Recta tg y recta normal a $f(x) = \dfrac{x-\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}}$ en $x=4$?

RECTA TANGENTE

* Pto?

$$\left.\begin{array}{l}x=4 \Rightarrow P(4, f(4)) \\ f(4) = \dfrac{4-\sqrt{4}}{4+\sqrt{4}} = \dfrac{4-2}{4+2} = \dfrac{2}{6} = \dfrac{1}{3}\end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{P(4, 1/3)}$$

* Pendiente? Sabemos que $f'(a)$ = pendiente de la recta tg a $f(x)$ en $x=a$

En nuestro caso,

$m_t = f'(4)$

$$f'(x) = \frac{\left(1 - \frac{1}{2\sqrt{x}}\right)\cdot(x+\sqrt{x}) - (x-\sqrt{x})\cdot\left(1+\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)}{(x+\sqrt{x})^2}$$

$$f'(x) = \frac{\cancel{x} + \sqrt{x} - \frac{x}{2\sqrt{x}} - \cancel{\frac{\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}} - \cancel{x} - \frac{x}{2\sqrt{x}} + \sqrt{x} + \cancel{\frac{\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}}}{(x+\sqrt{x})^2}$$

$$f'(x) = \frac{2\sqrt{x} - \frac{\cancel{2}x}{\cancel{2}\sqrt{x}}}{(x+\sqrt{x})^2} = \frac{2\sqrt{x} - \frac{x\sqrt{x}}{\sqrt{x}\cdot\sqrt{x}}}{(x+\sqrt{x})^2} = \frac{2\sqrt{x} - \cancel{\frac{x\cdot\sqrt{x}}{x}}}{(x+\sqrt{x})^2}$$

Racionalizar

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{\sqrt{x}}{(x+\sqrt{x})^2}$$

Luego, $m_t = f'(4) = \frac{\sqrt{4}}{(4+\sqrt{4})^2} = \frac{2}{(\ +2)^2} = \frac{2}{36} = \frac{1}{18} \Rightarrow \boxed{m_t = \frac{1}{18}}$

* Por tanto,

$$\left.\begin{array}{l} P(4, 1/3) \\ m_t = \frac{1}{18} \end{array}\right\} \Rightarrow t: y = \frac{1}{3} + \frac{1}{18}(x-4) \Rightarrow t: y = \frac{1}{3} + \frac{1}{18}x - \frac{4}{18} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t: y = \frac{1}{18}x + \frac{1}{9}$$

Recta normal

La recta normal a $f(x)$ en $x=a$ es la perpendicular a la tg en $x=a$

* Pto? $\boxed{P(4, 1/3)}$

* Pendiente?

$$\left.\begin{array}{l} m_t = \frac{1}{18} \\ \text{Si dos rectas son } \perp \text{ entonces el producto de sus pendientes es } -1 \Rightarrow \\ \Rightarrow m_t \cdot m_n = -1 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{18} \cdot m_n = -1 \Rightarrow \boxed{m_n = -18}$$

* Por tanto,

$$\left.\begin{array}{l} P(4, \frac{1}{3}) \\ m_n = -18 \end{array}\right\} \Rightarrow n: y = \frac{1}{3} - 18(x-4) \Rightarrow n: y = \frac{1}{3} - 18x + 72 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow n: y = -18x + \frac{217}{3}$$

9 ¿Recta tg a $f(x)=\frac{x}{x-1}$ paralela a $r: 4x+y-9=0$?

* $\left.\begin{array}{l} r: 4x+y-9=0 \Rightarrow r: y=-4x+9 \\ t \text{ es paralela a } r \Rightarrow m_t = m_r \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{m_t=-4}$

* Punto?

$\left.\begin{array}{l} m_t=-4 \\ m_t=f'(x) \end{array}\right\} \Rightarrow f'(x)=-4 \Rightarrow \frac{-1}{(x-1)^2}=-4 \Rightarrow (x-1)^2=\frac{1}{4} \Rightarrow$

$\boxed{f'(x)=\frac{1\cdot(x-1)-x\cdot 1}{(x-1)^2}=\frac{x-1-x}{(x-1)^2}=\frac{-1}{(x-1)^2}}$

