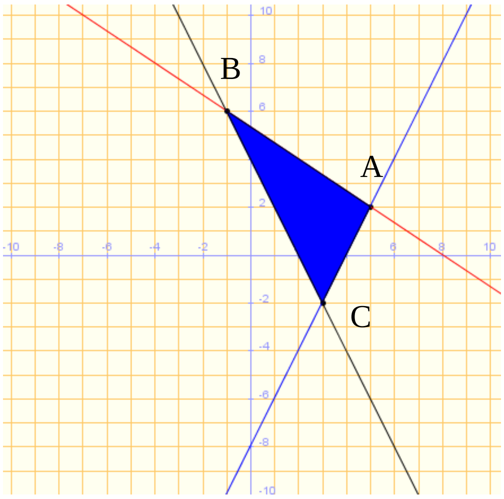
## GEOMETRÍA

**1. Dado el triángulo de vértices A(5,2) , B(-1,6) y C(3,-2) , hallar las ecuaciones de las rectas mediana y mediatriz correspondientes al lado AB.**




Para calcular la mediana (recta que une el vértice opuesto al lado AB (vértice C) con el punto medio del lado AB)

**1)** Calculamos el punto medio del lado AB

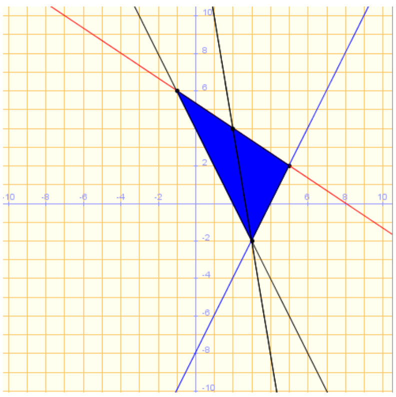
$$PM_{AB} = \left( \frac{5-1}{2}, \frac{2+6}{2} \right) = (2,4)$$

**2)** Calculamos la pendiente de la mediana, a partir de dos puntos

$$\left. \begin{array}{l} PM_{AB} = (2,4) \\ C = (3,-2) \end{array} \right\} \rightarrow m_{PM_{AB},C} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{4-(-2)}{2-3} = \frac{6}{-1} = -6$$

**3)** Calculamos la ecuación de la mediana que pasa por (3,-2) y tiene como pendiente m= - 6

$$y = -2 - 6 \cdot (x-3)$$
$$y = -2 - 6x + 18$$
$$y = -6x + 16$$



Para calcular la mediatriz (recta perpendicular al lado AB (vértice C) que pasa por el punto medio del lado AB)

**1)** Calculamos el punto medio del lado AB

$$PM_{AB} = \left(\frac{5-1}{2}, \frac{2+6}{2}\right) = (2,4)$$

**2)** Calculamos la pendiente del lado AB

$$\left.\begin{array}{l} A = (5,2) \\ B = (-1,6) \end{array}\right\} \rightarrow m_{A,B} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2-6}{5-(-1)} = \frac{-4}{6} = -\frac{2}{3}$$

**3)** Calculamos la pendiente de la mediatriz

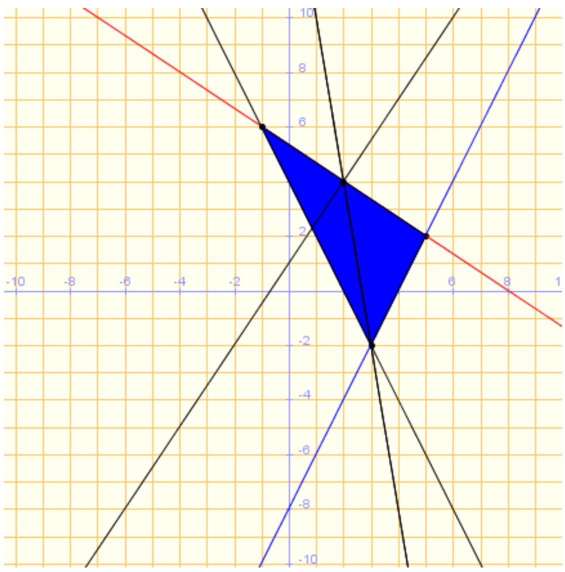
$$m_{mediatriz} = \frac{-1}{m_{A,B}} = \frac{-1}{\frac{-2}{3}} = \frac{3}{2}$$

**4)** Calculamos la ecuación de la mediatriz que pasa por (2,4) y tiene como pendiente m= 3/2

$$y = 4 + \frac{3}{2} \cdot (x-2)$$

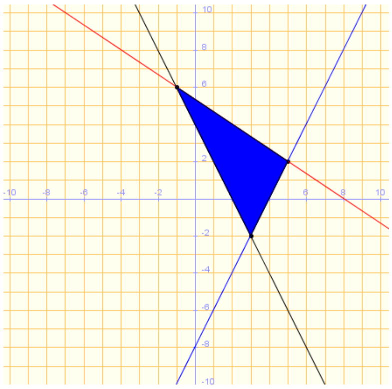
$$y = 4 + \frac{3}{2}x - 3$$

$$y = \frac{3}{2}x + 1$$



51347

**2. Halla el área del triángulo de vértices A(5,2) , B(-1,6) y C(3,-2).**



**Con WIRIS**

T=triangulo(punto(5,2),punto(−1,6),punto(3,−2)) → (5,2)−(−1,6)−(3,−2)
área(T) → 16

