

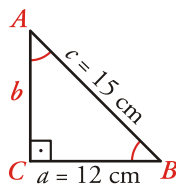
EJERCICIOS RESUELTOS: RESOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS Y FÓRMULAS MATEMÁTICAS

Ejercicio nº 1.-

En un triángulo rectángulo la hipotenusa mide 15 cm y uno de los catetos mide 12 cm. Calcula la longitud del otro cateto y la medida de sus ángulos.

Solución:

Aplicamos el teorema de Pitágoras para hallar el otro cateto:



$$a^2 + b^2 = c^2$$

$$12^2 + b^2 = 15^2 \rightarrow 144 + b^2 = 225$$

$$b^2 = 225 - 144 = 81 \rightarrow b = 9 \text{ cm}$$

Hallamos los ángulos:

$$\operatorname{sen} \hat{B} = \frac{b}{c} \rightarrow \operatorname{sen} \hat{B} = \frac{9}{15} = 0,6 \rightarrow \hat{B} = 36^\circ 52' 12''$$

$$\hat{A} = 90^\circ - \hat{B} = 53^\circ 7' 48''$$

$$\hat{C} = 90^\circ$$

Por tanto:

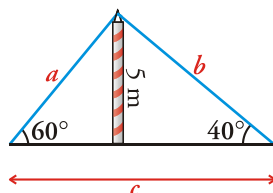
$$a = 12 \text{ cm}; \hat{A} = 53^\circ 7' 48''$$

$$b = 9 \text{ cm}; \hat{B} = 36^\circ 52' 12''$$

$$c = 15 \text{ cm}; \hat{C} = 90^\circ$$

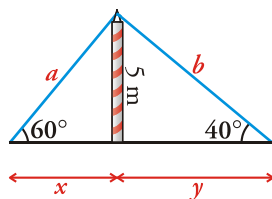
Ejercicio nº 2.-

Un mástil de 5 metros se ha sujetado al suelo con un cable como muestra la figura:



Halla el valor de c y la longitud del cable.

Solución:



$$\operatorname{sen} 60^{\circ} = \frac{5}{a} \rightarrow a = \frac{5}{\operatorname{sen} 60^{\circ}} = 5,77 \text{ m}$$

$$\operatorname{tg} 60^{\circ} = \frac{5}{x} \rightarrow x = \frac{5}{\operatorname{tg} 60^{\circ}} = 2,89 \text{ m}$$

Por otra parte, si consideramos el otro triángulo:

$$\operatorname{sen} 40^{\circ} = \frac{5}{b} \rightarrow b = \frac{5}{\operatorname{sen} 40^{\circ}} = 7,78 \text{ m}$$

$$\operatorname{tg} 40^{\circ} = \frac{5}{y} \rightarrow y = \frac{5}{\operatorname{tg} 40^{\circ}} = 5,96 \text{ m}$$

Por tanto:

La longitud del cable es $a + b = 5,77 + 7,78 = 13,55$ metros.

El valor de c es $x + y = 2,89 + 5,96 = 8,85$ metros.

Ejercicio nº 3.-

Si $\operatorname{sen} a = 0,35$ y $0^{\circ} < a < 90^{\circ}$ halla (sin calcular a):

a) $\operatorname{sen} (180^{\circ} - \alpha)$ b) $\cos (180^{\circ} + \alpha)$

Solución:

a) $\operatorname{sen} (180^{\circ} - \alpha) = \operatorname{sen} \alpha = 0,35$

b) $\cos (180^{\circ} + \alpha) = -\cos \alpha$

Necesitamos saber cuánto vale $\cos a$:

$$\operatorname{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \rightarrow 0,35^2 + \cos^2 \alpha = 1$$

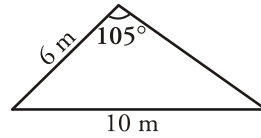
$$0,1225 + \cos^2 \alpha = 1 \rightarrow \cos^2 \alpha = 0,8775$$

$$\cos \alpha = 0,94 \text{ (es positivo, pues } 0^{\circ} < \alpha < 90^{\circ} \text{)}$$

$$\text{Por tanto, } \cos (180^{\circ} + \alpha) = -\cos \alpha = -0,94$$

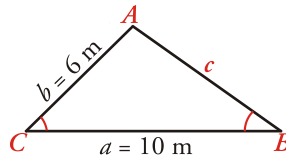
Ejercicio n° 4.-

Resuelve el siguiente triángulo, es decir, halla el valor de sus lados y de sus ángulos:



Solución:

Hallamos el ángulo $\hat{B}$ con el teorema de los senos:



$$\frac{a}{\sen \hat{A}} = \frac{b}{\sen \hat{B}} \rightarrow \frac{10}{\sen 105^\circ} = \frac{6}{\sen \hat{B}}$$

$$\sen \hat{B} = \frac{6 \sen 105^\circ}{10} = 0,58 \rightarrow \hat{B} = 35^\circ 25' 9''$$

(Como $\hat{A}$ es obtuso, $\hat{B}$ y $\hat{C}$ han de ser agudos; solo hay una solución).