$\Rightarrow x-1=\pm\frac{1}{2}$

- $x=\frac{1}{2}+1$; $x=\frac{3}{2} \Rightarrow P_1\left(\frac{3}{2}, f\left(\frac{3}{2}\right)\right)$; $\boxed{P_1\left(\frac{3}{2}, 3\right)}$
- $x=-\frac{1}{2}+1$; $x=\frac{1}{2} \Rightarrow P_2\left(\frac{1}{2}, f\left(\frac{1}{2}\right)\right)$; $\boxed{P_2\left(\frac{1}{2}, -1\right)}$

$\left\{\begin{array}{l} \bullet\ x=\frac{3}{2} \Rightarrow f\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{3/2}{3/2-1}=\frac{\frac{3}{2}}{\frac{1}{2}}=3 \text{ ; } \underline{\underline{f\left(\frac{3}{2}\right)=3}} \\ \bullet\ x=\frac{1}{2} \Rightarrow f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}-1}=\frac{\frac{1}{2}}{-\frac{1}{2}}=-1 \text{ ; } \underline{\underline{f\left(\frac{1}{2}\right)=-1}} \end{array}\right.$

* Por tanto,

$\left.\begin{array}{l} P_1\left(\frac{3}{2}, 3\right) \\ m_t=-4 \end{array}\right\} \Rightarrow t_1: y=3-4\left(x-\frac{3}{2}\right) \Rightarrow t_1: y=3-4x+6 \Rightarrow t_1: y=-4x+9$

$\left.\begin{array}{l} P_2\left(\frac{1}{2}, -1\right) \\ m_t=-4 \end{array}\right\} \Rightarrow t_2: y=-1-4\left(x-\frac{1}{2}\right) \Rightarrow t_2: y=-1-4x+2 \Rightarrow t_2: y=-4x+1$

GRÁFICA

$y=\frac{x}{x-1}$ (Hipérbola)

1) $Dom(f)=\mathbb{R}-\{1\}$

2) AVI $x=1$ $\quad \lim_{x\to 1}\frac{x}{x-1}=\frac{1}{0}=\left\{\begin{array}{l} \lim_{x\to 1^-} f(x)=\frac{1}{0^-}=-\infty \\ \lim_{x\to 1^+} f(x)=\frac{1}{0^+}=+\infty \end{array}\right. \Rightarrow$ $x=1$ es AV

AHI

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x}{x-1} = \frac{-\infty}{-\infty} \text{ (I)} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{x} = \lim_{x\to-\infty} (1) = 1$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{x-1} = \frac{+\infty}{+\infty} \text{ (I)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{x} = \lim_{x\to+\infty} (1) = 1$$

$\Rightarrow$ $y=1$ es AH

Posición

Izquierda | $x=-100$ $\begin{cases} \text{Función} \to y = \frac{-100}{-101} = 0'99\ldots \\ \text{Asíntota} \to y = 1 \end{cases}$ $\Rightarrow$ f(x) está por debajo de la AH

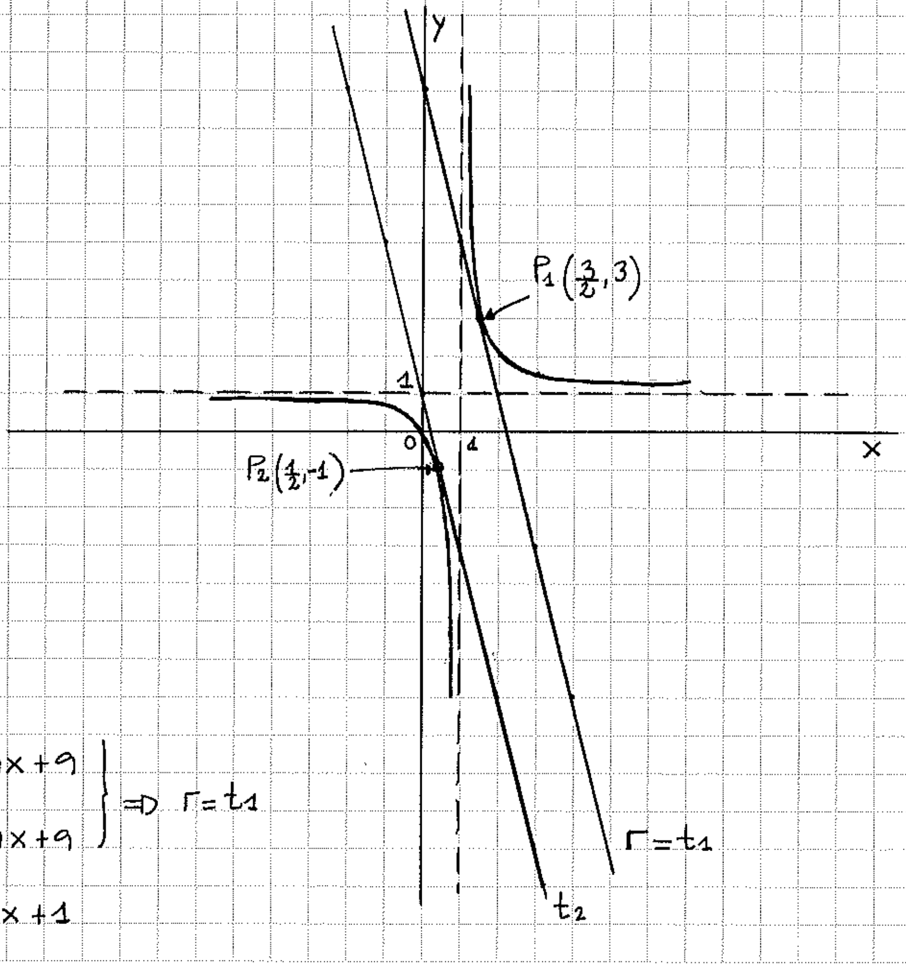
Derecha | $x=100$ $\begin{cases} \text{Función} \to y = \frac{100}{99} = 1'01\ldots \\ \text{Asíntota} \to y = 1 \end{cases}$ $\Rightarrow$ f(x) está por encima de la AH

