

TRIGONOMETRIA

Para **medir ángulos** se utilizan las siguientes unidades:

1 Grado sexagesimal (°):

Si se divide la circunferencia en 360 partes iguales, el ángulo central correspondiente a cada una de sus partes es un ángulo de un grado (1°) sexagesimal.

Un **grado** tiene **60 minutos** (') y un **minuto** tiene **60 segundos** (").

2 Radián (rad): Es la medida de un **ángulo** cuyo **arco mide un radio**.

Razones trigonométricas

Seno

Seno del ángulo B: es la **razón entre el cateto opuesto al ángulo y la hipotenusa**.

$$\text{sen } B = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}} = \frac{b}{a}$$

Coseno

Coseno del ángulo B: es la **razón entre el cateto contiguo al ángulo y la hipotenusa**.

$$\text{cos } B = \frac{\text{cateto contiguo}}{\text{hipotenusa}} = \frac{c}{a}$$

Tangente

Tangente del ángulo B: es la **razón entre el cateto opuesto al ángulo y el cateto contiguo al ángulo**.

$$\operatorname{tg} B = \frac{\operatorname{sen} B}{\operatorname{cos} B} = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto contiguo}} = \frac{b}{c}$$

Cosecante

Cosecante del ángulo B: es la **razón inversa del seno de B**.

$$\operatorname{cosec} B = \frac{1}{\operatorname{sen} B} = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto opuesto}} = \frac{a}{b}$$

Secante

Secante del ángulo B: es la **razón inversa del coseno de B**.

$$\operatorname{sec} B = \frac{1}{\operatorname{cos} B} = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto contiguo}} = \frac{a}{c}$$

Cotangente

Cotangente del ángulo B: es la **razón inversa de la tangente de B**.

$$\operatorname{cotg} B = \frac{1}{\operatorname{tg} B} = \frac{\operatorname{cos} B}{\operatorname{sen} B} = \frac{\text{cateto contiguo}}{\text{cateto opuesto}} = \frac{c}{b}$$

Razones trigonométricas de cualquier ángulo

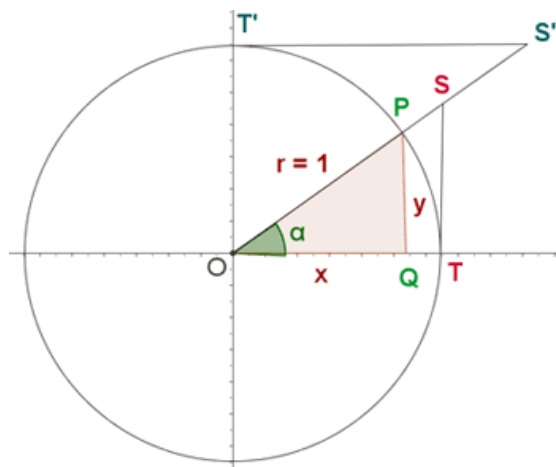
Se llama **circunferencia goniométrica** a aquella que tiene su **centro en el origen de coordenadas** y su **radio es la unidad**. En la circunferencia goniométrica **los ejes de coordenadas delimitan cuatro cuadrantes** que se numeran en sentido contrario a las agujas del reloj.

El seno es la ordenada.

El coseno es la abscisa.

$$-1 \leq \text{sen } \alpha \leq 1$$

$$-1 \leq \text{cos } \alpha \leq 1$$



$$\text{sen } \alpha = \frac{PQ}{OP} = \frac{PQ}{r} = \text{PQ}$$

$$\text{cosec } \alpha = \frac{OP}{PQ} = \frac{OS'}{OT'} = \frac{OS'}{r} = OS'$$

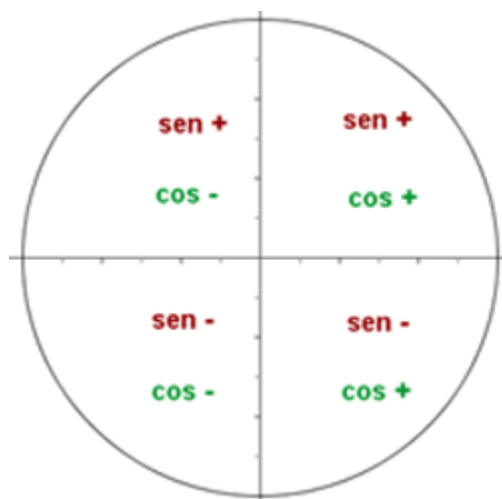
$$\text{cos } \alpha = \frac{OQ}{OP} = OQ$$

$$\text{sec } \alpha = \frac{OP}{OQ} = \frac{OS}{OT} = \frac{OS}{r} = OS$$

$$\text{tg } \alpha = \frac{PQ}{OQ} = \frac{ST}{OT} = \frac{ST}{r} = ST$$

$$\text{cotg } \alpha = \frac{OQ}{PQ} = \frac{S'T'}{OT'} = \frac{S'T'}{r} = S'T'$$

Signo de las razones trigonométricas



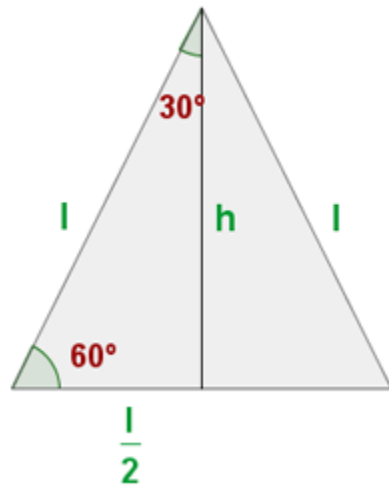
$\alpha :$	0°	90°	180°	270°
<i>sen</i>	0	1	0	-1
<i>cos</i>	1	0	-1	0
<i>tg</i>	0	$\rightarrow \infty$	0	$\rightarrow -\infty$

Razones trigonométricas de los ángulos de 30° y 60°

$$\text{sen } 30^\circ = \frac{\frac{1}{2}}{1} = \frac{1}{2} \quad \text{sen } 60^\circ = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{1} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{cos } 30^\circ = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{1} = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{cos } 60^\circ = \frac{\frac{1}{2}}{1} = \frac{1}{2}$$

$$\text{tg } 30^\circ = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \quad \text{tg } 60^\circ = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$$