Hallamos el ángulo $\hat{C}$:

$$\hat{C} = 180^\circ - (\hat{A} + \hat{B}) = 39^\circ 34' 51''$$

Calculamos el lado c :

$$\frac{c}{\sen \hat{C}} = \frac{a}{\sen \hat{A}} \rightarrow \frac{c}{\sen(39^\circ 34' 51'')} = \frac{10}{\sen 105^\circ} \rightarrow c = 6,6 \text{ m}$$

Por tanto:

$$a = 10 \text{ m}; \hat{A} = 105^\circ$$

$$b = 6 \text{ m}; \hat{B} = 35^\circ 25' 9''$$

$$c = 6,6 \text{ m}; \hat{C} = 39^\circ 34' 51''$$

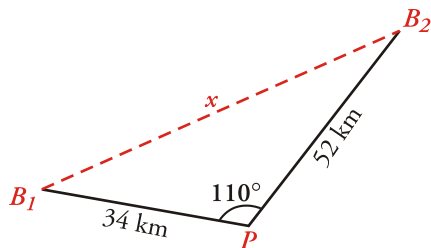
Ejercicio n° 5.-

Dos barcos salen de un puerto a la misma hora con rumbos distintos, formando un ángulo de 110° . Al cabo de 2 horas, el primer barco está a 34 km del punto inicial y el segundo barco, a 52 km de dicho

punto. En ese mismo instante, ¿a qué distancia se encuentra un barco del otro?

Solución:

Hallamos la distancia, x , aplicando el teorema del coseno:



$$x^2 = 34^2 + 52^2 - 2 \cdot 34 \cdot 52 \cdot \cos 110^\circ$$

$$x^2 = 1156 + 2704 + 1209,38$$

$$x^2 = 5069,38$$

$$x = 71,20 \text{ km}$$

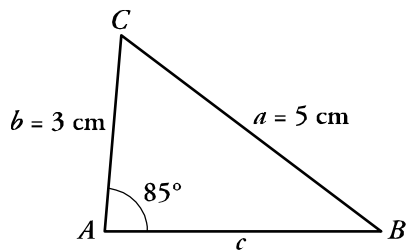
Por tanto, la distancia entre los dos barcos es de 71,20 km.

Ejercicio nº 6.-

- a) En un triángulo se conoce $a = 5 \text{ cm}$, $b = 3 \text{ cm}$ y $\hat{A} = 85^\circ$. ¿Cuántos triángulos hay con estos datos?
- b) Comprueba que no hay ningún triángulo que cumpla $b = 5,8 \text{ cm}$, $c = 5 \text{ cm}$ y $\hat{C} = 110^\circ$.

Solución:

a)



Calculamos $\hat{B}$ aplicando el teorema del seno:

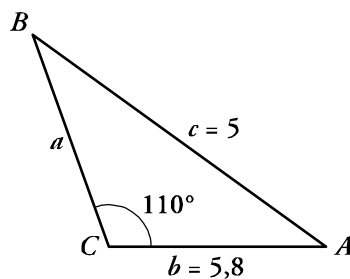
$$\frac{a}{\sin \hat{A}} = \frac{b}{\sin \hat{B}} \rightarrow \sin \hat{B} = \frac{b \sin \hat{A}}{a} = \frac{3 \sin 85^\circ}{5} \approx 0,5977$$

Hay dos soluciones para $\hat{B}$:

$$\hat{B} = 36^\circ 42' 24'' \text{ y } \hat{B} = 143^\circ 17' 36'' \text{ (esta no es válida pues } \hat{A} + \hat{B} > 180^\circ)$$

Por tanto, solo hay un triángulo con los datos dados.

b)



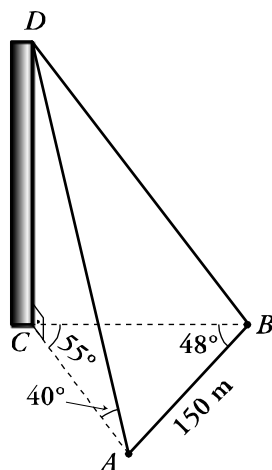
Calculamos $\hat{B}$ aplicando el teorema del seno:

$$\frac{b}{\sin \hat{B}} = \frac{c}{\sin \hat{C}} \rightarrow \sin \hat{B} = \frac{b \sin \hat{C}}{c} = \frac{5,8 \sin 110^\circ}{5} \approx 1,09 > 1$$

No existe ningún triángulo con esos datos.