**Área = 16**

**3. Una recta pasa por el punto P(-5,2) y forma un ángulo de 45º con la recta 5x-6y+1=0 . Halla la ecuación de dicha recta**

Sea s: y = mx + n la recta pedida. Como la recta pasa por el punto (-5,2), entonces 2 = -5m + n. Utilizando la fórmula del Ángulo comprendido entre dos rectas tenemos que:

$$\tan(s,r) = \frac{m_s - m_r}{1 + m_s \cdot m_r}$$

Dada la recta **5x-6y+1=0 → $m_r$ =5/6**

$$\tan 45^\circ = \frac{m_s - 5/6}{1 + 5/6 \cdot m_s}$$

$$1 = \frac{m_s - 5/6}{1 + 5/6 \cdot m_s}$$

$$1 \cdot (1 + 5/6 \cdot m_s) = m_r - 5/6$$

$$1 + 5/6 \cdot m_s = m_s - 5/6$$

$$5/6 \cdot m_s - m_s = -5/6 - 1$$

$$-1/6 m_s = -11/6$$

$$m_s = 11$$

**Entonces como** 2 = -5m + n → 2 = -5*11 + n → 2 = -55 +n → n=57

**Ecuación de la recta que pasa por punto P(-5,2) y forma un ángulo de 45º con la recta 5x-6y+1=0 es**

$$y = 11x + 57$$

**4. Dados los puntos $A(2, -1)$, $B(-3, 4)$ y $C(0, -8)$:**

**a) Halla el punto medio del segmento de extremos $A$ y $B$.**
**b) Halla el simétrico de $B$ con respecto a $C$.**

***Solución:***

a) El punto medio es:

$$M=\left(\frac{2+(-3)}{2},\ \frac{-1+4}{2}\right)=\left(-\frac{1}{2},\ \frac{3}{2}\right)$$

b) Llamamos $B'(x, y)$ al simétrico de $B$ con respecto a $C$. Si $B'$ es simétrico de $B$ respecto de $C$, tiene que cumplirse que:

$$\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{CB'}$$

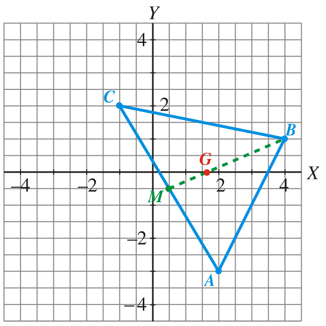
$$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{BC}=(3,-12)\\ \overrightarrow{CB'}=(x-0,y+8)\end{array}\right\}\ \text{Entonces: }\left\{\begin{array}{l}x=3\\ y+8=-12\end{array}\right\}\ \begin{array}{l}x=3\\ y=-20\end{array}$$

Por tanto:

$$B'(3,\ -20)$$

***5.* Halla las coordenadas del baricentro del triángulo de vértices $A(2, -3)$, $B(4, 1)$ y $C(-1, 2)$.**

***Solución:***




Llamamos $G(x, y)$ al baricentro y $M(a, b)$ al punto medio del lado $AC$. Sabemos que:

$$2\overrightarrow{GM}=\overrightarrow{BG}$$

Hallamos $M$:

$$M=\left(\frac{2+(-1)}{2},\frac{-3+2}{2}\right)=\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)$$

Entonces:

$$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{GM}=\left(\frac{1}{2}-x\,,-\frac{1}{2}-y\right)\\ \overrightarrow{BG}=(x-4,y-1)\end{array}\right\}\ \begin{array}{l}2\left(\frac{1}{2}-x,\ \frac{-1}{2}-y\right)=(x-4\,,\ y-1)\\ (1-2x,\ -1-2y)=(x-4,\ y-1)\end{array}$$

$$1-2x=x-4 \quad \to \quad 5=3x \quad \to \quad x=\frac{5}{3}$$

$$-1-2y=y-1 \quad \to \quad 0=3y \quad \to \quad y=0$$

El baricentro es:

$$G\left(\frac{5}{3},0\right)$$

**6. Escribe las ecuaciones paramétricas de la recta que pasa por el punto *P*(3, −1) y es paralela a la recta:**

$$s:\begin{cases} x=2-3t \\ y=4+t \end{cases}$$

***Solución:***

Vector posición: $\overrightarrow{OP}\ (3,-1)$

Vector dirección: $(-3,1)$

Ecuaciones paramétricas:

$$\begin{cases} \quad =3- \quad t \\ y=-1+ \end{cases}$$

**7. Dadas las rectas:**

$$r:\begin{cases} x=1+t \\ y=-2-2t \end{cases} \qquad s:\begin{cases} x=-1-3t \\ y=2+6t \end{cases}$$

**averigua su posición relativa. Si se cortan, di cuál es el punto de corte:**

***Solución:***

Cambiamos el parámetro en la recta $s$:

$$r:\begin{cases} x=1+t \\ y=-2-2t \end{cases} \qquad s:\begin{cases} x=-1-3k \\ y=2+6k \end{cases}$$

Igualamos:

$$\left.\begin{aligned} 1+ \quad &=-1-3k \\ -2-2 \quad &=2+6k \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} &t=-2- \\ &-2-2(-2-3k)=2+6k \quad \to \quad -2+4+6k=2+6k \quad \to \quad 0=0k \end{aligned}$$

Infinitas soluciones $\to$ Se trata de la misma recta; $r$ y $s$ coinciden.