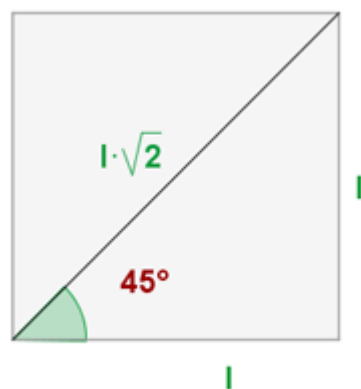


Razones trigonométricas del ángulo de 45°

$$\text{sen } 45^\circ = \frac{l}{l\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{cos } 45^\circ = \frac{l}{l\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{tg } 45^\circ = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = 1$$



Razones trigonométricas de ángulos notables

α :	0°	30°	45°	60°	90°	180°	270°
sen	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0
tg	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$\rightarrow \infty$	0	$\rightarrow -\infty$

Relaciones trigonométricas fundamentales

$$\text{sen}^2 \alpha + \text{cos}^2 \alpha = 1$$

$$\text{sec}^2 \alpha = 1 + \text{tg}^2 \alpha$$

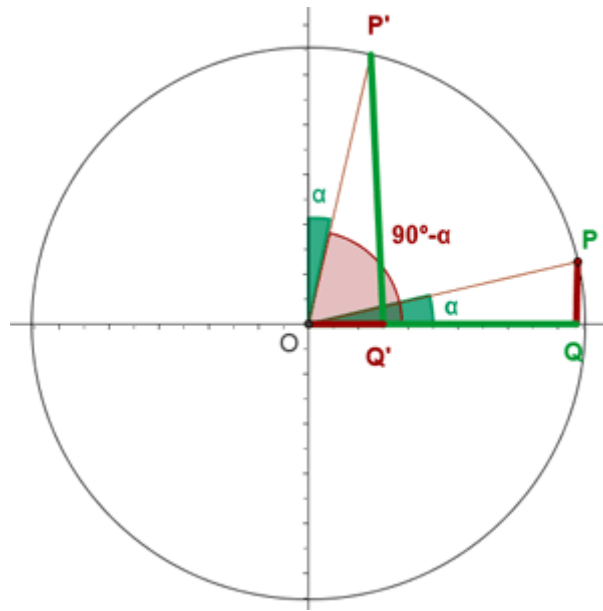
$$\text{cosec}^2 \alpha = 1 + \text{cotg}^2 \alpha$$

Ángulos complementarios

$$\text{sen} \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right) = \text{cos } \alpha$$

$$\text{cos} \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right) = \text{sen } \alpha$$

$$\text{tg} \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right) = \text{cotg } \alpha$$