Ejercicio nº 7.-

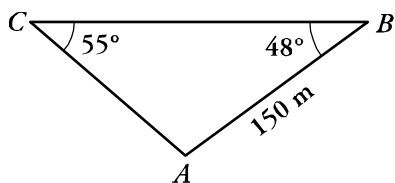
Para medir la altura de una torre CD nos hemos situado en los puntos A y B , cuya distancia es de 150 m y hemos tomado las medidas que aparecen en la figura.



Calcula la altura de la torre.

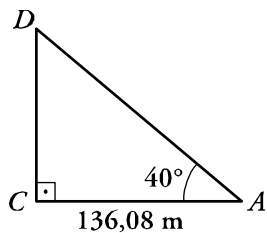
Solución:

Para calcular la altura $\overline{CD}$ en el triángulo DCA , necesitamos conocer $\overline{CA}$, y esto podemos obtenerlo aplicando el teorema del seno en el triángulo CAB .



$$\frac{150}{\text{sen } 55^\circ} = \frac{\overline{CA}}{\text{sen } 48^\circ} \rightarrow \overline{CA} = \frac{150 \cdot \text{sen } 48^\circ}{\text{sen } 55^\circ} \approx 136,08 \text{ m}$$

En el triángulo DCA se tiene:



$$\text{tg } 40^\circ = \frac{\overline{CD}}{136,08} \rightarrow \overline{CD} = 136,08 \cdot \text{tg } 40^\circ \approx 114,18 \text{ m}$$

La torre tiene una altura de 114,18 m.

Ejercicio n° 8.-

Demuestra la siguiente igualdad:

$$\frac{(\text{sen } x + \text{cos } x) \cdot \text{cos } 2x}{\text{cos } x - \text{sen } x} = 1 + \text{sen } 2x$$

Solución:

$$\begin{aligned} \frac{(\text{sen } x + \text{cos } x) \cdot \text{cos } 2x}{\text{cos } x - \text{sen } x} &= \frac{(\text{sen } x + \text{cos } x) \cdot (\text{sen } x + \text{cos } x) \cdot \text{cos } 2x}{(\text{cos } x - \text{sen } x)(\text{cos } x + \text{sen } x)} = \\ &= \frac{(\text{sen } x + \text{cos } x)^2 \cdot \text{cos } 2x}{\text{cos}^2 x - \text{sen}^2 x} = \frac{(\text{sen}^2 x + \text{cos}^2 x + 2 \text{sen } x \text{cos } x) \cdot \text{cos } 2x}{\text{cos } 2x} = \\ &= \text{sen}^2 x + \text{cos}^2 x + 2 \text{sen } x \text{cos } x = 1 + 2 \text{sen } x \text{cos } x = 1 + \text{sen } 2x \end{aligned}$$

Ejercicio n° 9.-

Resuelve la ecuación:

$$\cos 2x + \operatorname{sen}^2 x - \frac{1}{2} = 0$$

Solución:

$$\cos 2x + \operatorname{sen}^2 x - \frac{1}{2} = 0$$

$$\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x + \operatorname{sen}^2 x - \frac{1}{2} = 0$$

$$\cos^2 x - \frac{1}{2} = 0$$

$$\cos^2 x = \frac{1}{2}$$

$$\cos x = \pm \sqrt{\frac{1}{2}} = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\begin{cases} \cos x = \frac{\sqrt{2}}{2} & \rightarrow \begin{cases} x = 45^\circ + 360^\circ k \\ x = 315^\circ + 360^\circ k \end{cases} \\ \cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2} & \rightarrow \begin{cases} x = 135^\circ + 360^\circ k \\ x = 225^\circ + 360^\circ k \end{cases} \end{cases}$$

siendo $k \in \mathbb{Z}$

Ejercicio n° 10.-

Demuestra que:

$$\frac{\operatorname{sen}(a+b) + \operatorname{sen}(a-b)}{\cos(a-b) - \cos(a+b)} = \frac{1}{\operatorname{tg} b}$$

Solución:

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}(a+b) + \operatorname{sen}(a-b) &= \operatorname{sen} a \cos b + \cos a \operatorname{sen} b + \operatorname{sen} a \cos b - \cos a \operatorname{sen} b = 2 \operatorname{sen} a \cos b \\ \cos(a-b) - \cos(a+b) &= \cos a \cos b + \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b - (\cos a \cos b - \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b) \\ &= 2 \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b \end{aligned}$$

Por tanto:

$$\frac{\operatorname{sen}(a+b) + \operatorname{sen}(a-b)}{\cos(a-b) - \cos(a+b)} = \frac{2 \operatorname{sen} a \cos b}{2 \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b} = \frac{\cos b}{\operatorname{sen} b} = \frac{1}{\operatorname{tg} b}$$