3) PC eje OX | $y=0$ $\quad \frac{x}{x-1} = 0$; $x=0$ $\Rightarrow$ $\boxed{(0,0)}$

PC eje OY | $x=0$ $\quad y = \frac{0}{0-1}$; $y=0$ $\Rightarrow$ $\boxed{(0,0)}$

4) Tabla valores

x	-3	-2	-1	0	0'5	1'5	2	3	4
y	0'75	2/3	0'5	0	-1	3	2	1'5	4/3



$r: y = -4x + 9$

$t_1: y = -4x + 9$

$\Rightarrow r = t_1$

$t_2: y = -4x + 1$

10 ¿Recta tg y recta normal a $f(x)=\frac{x+1}{x-1}$ en $x=2$?

¿Área del triángulo determinado por dichas rectas y el eje de abscisas?

RECTA TAGENTE

* Pto $P(2, f(2))$; $\boxed{P(2,3)}$

$f(x)=\frac{x+1}{x-1} \Rightarrow f(2)=\frac{3}{1}$; $f(2)=3$

* Pendiente? Sabemos que $f'(a)=$ pendiente de la recta tg a $f(x)$ en $x=a$.

En nuestro caso,

$m_t = f'(2)$

$f(x)=\frac{x+1}{x-1} \Rightarrow \boxed{f'(x)=\frac{1\cdot(x-1)-(x+1)\cdot 1}{(x-1)^2}=\frac{x-1-x-1}{(x-1)^2}=\frac{-2}{(x-1)^2}} \Rightarrow$

$\Rightarrow m_t = f'(2)=\frac{-2}{(2-1)^2}=\frac{-2}{1}=-2 \Rightarrow \boxed{m_t=-2}$

* Por tanto,

$\left.\begin{array}{l} P(2,3) \\ m_t=-2 \end{array}\right\} \Rightarrow t: y=3-2(x-2) \Rightarrow t: y=3-2x+4 \Rightarrow \boxed{t: y=-2x+7}$

RECTA NORMAL

La recta normal a $f(x)$ en $x=a$ es la recta perpendicular a la tg a $f(x)$ en $x=a$

* Pto? $\boxed{P(2,3)}$

* Pendiente?

$\left.\begin{array}{l} m_t=-2 \\ \text{Si dos rectas son } \perp \Rightarrow \text{el producto de sus pendientes es } -1 \Rightarrow \\ \Rightarrow m_t\cdot m_n=-1 \end{array}\right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow -2\cdot m_n=-1 \Rightarrow \boxed{m_n=\frac{1}{2}}$

* Por tanto,

$\left.\begin{array}{l} P(2,3) \\ m_n=\frac{1}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow n: y=3+\frac{1}{2}(x-2) \Rightarrow n: y=3+\frac{1}{2}x-1 \Rightarrow \boxed{n: y=\frac{1}{2}x+2}$