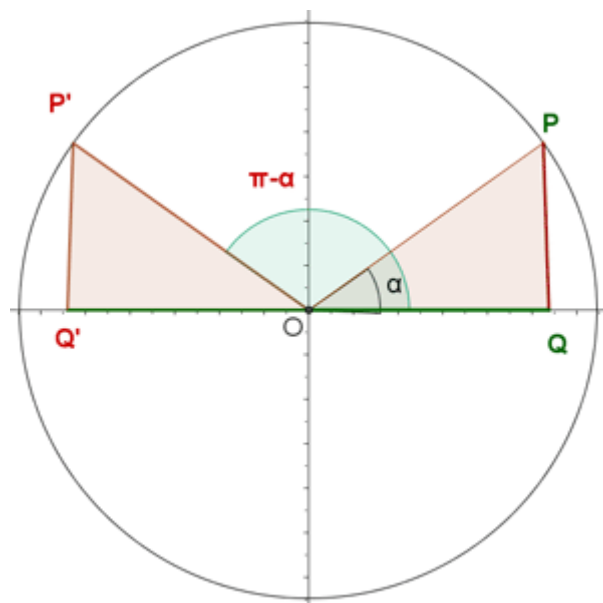


Ángulos suplementarios

$$\text{sen } (\pi - \alpha) = \text{sen } \alpha$$

$$\text{cos } (\pi - \alpha) = -\text{cos } \alpha$$

$$\text{tg } (\pi - \alpha) = -\text{tg } \alpha$$

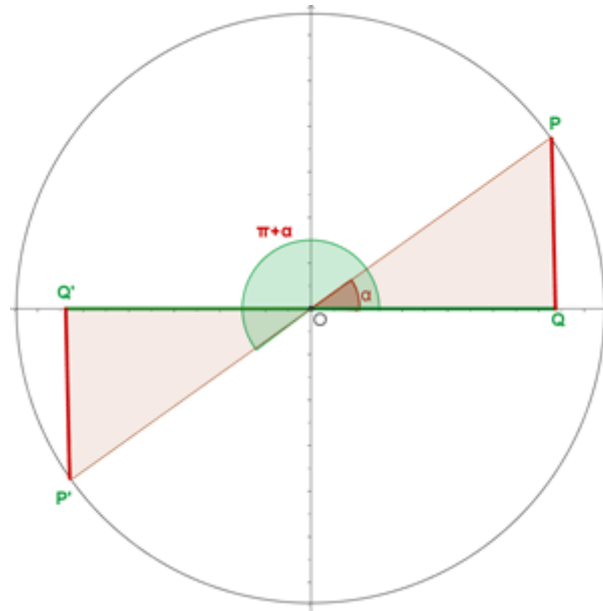


Ángulos que se diferencian en 180°

$$\operatorname{sen} (\pi + \alpha) = -\operatorname{sen} \alpha$$

$$\cos (\pi + \alpha) = -\cos \alpha$$

$$\operatorname{tg} (\pi + \alpha) = \operatorname{tg} \alpha$$

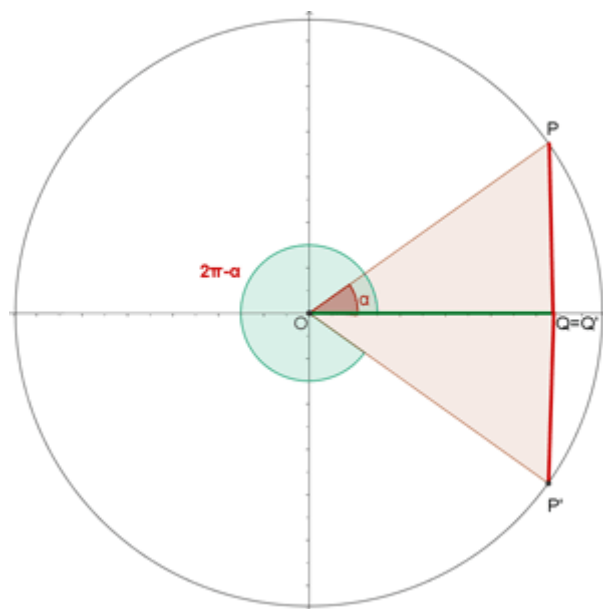


Ángulos opuestos

$$\operatorname{sen} (2\pi - \alpha) = -\operatorname{sen} \alpha$$

$$\cos (2\pi - \alpha) = \cos \alpha$$

$$\operatorname{tg} (2\pi - \alpha) = -\operatorname{tg} \alpha$$

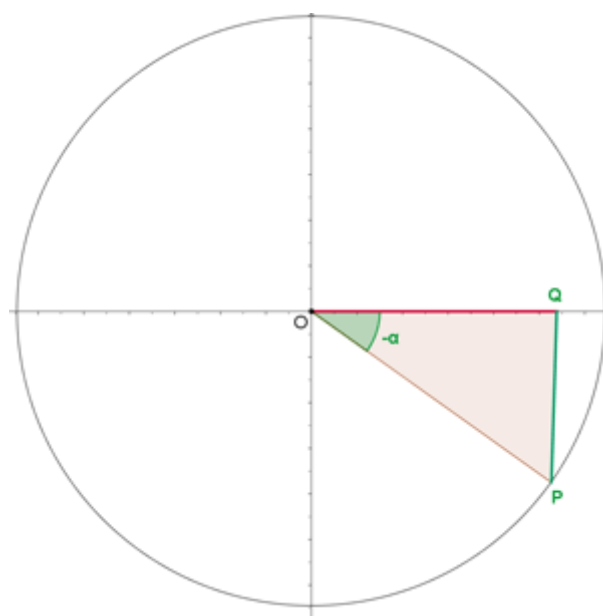


Ángulos negativos

$$\text{sen } (-\alpha) = -\text{sen } \alpha$$

$$\cos (-\alpha) = \cos \alpha$$

$$\text{tg } (-\alpha) = -\text{tg } \alpha$$

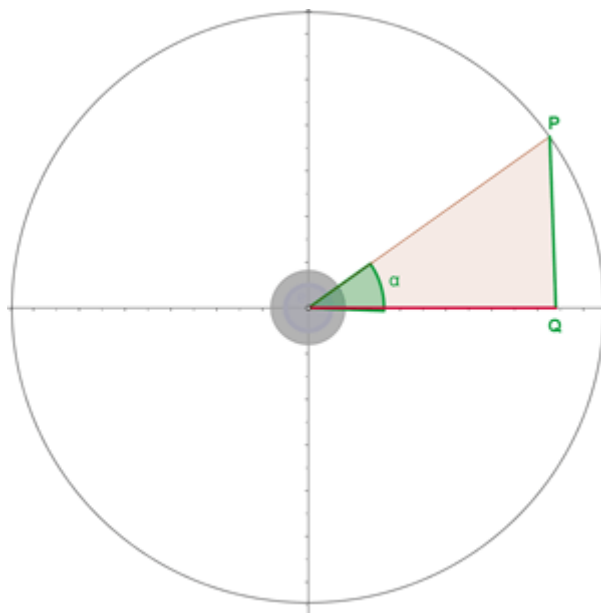


Mayores de 360°

$$\operatorname{sen} (\alpha + 2\pi k) = \operatorname{sen} \alpha$$

$$\cos (\alpha + 2\pi k) = \cos \alpha$$

$$\operatorname{tg} (\alpha + 2\pi k) = \operatorname{tg} \alpha$$

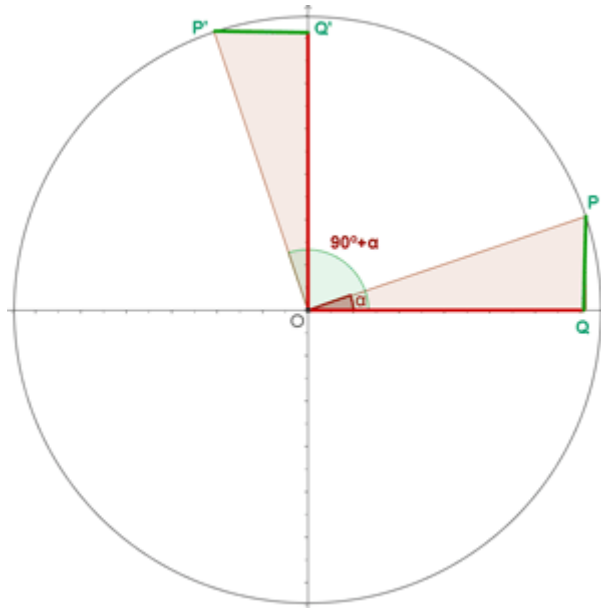


Ángulos que difieren en 90° ó $\pi/2$ rad

$$\operatorname{sen} \left(\frac{\pi}{2} + \alpha \right) = \cos \alpha$$

$$\cos \left(\frac{\pi}{2} + \alpha \right) = -\operatorname{sen} \alpha$$

$$\operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{2} + \alpha \right) = -\operatorname{cotg} \alpha$$

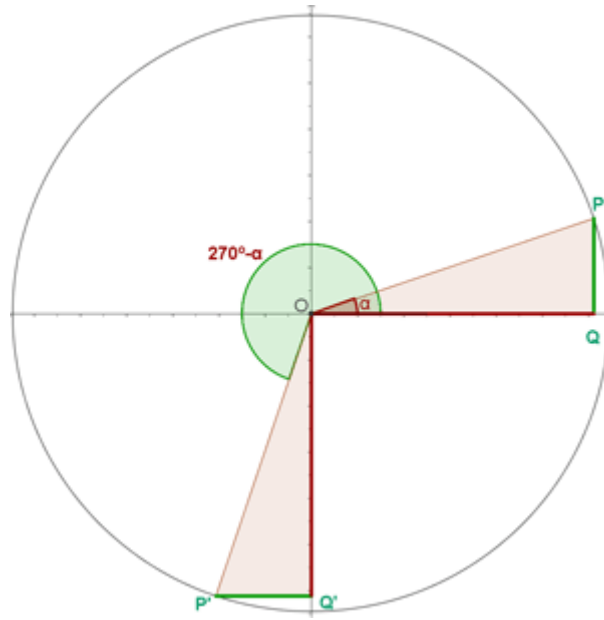


Ángulos que suman en 270° ó $3/2 \pi$ rad

$$\text{sen} \left(\frac{3\pi}{2} - \alpha \right) = -\cos \alpha$$

$$\cos \left(\frac{3\pi}{2} - \alpha \right) = -\text{sen} \alpha$$

$$\text{tg} \left(\frac{3\pi}{2} - \alpha \right) = \text{cotg} \alpha$$

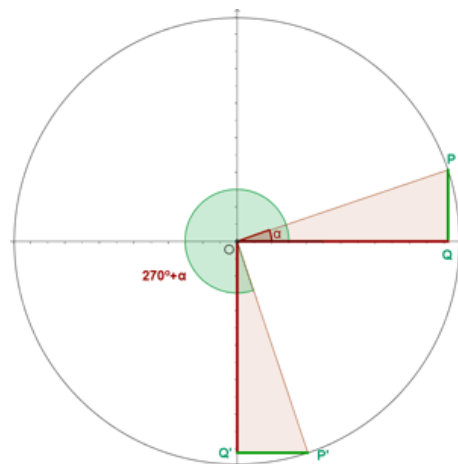


Ángulos que difieren en 270° ó $3/2 \pi$ rad

$$\operatorname{sen} \left(\frac{3\pi}{2} + \alpha \right) = -\cos \alpha$$

$$\cos \left(\frac{3\pi}{2} + \alpha \right) = \operatorname{sen} \alpha$$

$$\operatorname{tg} \left(\frac{3\pi}{2} + \alpha \right) = -\operatorname{cotg} \alpha$$



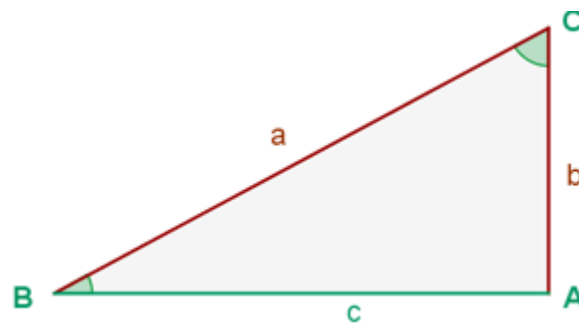
Resolución de triángulos rectángulos

1. Se conocen la hipotenusa y un cateto.

$$B : \operatorname{sen} B = \frac{b}{a} \quad B = \operatorname{arc} \operatorname{sen} \frac{b}{a}$$

$$C = 90^\circ - B$$

$$c : \begin{cases} \cos B = \frac{c}{a} & c = a \cdot \cos B \\ c = \sqrt{a^2 - b^2} \end{cases}$$

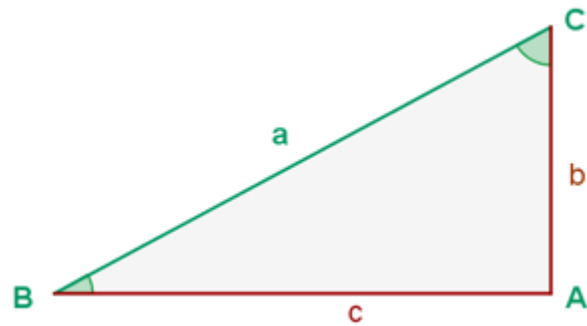


2. Se conocen los dos catetos

$$B : \operatorname{tg} B = \frac{b}{c} \quad B = \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{b}{c}$$

$$C = 90^\circ - B$$

$$a : \begin{cases} \operatorname{sen} B = \frac{b}{a} & a = \frac{b}{\operatorname{sen} B} \\ a = \sqrt{b^2 + c^2} \end{cases}$$

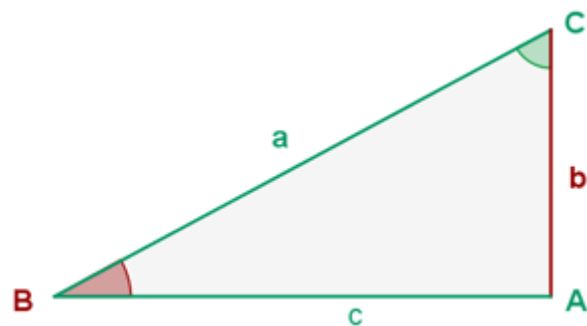


3. Se conocen la hipotenusa y un ángulo agudo.

$$C = 90^\circ - B$$

$$a: \operatorname{sen} B = \frac{b}{a} \quad a = \frac{b}{\operatorname{sen} B}$$

$$c: \begin{cases} \cotg B = \frac{c}{b} & c = b \cdot \cotg B \\ c = \sqrt{a^2 - b^2} \end{cases}$$

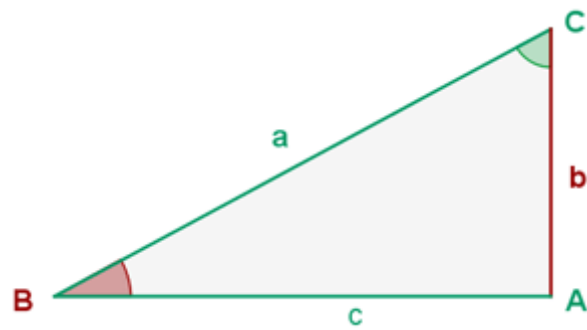


4. Se conocen un cateto y un ángulo agudo.

$$C = 90^\circ - B$$

$$a: \operatorname{sen} B = \frac{b}{a} \quad a = \frac{b}{\operatorname{sen} B}$$

$$c: \begin{cases} \cotg B = \frac{c}{b} & c = b \cdot \cotg B \\ c = \sqrt{a^2 - b^2} \end{cases}$$