GRÁFICA

$f(x) = \frac{x+1}{x-1}$ (Hipérbola)

1) $Dom(f) = \mathbb{R} - \{1\}$

2) AV|

$$\lim_{x\to 1} \frac{x+1}{x-1} = \frac{2}{0} = \begin{cases} \lim_{x\to 1^-} \frac{x+1}{x-1} = \frac{2}{0^-} = -\infty \\ \lim_{x\to 1^+} \frac{x+1}{x-1} = \frac{2}{0^+} = +\infty \end{cases} \Rightarrow x = 1 \text{ es AV}$$

AH|

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{x\to -\infty} \frac{x-1}{x+1} = \frac{-\infty}{-\infty} \text{ (I)} = \lim_{x\to -\infty} \frac{x}{x} = \lim_{x\to -\infty} (1) = 1 \\ \lim_{x\to +\infty} \frac{x-1}{x+1} = \frac{+\infty}{+\infty} \text{ (I)} = \lim_{x\to +\infty} \frac{x}{x} = \lim_{x\to +\infty} (1) = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow y = 1 \text{ es AH}$$

Posición

Izquierda| $x = -100$ $\begin{cases} \text{Función } y = \frac{-99}{-101} = 0'98\ldots \\ \text{Asíntota } y = 1 \end{cases}$ $\Rightarrow$ f(x) está por debajo de la AH

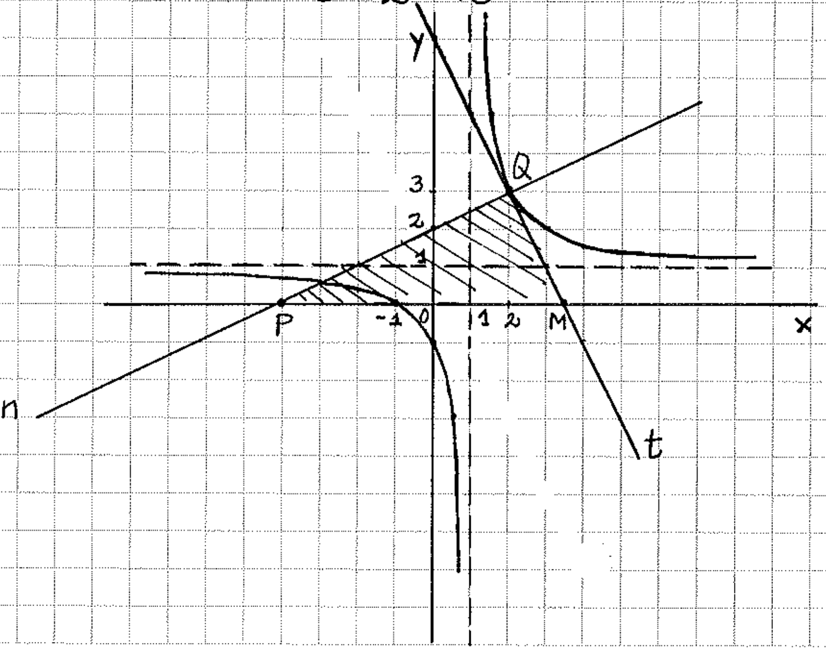
Derecha| $x = 100$ $\begin{cases} \text{Función } y = \frac{101}{99} = 1'02\ldots \\ \text{Asíntota } y = 1 \end{cases}$ $\Rightarrow$ f(x) está por encima de la AH

3) PC eje OX| $y=0$ $\frac{x+1}{x-1} = 0$; $x+1 = 0$; $x = -1$ $\Rightarrow$ $\boxed{(-1, 0)}$

PC eje OY| $x=0$ $y = \frac{0+1}{0-1}$; $y = -1$ $\Rightarrow$ $\boxed{(0, -1)}$

4)

x	-3	-2	-1	0	0'5	1'5	2	3	4
y	0'5	4/3	0	-1	-3	5	3	2	5/3



Área del triángulo determinado por t, n y el eje OX

$$\text{Área triángulo} = \frac{\text{base} \cdot \text{altura}}{2} =$$

$$\left.\begin{array}{l} n: y = \frac{1}{2}x + 2 \\ \text{Eje OX}: y = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{1}{2}x + 2 = 0;\ x + 4 = 0;\ x = -4$$

$\boxed{P(-4,0)}$ pto de corte de n y el eje OX

$$\left.\begin{array}{l} t: y = -2x + 7 \\ \text{Eje OX}: y = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow -2x + 7 = 0;\ 2x = 7;\ x = \frac{7}{2}$$