Razones trigonométricas de la suma y diferencia de ángulos

$$\operatorname{sen}(a+b)=\operatorname{sen} a \cos b+\cos a \operatorname{sen} b$$

$$\operatorname{sen}(a-b)=\operatorname{sen} a \cos b-\cos a \operatorname{sen} b$$

$$\cos (a+b)=\cos a \cos b-\operatorname{sen} a \operatorname{sen} b$$

$$\cos (a-b)=\cos a \cos b+\operatorname{sen} a \operatorname{sen} b$$

$$\operatorname{tg}(a+b)=\frac{\operatorname{tg} a+\operatorname{tg} b}{1-\operatorname{tg} a \cdot \operatorname{tg} b}$$

$$\operatorname{tg}(a-b)=\frac{\operatorname{tg} a-\operatorname{tg} b}{1+\operatorname{tg} a \cdot \operatorname{tg} b}$$

Razones trigonométricas del ángulo doble

$$\operatorname{sen} 2a=2 \operatorname{sen} a \cos a$$

$$\cos 2a=\cos ^2 a-\operatorname{sen}^2 a$$

$$\operatorname{tg} 2a=\frac{2 \operatorname{tg} a}{1-\operatorname{tg}^2 a}$$

Razones trigonométricas del ángulo mitad

$$\operatorname{sen} \frac{A}{2}=\pm \sqrt{\frac{1-\cos A}{2}}$$

$$\cos \frac{A}{2}=\pm \sqrt{\frac{1+\cos A}{2}}$$

$$\operatorname{tg} \frac{A}{2}=\pm \sqrt{\frac{1-\cos A}{1+\cos A}}$$

Transformaciones de sumas en productos

$$\operatorname{sen} A + \operatorname{sen} B = 2 \operatorname{sen} \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2}$$

$$\operatorname{sen} A - \operatorname{sen} B = 2 \cos \frac{A+B}{2} \operatorname{sen} \frac{A-B}{2}$$

$$\cos A + \cos B = 2 \cos \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2}$$

$$\cos A - \cos B = -2 \operatorname{sen} \frac{A+B}{2} \operatorname{sen} \frac{A-B}{2}$$

Transformaciones de productos en sumas

$$\operatorname{sen} A \cdot \cos B = \frac{1}{2} [\operatorname{sen}(A+B) + \operatorname{sen}(A-B)]$$

$$\cos A \cdot \operatorname{sen} B = \frac{1}{2} [\operatorname{sen}(A+B) - \operatorname{sen}(A-B)]$$

$$\cos A \cdot \cos B = \frac{1}{2} [\cos(A+B) + \cos(A-B)]$$

$$\operatorname{sen} A \cdot \operatorname{sen} B = -\frac{1}{2} [\cos(A+B) - \cos(A-B)]$$

Teorema de los senos

Cada lado de un triángulo es directamente proporcional al seno del ángulo opuesto.

$$\frac{a}{\operatorname{sen} a} = \frac{b}{\operatorname{sen} b} = \frac{c}{\operatorname{sen} c} = 2R$$

Teorema del coseno

En un triángulo el cuadrado de cada lado es igual a la suma de los cuadrados de los otros dos menos el doble producto del producto de ambos por el coseno del ángulo que forman.

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

Teorema de las tangentes

$$\frac{a+b}{a-b} = \frac{\operatorname{tg} \frac{A+B}{2}}{\operatorname{tg} \frac{A-B}{2}}$$

Área de un triángulo

El área de un triángulo es la mitad del producto de una base por la altura correspondiente.

$$S = \frac{1}{2} b \cdot h$$

El área de un triángulo es el semiproducto de dos de sus lados por el seno del ángulo que forman.

$$S = \frac{1}{2} b \cdot a \cdot \operatorname{sen} C$$

El área de un triángulo es el cociente entre el producto de sus lados y cuatro veces el radio de su circunferencia circunscrita.

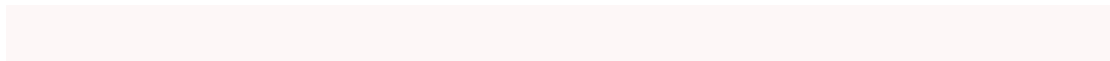
$$S = \frac{a \cdot b \cdot c}{4R}$$

El área de un triángulo es igual al producto del radio de la circunferencia inscrita por su semiperímetro.

$$S = r \cdot p$$

Fórmula de Herón:

$$S = \sqrt{p \cdot (p - a) \cdot (p - b) \cdot (p - c)}$$



Sabiendo que $\sin \alpha = 3/5$, y que $90^\circ < \alpha < 180^\circ$. Calcular las restantes razones trigonométricas del ángulo α .

$$\sin \alpha = \frac{3}{5}$$

$$\operatorname{cosec} \alpha = \frac{5}{3}$$

$$\cos \alpha = -\sqrt{1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2} = -\frac{4}{5}$$

$$\sec \alpha = -\frac{5}{4}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = -\frac{\frac{3}{5}}{\frac{4}{5}} = -\frac{3}{4}$$

$$\operatorname{cotg} \alpha = -\frac{4}{3}$$

Sabiendo que $\operatorname{tg} \alpha = 2$, y que $180^\circ < \alpha < 270^\circ$. Calcular las restantes razones trigonométricas del ángulo α .

$$\cos \alpha = -\frac{1}{\sqrt{5}} = -\frac{\sqrt{5}}{5}$$

$$\sec \alpha = -\sqrt{1+4} = -\sqrt{5}$$

$$\sin \alpha = 2 \cdot \left(-\frac{\sqrt{5}}{5}\right) = -\frac{2\sqrt{5}}{5}$$

$$\operatorname{cosec} \alpha = -\frac{\sqrt{5}}{2}$$

Comprobar las **identidades trigonométricas**:

$$1 \quad \operatorname{tg} \alpha + \operatorname{cotg} \alpha = \sec \alpha \cdot \operatorname{cosec} \alpha$$

$$\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{cotg} \alpha = \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha} + \frac{\cos \alpha}{\operatorname{sen} \alpha} = \frac{\operatorname{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha}{\cos \alpha \cdot \operatorname{sen} \alpha} =$$

$$= \frac{1}{\cos \alpha \cdot \operatorname{sen} \alpha} = \sec \alpha \cdot \operatorname{cosec} \alpha$$

$$2 \quad \operatorname{cotg}^2 a = \cos^2 a + (\operatorname{cotg} a \cdot \cos a)^2$$

$$\cos^2 a + (\operatorname{cotg} a \cdot \cos a)^2 = \cos^2 a + \operatorname{cotg}^2 a \cdot \cos^2 a =$$

$$\cos^2 a (1 + \operatorname{cotg}^2 a) = \cos^2 a \cdot \operatorname{cosec}^2 a = \frac{\cos^2 a}{\operatorname{sen}^2 a} = \operatorname{cotg}^2 a$$

$$3 \quad \frac{1}{\sec^2 a} = \operatorname{sen}^2 a \cdot \cos^2 a + \cos^4 a$$

$$\operatorname{sen}^2 a \cdot \cos^2 a + \cos^4 a = \cos^2 a (\operatorname{sen}^2 a + \cos^2 a) = \cos^2 a = \frac{1}{\sec^2 a}$$

$$4 \quad \operatorname{cotg} a \cdot \sec a = \operatorname{cosec} a$$

$$\operatorname{cotg} a \cdot \sec a = \frac{\cos a}{\operatorname{sen} a} \cdot \frac{1}{\cos a} = \frac{1}{\operatorname{sen} a} = \operatorname{cosec} a$$

$$\text{5} \quad \sec^2 a + \operatorname{cosec}^2 a = \frac{1}{\operatorname{sen}^2 a \cdot \cos^2 a}$$

$$\sec^2 a + \operatorname{cosec}^2 a = \frac{1}{\cos^2 a} + \frac{1}{\operatorname{sen}^2 a} = \frac{\operatorname{sen}^2 a + \cos^2 a}{\operatorname{sen}^2 a \cdot \cos^2 a} = \frac{1}{\operatorname{sen}^2 a \cdot \cos^2 a}$$

$$\text{6} \quad \operatorname{sen} b \cdot \cos(a - b) + \cos b \cdot \operatorname{sen}(a - b) = \operatorname{sen} a$$

$$\operatorname{sen}[b + (a - b)] = \operatorname{sen} a$$

$$\text{7} \quad \cotg(a + b) = \frac{\cotg a \cdot \cotg b - 1}{\cotg a + \cotg b}$$

$$\cotg(a + b) = \frac{1}{\operatorname{tg}(a + b)} = \frac{1}{\frac{\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b}{1 - \operatorname{tg} a \cdot \operatorname{tg} b}} = \frac{1 - \operatorname{tg} a \cdot \operatorname{tg} b}{\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b} =$$

$$= \frac{\frac{1}{\operatorname{tg} a \cdot \operatorname{tg} b} - \frac{\operatorname{tg} a \cdot \operatorname{tg} b}{\operatorname{tg} a \cdot \operatorname{tg} b}}{\frac{\operatorname{tg} a}{\operatorname{tg} a \cdot \operatorname{tg} b} + \frac{\operatorname{tg} b}{\operatorname{tg} a \cdot \operatorname{tg} b}} = \frac{\cotg a \cdot \cotg b - 1}{\cotg a + \cotg b}$$

Ejercicios resueltos de ecuaciones trigonométricas

1

$$\operatorname{sen} x = 0$$

$$\operatorname{arcsen}(\operatorname{sen} x) = \operatorname{arcsen} 0 \quad f \circ f^{-1} = x$$

$$x = \operatorname{arcsen} 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0^\circ + 360^\circ k & x_1 = 0^\circ, 360^\circ, 720^\circ, \dots \\ x_2 = 180^\circ + 360^\circ k & x_2 = 180^\circ, 540^\circ, 900^\circ, \dots \end{cases}$$

$$x = 0^\circ + 180^\circ k$$

2

$$\cos x = 0$$

$$\operatorname{arccos}(\cos x) = \operatorname{arccos} 0 \quad f \circ f^{-1} = x$$

$$x = \operatorname{arccos} 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 90^\circ + 360^\circ k & x_1 = 90^\circ, 450^\circ, 810^\circ, \dots \\ x_2 = 270^\circ + 360^\circ k & x_2 = 270^\circ, 630^\circ, 990^\circ, \dots \end{cases}$$

$$x = 90^\circ + 180^\circ k$$

3

$$\operatorname{tg} x = 0$$

$$\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x) = \operatorname{arctg} 0 \quad f \circ f^{-1} = x$$

$$x = \arctg 0$$

$$x = 0^\circ + 180^\circ k$$

4

$$\text{sen } x = 1$$

$$\arcsen(\text{sen } x) = \arcsen 1$$

$$f \circ f^{-1} = x$$

$$x = \arcsen 1$$

$$x = 90^\circ + 360^\circ k$$

5

$$\cos x = 1$$

$$\arccos(\cos x) = \arccos 1$$

$$f \circ f^{-1} = x$$

$$x = \arccos 1$$

$$x = 0^\circ + 360^\circ k$$

6

$$\text{tg } x = 1$$

$$\arctg(\text{tg } x) = \arctg 1$$

$$f \circ f^{-1} = x$$

$$x = \arctg 1$$

$$x = 45^\circ + 180^\circ k$$

7

$$\text{sen } x = -1$$

$$\arcsen(\sen x) = \arcsen(-1)$$

$$f \circ f^{-1} = x$$

$$x = \arcsen(-1)$$

$$x = 270^\circ + 360^\circ k$$

8

$$\cos x = -1$$

$$\arccos(\cos x) = \arccos(-1)$$

$$f \circ f^{-1} = x$$

$$x = \arccos(-1)$$

$$x = 180^\circ + 360^\circ k$$

9

$$tg x = -1$$

$$\arctg(tg x) = \arctg(-1)$$

$$f \circ f^{-1} = x$$

$$x = \arctg(-1)$$

$$x = 135^\circ + 180^\circ k$$

10

$$\sen x = \frac{1}{2}$$

$$\arcsen(\sen x) = \arcsen\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$f \circ f^{-1} = x$$

$$x = \arcsen\left(\frac{1}{2}\right) \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 30^\circ + 360^\circ k \\ x_2 = 150^\circ + 360^\circ k \end{cases}$$