$\boxed{M\left(\frac{7}{2},0\right)}$ pto de corte de t y el eje OX

$\boxed{\text{Base} = \text{distancia } (P,M) = 7'5 \text{ unidades}}$

$$\left.\begin{array}{l} t: y = -2x + 7 \\ n: y = \frac{1}{2}x + 2 \end{array}\right\} \Rightarrow -2x + 7 = \frac{1}{2}x + 2 \Rightarrow -4x + 14 = x + 4 \Rightarrow -5x = -10 \Rightarrow x = 2$$

$$x = 2 \Rightarrow y = \frac{1}{2} \cdot (2) + 2 \Rightarrow y = 3$$

$\boxed{Q(2,3)}$ pto de intersección de t y n

$\boxed{\text{Altura} = \text{distancia } (Q, \text{Eje OX}) = 3}$

Por tanto, $\text{Área} = \dfrac{7'5 \cdot 3}{2} = 11'25\ u^2$

11 ¿Rectas tangente y normal a $f(x)=\ln(2-x)$ en $y=0$?

RECTA TANGENTE

* Pto?

$$\left.\begin{array}{l} y=0 \\ f(x)=\ln(2-x) \end{array}\right\} \Rightarrow \ln(2-x)=0 \Rightarrow 2-x=1 \;;\; x=1 \qquad \boxed{P(1,0)}$$

* Pendiente? $f'(a)=$ pendiente de la recta tg a $f(x)$ en $x=a$

$$\left.\begin{array}{l} f(x)=\ln(2-x) \Rightarrow f'(x)=\dfrac{1}{2-x}\cdot(-1) \Rightarrow f'(x)=\dfrac{-1}{2-x} \\ m_t=f'(1) \end{array}\right\} \Rightarrow m_t=f'(1)=\dfrac{-1}{2-1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{m_t=-1}$$

* Por tanto,

$$\left.\begin{array}{l} P(1,0) \\ m_t=-1 \end{array}\right\} \Rightarrow t:\ y=0-1(x-1) \Rightarrow \boxed{t:\ y=-x+1}$$

RECTA NORMAL

La normal a $f(x)$ en $x=a$ es la recta $\perp$ a la tg a $f(x)$ en $x=a$

* Pto? $\boxed{P(1,0)}$

$$\left.\begin{array}{l} * \ m_t=-1 \\ \text{Si dos rectas son } \perp \Rightarrow \text{el producto de sus pendientes es } -1 \Rightarrow m_t\cdot m_n=-1 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -1\cdot m_n=-1 \Rightarrow \boxed{m_n=1}$$

* Por tanto,

$$\left.\begin{array}{l} P(1,0) \\ m_n=1 \end{array}\right\} \Rightarrow n:\ y=0+1(x-1) \Rightarrow \boxed{n:\ y=x-1}$$

12

¿Ptos de la curva $y=3x^3-2x^2+x$ en los que la tg es $\parallel$ a $r: 2x-3y+5=0$?

$$\left.\begin{array}{l} * \ r: 2x-3y+5=0 \Rightarrow r: 3y=2x+5 \Rightarrow r: y=\frac{2}{3}x+\frac{5}{3} \Rightarrow m_r=\frac{2}{3} \\ t \parallel r \Rightarrow m_t=m_r \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{m_t=\frac{2}{3}}$$

$$\left.\begin{array}{l} * \ m_t=\frac{2}{3} \\ m_t=f'(x) \end{array}\right\} \Rightarrow f'(x)=\frac{2}{3} \Rightarrow 9x^2-4x+1=\frac{2}{3} \Rightarrow 27x^2-12x+3=2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 27x^2-12x+1=0 \Rightarrow x=\frac{12\pm\sqrt{144-108}}{54}=\frac{12\pm 6}{54} \begin{cases} x=\frac{18}{54} \ ; \ x=\frac{1}{3} \\ x=\frac{6}{54} \ ; \ x=\frac{1}{9} \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} P_1\left(\frac{1}{3}, f\left(\frac{1}{3}\right)\right) \\ f\left(\frac{1}{3}\right)=3\left(\frac{1}{3}\right)^3-2\left(\frac{1}{3}\right)^2+\frac{1}{3}=\frac{2}{9} \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{P_1\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{9}\right)}$$

$$\left.\begin{array}{l} P_2\left(\frac{1}{9}, f\left(\frac{1}{9}\right)\right) \\ f\left(\frac{1}{9}\right)=3\left(\frac{1}{9}\right)^3-2\left(\frac{1}{9}\right)^2+\frac{1}{9}=\frac{22}{243} \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{P_2\left(\frac{1}{9}, \frac{22}{243}\right)}$$