11

$$\text{sen } x = -\frac{1}{2}$$

$$\arcsen(\text{sen } x) = \arcsen\left(-\frac{1}{2}\right) \quad f \circ f^{-1} = x$$

$$x = \arcsen\left(-\frac{1}{2}\right) \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 210^\circ + 360^\circ k \\ x_2 = 330^\circ + 360^\circ k \end{cases}$$

12

$$\cos x = \frac{1}{2}$$

$$\arccos(\cos x) = \arccos\left(\frac{1}{2}\right) \quad f \circ f^{-1} = x$$

$$x = \arccos\left(\frac{1}{2}\right) \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 60^\circ + 360^\circ k \\ x_2 = 300^\circ + 360^\circ k \end{cases}$$

13

$$\cos x = -\frac{1}{2}$$

$$\arccos(\cos x) = \arccos\left(-\frac{1}{2}\right) \quad f \circ f^{-1} = x$$

$$x = \arccos\left(-\frac{1}{2}\right) \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 120^\circ + 360^\circ k \\ x_2 = 240^\circ + 360^\circ k \end{cases}$$

Ejercicios resueltos de ecuaciones trigonométricas

2

$$\operatorname{sen}\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} \rightarrow \begin{cases} \operatorname{sen} 60^\circ \\ \operatorname{sen} 120^\circ \end{cases}$$

$$x + 45^\circ = 60^\circ \quad x_1 = 15^\circ + 360^\circ k$$

$$x + 45^\circ = 120^\circ \quad x_2 = 75^\circ + 360^\circ k$$

Ejercicios resueltos de ecuaciones trigonométricas

3

$$2\operatorname{tg} x - 3\operatorname{cotg} x - 1 = 0$$

$$2\operatorname{tg} x - \frac{3}{\operatorname{tg} x} - 1 = 0 \quad 2\operatorname{tg}^2 x - \operatorname{tg} x - 3 = 0$$

$$\operatorname{tg} x = \frac{1 \pm \sqrt{1+24}}{4} = \frac{1 \pm 5}{4}$$

$$\operatorname{tg} x = \frac{3}{2} \quad x = 56^{\circ}18'35'' + 180^{\circ}k$$

$$\operatorname{tg} x = -1 \quad x = 135^{\circ} + 180^{\circ}k$$

Ejercicios resueltos de ecuaciones trigonométricas

4

$$3\operatorname{sen}^2 x - 5\operatorname{sen} x + 2 = 0$$

$$\operatorname{sen} x = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 24}}{6} = \frac{5 \pm 1}{6}$$

$$\operatorname{sen} x = 1 \quad x = 90^{\circ} + 360^{\circ}k$$

$$\operatorname{sen} x = \frac{2}{3} \quad x = \begin{cases} 41^{\circ}48'37'' + 360^{\circ}k \\ 138^{\circ}11'23'' + 360^{\circ}k \end{cases}$$

Ejercicios resueltos de ecuaciones trigonométricas

5

$$\cos^2 x - 3\operatorname{sen}^2 x = 0$$

$$1 - \operatorname{sen}^2 x - 3\operatorname{sen}^2 x = 0 \quad 1 - 4\operatorname{sen}^2 x = 0$$

$$\operatorname{sen}^2 x = \frac{1}{4} \quad \operatorname{sen} x = \pm \frac{1}{2}$$

$$x = \operatorname{arcsen} \frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 30^{\circ} + 360^{\circ}k \\ x_2 = 150^{\circ} + 360^{\circ}k \end{cases}$$

$$x = \operatorname{arcsen} \left(-\frac{1}{2} \right) \Rightarrow \begin{cases} x_3 = 210^{\circ} + 360^{\circ}k \\ x_4 = 330^{\circ} + 360^{\circ}k \end{cases}$$

Ejercicios resueltos de ecuaciones trigonométricas

6

$$\cos 2x = 1 + 4\operatorname{sen} x$$

$$\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x = 1 + 4\operatorname{sen} x$$

$$1 - \operatorname{sen}^2 x - \operatorname{sen}^2 x = 1 + 4\operatorname{sen} x$$

$$2\operatorname{sen}^2 x + 4\operatorname{sen} x = 0$$

$$2\operatorname{sen} x (\operatorname{sen} x + 2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \operatorname{sen} x = 0 \\ \operatorname{sen} x + 2 = 0 \end{cases}$$

$$x = \arcsen 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0^\circ + 360^\circ k \\ x_2 = 180^\circ + 360^\circ k \end{cases} \quad x = 0^\circ + 180^\circ k$$

$$x = \arcsen(-2) \quad \text{Sin solución}$$

Ejercicios resueltos de ecuaciones trigonométricas

7

$$\operatorname{sen}(2x + 60^\circ) + \operatorname{sen}(x + 30^\circ) = 0$$

$$2\operatorname{sen}\left(\frac{3x}{2} + 45^\circ\right)\cos\left(\frac{x}{2} + 15^\circ\right) = 0$$

$$\operatorname{sen}\left(\frac{3x}{2} + 45^\circ\right) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \frac{3x}{2} + 45^\circ = 0^\circ + 360^\circ k & x = -30^\circ + 120^\circ k \\ \frac{3x}{2} + 45^\circ = 180^\circ + 360^\circ k & x = -30^\circ + 120^\circ k \end{cases}$$

$$\cos\left(\frac{x}{2} + 15^\circ\right) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \frac{x}{2} + 15^\circ = 90^\circ + 360^\circ k & x = 150^\circ + 360^\circ \\ \frac{x}{2} + 15^\circ = 270^\circ + 360^\circ k & x = 510^\circ + 360^\circ k \\ & x = 150^\circ + 360^\circ k \end{cases}$$

Ejercicios resueltos de ecuaciones trigonométricas

8

$$\operatorname{sen}^2 x - \cos^2 x = \frac{1}{2}$$

$$\operatorname{sen}^2 x - \cos^2 x = \frac{1}{2} \qquad \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x = -\frac{1}{2} \qquad \cos 2x = -\frac{1}{2}$$

$$2x = \begin{cases} 120^\circ + 360^\circ k \\ 240^\circ + 360^\circ k \end{cases} \Rightarrow x = \begin{cases} 60^\circ + 180^\circ k \\ 120^\circ + 180^\circ k \end{cases}$$