PTOS DE $f(x)$ EN LOS QUE LA RECTA TG ES PARALELA A $r: 2x-3y+5=0$

$$\left.\begin{array}{l} * \ P_1\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{9}\right) \\ m_t=\frac{2}{3} \end{array}\right\} \Rightarrow t_1: y=\frac{2}{9}+\frac{2}{3}\left(x-\frac{1}{3}\right) \Rightarrow t_1: y=\cancel{\frac{2}{9}}+\frac{2}{3}x-\cancel{\frac{2}{9}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t_1: y=\frac{2}{3}x \Rightarrow t_1: 3y=2x \Rightarrow \boxed{t_1: 2x-3y=0}$$

$$\left.\begin{array}{l} * \ P_2\left(\frac{1}{9}, \frac{22}{243}\right) \\ m_t=\frac{2}{3} \end{array}\right\} \Rightarrow t_2: y=\frac{22}{243}+\frac{2}{3}\left(x-\frac{1}{9}\right) \Rightarrow t_2: y=\frac{22}{243}+\frac{2}{3}x-\frac{2}{27} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t_2: y=\frac{2}{3}x+\frac{4}{243} \Rightarrow t_2: 243y=162x+4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{t_2: 162x-243y+4=0}$$

13 ¿Recta tg a $f(x) = 4x^3 - 2x^2 - 10$ en su pto de inflexión?

1°) Punto de inflexión de $f(x)$ = Pto de tangencia

* $f'(x) = 12x^2 - 4x$
* $\boxed{f''(x) = 24x - 4}$

$f''(x) = 0 \Leftrightarrow 24x - 4 = 0$; $24x = 4$; $x = \frac{4}{24}$; $x = \frac{1}{6}$

* $f'''(x) = 24$

$f'''\left(\frac{1}{6}\right) = 24 \neq 0 \Rightarrow P\left(\frac{1}{6}, f\left(\frac{1}{6}\right)\right)$ pto inflexión $\Rightarrow \boxed{P\left(\frac{1}{6}, \frac{-271}{20}\right)}$ pto inflexión

$f\left(\frac{1}{6}\right) = 4\left(\frac{1}{6}\right)^3 - 2\left(\frac{1}{6}\right)^2 - 10 = \frac{-271}{20}$

2°) Pendiente?

$$\left.\begin{array}{l} m_t = f'\left(\frac{1}{6}\right) \\ f'(x) = 12x^2 - 4x \end{array}\right\} \Rightarrow m_t = 12 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^2 - 4 \cdot \left(\frac{1}{6}\right) \Rightarrow \boxed{m_t = -\frac{1}{3}}$$

3°) Por tanto la recta tg pedida es:

$$\left.\begin{array}{l} P\left(\frac{1}{6}, -\frac{271}{20}\right) \\ m_t = -\frac{1}{3} \end{array}\right\} \Rightarrow t: y = \frac{-271}{20} - \frac{1}{3}\left(x - \frac{1}{6}\right) \Rightarrow t: y = -\frac{271}{20} - \frac{1}{3}x + \frac{1}{18} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t: y = -\frac{1}{3}x - \frac{2429}{180}$$

14 ¿Ptos de la gráfica de $f(x) = 2x^3 + x^2 + x - 2$ en los que la tg es paralela a la recta secante a $f(x)$ en $x=0$ y $x=1$?

1°) Pendiente de s = secante a $f(x)$ en $x=0$ y $x=1$

$$\left.\begin{array}{l} x=0 \Rightarrow P(0, f(0)) = \boxed{P(0, -2)} \\ x=1 \Rightarrow Q(1, f(1)) = \boxed{Q(1, 2)} \end{array}\right\} \Rightarrow m_s = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2-(-2)}{1-0}; \boxed{m_s = 4}$$