Ejercicios resueltos de ecuaciones trigonométricas

9

$$\cos 8x + \cos 6x = 2 \cos 210^\circ \cdot \cos x$$

$$2 \cos 7x \cdot \cos x = 2 \cos 210^\circ \cdot \cos x$$

$$\cos x (\cos 7x - \cos 210^\circ) = 0$$

$$\cos x = 0 \quad x = \begin{cases} x = 90^\circ + 360^\circ k \\ x = 270^\circ + 360^\circ k \end{cases} \quad x = 90^\circ + 180^\circ k$$

$$\cos 7x - \cos 210^\circ = 0 \qquad 7x = 210^\circ \quad x = 30^\circ$$

Ejercicios resueltos de ecuaciones trigonométricas

10

$$\operatorname{tg} 2x = -\operatorname{tg} x$$

$$\frac{2\operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x} = -\operatorname{tg} x$$

$$\operatorname{tg} x (\operatorname{tg}^2 x - 3) = 0$$

$$\operatorname{tg} x = 0 \quad x = 0^\circ + 180^\circ k$$

$$\operatorname{tg} x = \pm\sqrt{3} \quad \begin{cases} x = 60^\circ + 180^\circ k \\ x = 120^\circ + 180^\circ k \end{cases}$$

Ejercicios resueltos de ecuaciones trigonométricas

11

$$\operatorname{sen} x + \sqrt{3} \cos x = 2$$

$$\operatorname{sen} x + \sqrt{3} \cos x = 2 \quad \frac{1}{2} \operatorname{sen} x + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos x = 1$$

$$\operatorname{sen}(x + 60^\circ) = 1 \quad x + 60^\circ = 90^\circ + 360^\circ k$$

$$x = 30^\circ + 360^\circ k$$

Ejercicios resueltos de ecuaciones trigonométricas

12

$$\operatorname{sen} 2x = \cos 60^\circ$$

$$\operatorname{sen} 2x = \cos 60^\circ \quad \operatorname{sen} 2x = \frac{1}{2}$$

$$\begin{cases} 2x = 30^\circ + 360^\circ k & x = 15^\circ + 180^\circ k \\ 2x = 150^\circ + 360^\circ k & x = 75^\circ + 180^\circ k \end{cases}$$

Ejercicios resueltos de ecuaciones trigonométricas

13

$$4\operatorname{sen}(x - 30^\circ)\cos(x - 30^\circ) = \sqrt{3}$$

$$2[2\operatorname{sen}(x - 30^\circ)\cos(x - 30^\circ)] = \sqrt{3}$$

$$\operatorname{sen} 2(x - 30^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$2(x - 30^\circ) = 60^\circ + 360^\circ k \quad x = 60^\circ + 180^\circ k$$

$$2(x - 30^\circ) = 120^\circ + 360^\circ k \quad x = 90^\circ + 180^\circ k$$

Ejercicios resueltos de ecuaciones trigonométricas

14

$$2\cos x = 3\operatorname{tg} x$$

$$2\cos x = \frac{3\operatorname{sen} x}{\cos x} \quad 2\cos^2 x = 3\operatorname{sen} x$$

$$2(1 - \operatorname{sen}^2 x) = 3\operatorname{sen} x \quad 2 - 2\operatorname{sen}^2 x = 3\operatorname{sen} x$$

$$2\operatorname{sen}^2 x + 3\operatorname{sen} x - 2 = 0$$

$$\operatorname{sen} x = \frac{-3 \pm \sqrt{9 + 16}}{4} = \frac{-3 \pm 5}{4}$$

$$\operatorname{sen} x = \frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 30^\circ + 360^\circ k \\ x_2 = 150^\circ + 360^\circ k \end{cases}$$

$\text{sen } x = -2$ Sin solución porque $-1 \leq \text{sen } x \leq 1$

Ejercicios resueltos de ecuaciones trigonométricas

15

$$\text{sen } 2x \cdot \cos x = 6 \text{sen}^3 x$$

$$2 \text{sen } x \cdot \cos x \cdot \cos x = 6 \text{sen}^3 x$$

$$\text{sen } x (\cos^2 x - 3 \text{sen}^2 x) = 0$$

$$\text{sen } x = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0^\circ + 360^\circ k \\ x = 180^\circ + 360^\circ k \end{cases} \Rightarrow x = 0^\circ + 180^\circ k$$

$$\cos^2 x - 3 \text{sen}^2 x = 0 \qquad \cos^2 x = 3 \text{sen}^2 x$$

$$\text{tg}^2 x = \frac{1}{3} \qquad \text{tg } x = \pm \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\text{tg } x = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow x = 30^\circ + 180^\circ k$$

$$\text{tg } x = -\frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow x = 150^\circ + 180^\circ k$$

Ejercicios resueltos de ecuaciones trigonométricas

16

$$4 \text{sen } \frac{x}{2} + 2 \cos x = 3$$

$$4 \text{sen } \frac{x}{2} + 2 \left(\cos^2 \frac{x}{2} - \text{sen}^2 \frac{x}{2} \right) = 3$$

$$4\operatorname{sen}\frac{x}{2} + 2\cos^2\frac{x}{2} - 2\operatorname{sen}^2\frac{x}{2} = 3$$

$$4\operatorname{sen}\frac{x}{2} + 2\left(1 - \operatorname{sen}^2\frac{x}{2}\right) - 2\operatorname{sen}^2\frac{x}{2} = 3$$

$$4\operatorname{sen}^2\frac{x}{2} - 4\operatorname{sen}\frac{x}{2} + 1 = 0$$

$$\left(2\operatorname{sen}\frac{x}{2} - 1\right)^2 = 0 \qquad 2\operatorname{sen}\frac{x}{2} - 1 = 0$$

$$\operatorname{sen}\frac{x}{2} = \frac{1}{2} \quad \begin{cases} \frac{x}{2} = 30^\circ + 360^\circ k & x = 60^\circ + 360^\circ k \\ \frac{x}{2} = 150^\circ + 360^\circ k & x = 300^\circ + 360^\circ k \end{cases}$$