t es paralela a $s \Rightarrow m_t = m_s \Rightarrow m_t = 4$

2°)
$$\left.\begin{array}{l} m_t = 4 \\ m_t = f'(x) \end{array}\right\} \Rightarrow f'(x) = 4 \Rightarrow 6x^2 + 2x + 1 = 4 \Rightarrow 6x^2 + 2x - 3 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{-2 \pm \sqrt{4+72}}{12} = \frac{-2 \pm \sqrt{76}}{12} = \frac{-2 \pm \sqrt{4\cdot 19}}{12} = \frac{-2 \pm 2\sqrt{19}}{12} \begin{cases} x = \dfrac{-1+\sqrt{19}}{6} \\ x = \dfrac{-1-\sqrt{19}}{6} \end{cases}$$

$$P_1\left(\frac{-1+\sqrt{19}}{6}, f\left(\frac{-1+\sqrt{19}}{6}\right)\right)$$

$$P_2\left(\frac{-1-\sqrt{19}}{6}, f\left(\frac{-1-\sqrt{19}}{6}\right)\right)$$

Ptos de la gráfica de $f(x)$ en los que la tg es ∥ a la secante a la curva en $x=0$ y $x=1$

15 ¿Pto de $f(x) = \operatorname{sen} x^2$ en que la recta tg tiene pendiente $-2\sqrt{\pi}$ y su ecuación?

* $\left.\begin{array}{l} m_t = -2\sqrt{\pi} \\ m_t = f'(x) \end{array}\right\} \Rightarrow f'(x) = -2\sqrt{\pi} \underset{f'(x) = 2x\cdot\cos x^2}{\Rightarrow} 2x \cdot \cos x^2 = -2\sqrt{\pi} \Rightarrow$

$\Rightarrow x \cdot \cos x^2 = -\sqrt{\pi} \Rightarrow x = \sqrt{\pi}$

$P(\sqrt{\pi}, f(\sqrt{\pi})) \underset{f(\sqrt{\pi}) = \operatorname{sen}\pi = 0}{\Rightarrow} \boxed{P(\sqrt{\pi}, 0)}$ Pto de $f(x)$ en que la tg tiene pendiente $-2\sqrt{\pi}$

* $\boxed{m_t = -2\sqrt{\pi}}$

* Por tanto, la recta tg es:

$\left.\begin{array}{l} P(\sqrt{\pi}, 0) \\ m_t = -2\sqrt{\pi} \end{array}\right\} \Rightarrow t: y = 0 - 2\sqrt{\pi}\,(x - \sqrt{\pi}) \Rightarrow t: y = -2\sqrt{\pi}\,x + 2\pi$

16 ¿Ptos de $f(x) = 3x^2 - 5x + 12$ en los que la tg a $f(x)$ pasa por $(0,0)$? ¿Ecuación de dichas tg?

1.º) Recta tg a $f(x)$ en $x=a$

* $P(a, f(a)) \Rightarrow \boxed{P(a, 3a^2 - 5a + 12)}$

* $\left.\begin{array}{l} m_t = f'(a) \\ f'(x) = 6x - 5 \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{m_t = 6a - 5}$

$\Rightarrow t_a: y = 3a^2 - 5a + 12 + (6a-5)\cdot(x-a)$

Ecuación de la recta tg a $f(x)$ en $x=a$

2.º) $(0,0) \in t_a \Rightarrow 0 = 3a^2 - 5a + 12 + (6a-5)\cdot(0-a) \Rightarrow$

$\Rightarrow 0 = 3a^2 - 5a + 12 + (6a-5)\cdot(-a) \Rightarrow 0 = 3a^2 \cancel{-5a} + 12 - 6a^2 \cancel{+5a} \Rightarrow$

$\Rightarrow -3a^2 + 12 = 0 \Rightarrow -3a^2 = -12 \Rightarrow a^2 = 4 \to a=2, \; a=-2$

* $a=2 \Rightarrow P(2, f(2))$; $\boxed{P_1(2, 14)}$
* $a=-2 \Rightarrow P(-2, f(-2))$; $\boxed{P_2(-2, 34)}$

Ptos de f(x) en los que la recta tg pasa por (0,0)

Ahora hallamos la ecuación de la recta tg a f(x) en los ptos hallados:

* $P_1(2, 14)$
* $m_t = f'(2)$
  $f'(x) = 6x - 5$ $\Rightarrow m_t = 7$ $\Rightarrow t_1: y = 14 + 7(x-2) \Rightarrow t_1: y = 7x$

* $P_2(-2, 34)$
* $m_t = f'(-2)$
  $f'(x) = 6x - 5$ $\Rightarrow m_t = -17$ $\Rightarrow t_2: y = 34 - 17(x+2) \Rightarrow t_2: y = -17x$

17 ¿Ptos de $f(x) = \frac{1}{4}x^2 + 4x - 4$ en los que la tg pasa por $P(0,-8)$? ¿Ecuaciones de dichas tg?

1º) Recta tg a f(x) en x=a

* $P(a, f(a)) \Rightarrow \boxed{P(a, \frac{1}{4}a^2 + 4a - 4)}$
* $m_t = f'(a)$
  $f'(x) = \frac{1}{2}x + 4$ $\Rightarrow \boxed{m_t = \frac{1}{2}a + 4}$

$\Rightarrow t_a: y = \frac{1}{4}a^2 + 4a - 4 + \left(\frac{1}{2}a + 4\right)(x-a)$

Recta tg a f(x) en x=a

2º) $P(0,-8) \in t_a \Rightarrow -8 = \frac{1}{4}a^2 + 4a - 4 + \left(\frac{1}{2}a + 4\right)(0-a) \Rightarrow$

$\Rightarrow -8 = \frac{1}{4}a^2 + 4a - 4 - \frac{1}{2}a^2 - 4a \underset{(\cdot 4)}{\Rightarrow} -32 = a^2 \cancel{+16a} - 16 - 2a^2 \cancel{-16a}$

$\Rightarrow -a^2 = -16 \Rightarrow a^2 = 16 \Rightarrow a=4$ ó $a=-4$

* $a=4 \Rightarrow P(4, f(4)) \Rightarrow \boxed{P(4, 16)}$
* $a=-4 \Rightarrow P(-4, f(-4)) \Rightarrow \boxed{P(-4, -16)}$

Ptos de f(x) en los que la tg pasa por P(0,-8)

Ahora hallamos la ecuación de la recta tg a $f(x)$ en los puntos hallados:

* $P_1(4,16)$
* $\left.\begin{array}{l} m_t = f'(4) \\ f'(x) = \frac{1}{2}x+4 \end{array}\right\} \Rightarrow m_t = 6$

$\Rightarrow t_1: y = 16 + 6(x-4) \Rightarrow \boxed{t_1: y = 6x - 8}$

* $P_2(-4,-16)$
* $\left.\begin{array}{l} m_t = f'(-4) \\ f'(x) = \frac{1}{2}x+4 \end{array}\right\} \Rightarrow m_t = 2$

$\Rightarrow t_2: y = -16 + 2(x+4) \Rightarrow \boxed{t_2: y = 2x - 8}$

18 $f(x) = x^2 - 3x + 4$

a) Recta tg a $f(x)$ en $x = a$

* $P(a, f(a)) \Rightarrow \boxed{P(a, a^2-3a+4)}$
* $\left.\begin{array}{l} m_t = f'(a) \\ f'(x) = 2x-3 \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{m_t = f'(a) = 2a-3}$

$\Rightarrow \boxed{t_a: y = a^2-3a+4+(2a-3)\cdot(x-a)}$

RECTA TG A $f(x)$ EN $x=a$

b) t_a pasa por $(0,0) \Rightarrow 0 = a^2 - 3a + 4 + (2a-3)\cdot(0-a) \Rightarrow$

$\Rightarrow 0 = a^2 \cancel{-3a} + 4 - 2a^2 \cancel{+3a} \Rightarrow -a^2+4 = 0 \Rightarrow a^2 = 4$ → $a = 2$, $a = -2$

* $a = 2 \Rightarrow P(2, f(2)) \Rightarrow \boxed{P_1(2,2)}$
* $a = -2 \Rightarrow P(-2, f(-2)) \Rightarrow \boxed{P_2(-2,14)}$

Ptos en los que la tg a $f(x)$ pasa por $(0,0)$

* $P_1(2,2)$
* $\left.\begin{array}{l} m_t = f'(2) \\ f'(x) = 2x-3 \end{array}\right\} \Rightarrow m_t = 1$

$\Rightarrow t_1: y = 2 + 1(x-2) \Rightarrow \boxed{t_1: y = x}$

* $P_2(-2,14)$
* $\left.\begin{array}{l} m_t = f'(-2) \\ f'(x) = 2x-3 \end{array}\right\} \Rightarrow m_t = -7$

$\Rightarrow t_2: y = 14 - 7(x+2) \Rightarrow \boxed{t_2: y = -7x}$