**8. Dadas las rectas *r* y *s*, determina el ángulo que forman:**

$$r:\begin{cases} x=-2+2t \\ y=4+4t \end{cases} \qquad s:\begin{cases} x=-4+2t \\ y=5-t \end{cases}$$

***Solución:***

Vector dirección de $r \rightarrow (2,\ 4)$
Vector dirección de $s \rightarrow (2,\ -1)$

Llamamos $\alpha$ al ángulo que forman $r$ y $s$:

$$cos\,\alpha = \frac{|(2,\ 4)\cdot(2,\ -1)|}{\sqrt{4+16}\cdot\sqrt{4+1}} = \frac{|4-4|}{\sqrt{20}\cdot\sqrt{5}} = 0 \quad \rightarrow \quad \alpha = 90^\circ$$

Es decir, las rectas son perpendiculares.

**9. Halla la ecuación implícita de la recta cuyas ecuaciones paramétricas son:**

$$\boldsymbol{r:} \begin{cases} \boldsymbol{x = -3 + 2t} \\ \boldsymbol{y = 1 - 3t} \end{cases}$$

***Solución:***

Multiplicamos por 3 la primera ecuación y por 2 la segunda, y sumamos:

$$\left.\begin{aligned} 3(x = -3 + 2t) \\ 2(y = 1 - 3t) \end{aligned}\right\} \quad \begin{array}{l} 3x = -9 + 6t \\ \underline{2y = 2 - 6t} \\ 3x + 2y = -7 \end{array}$$

La ecuación implícita es $3x + 2y + 7 = 0$.

**10. Escribe la ecuación implícita de la recta que pasa por $\boldsymbol{P(-1,\ 2)}$ y es paralela a $\boldsymbol{3x - y + 4 = 0}$.**

***Solución:***

Obtenemos la pendiente de la recta dada:

$$3x - y + 4 = 0 \quad \rightarrow \quad y = 3x + 4 \quad \rightarrow \quad pendiente = 3$$

La recta paralela tiene la misma pendiente; su ecuación será:

$$y = 2 + 3(x + 1) \quad \rightarrow \quad y = 2 + 3x + 3 \quad \rightarrow \quad 3x - y + 5 = 0$$

**11. Halla la distancia del punto $\boldsymbol{P(2,\ -1)}$ a la recta:**

$$\boldsymbol{r:} \begin{cases} \boldsymbol{x = -3 + 2t} \\ \boldsymbol{y = 1 + 4t} \end{cases}$$

***Solución:***

Expresamos $r$ en forma implícita:

$$\left.\begin{aligned} -2(x = -3 + 2\ \ ) \\ y = 1 + \ \ \end{aligned}\right\} \quad \begin{array}{c} -2\ \ = 6 - 4t \\ \underline{y = 1 +\ \ } \\ -2x + y = 7 \ \rightarrow\ 2x - y + 7 = 0 \end{array}$$

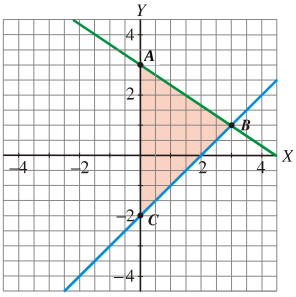
Hallamos la distancia de $P$ a $r$:

$$dist\,(P,r)=\frac{|2\cdot 2-(-1)+7|}{\sqrt{4+1}}=\frac{|4+1+7|}{\sqrt{5}}=\frac{12}{\sqrt{5}}=\frac{12\sqrt{5}}{5}$$

**12. Calcula los vértices y el área del triángulo cuyos lados están sobre las rectas:**

$$\boldsymbol{r: x-y-2=0 \qquad s: 2x+3y-9=0 \qquad t: x=0}$$

***Solución:***




1.º) Los vértices del triángulo son los puntos de corte de las rectas:

$$\left.\begin{array}{l} x-y-2=0 \\ 2x+3y-9=0 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} x=y+2 \\ 2(y+2)+3y-9=0 \\ 2y+4+3y-9=0 \quad \to \quad 5y=5 \quad \to \quad y=1 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad\;\; x=3 \end{array}$$

Punto $B(3,\ 1)$

$$\left.\begin{array}{l} x-y-2=0 \\ x=0 \end{array}\right\} \quad \left.y=-2\right\} \quad \text{Punto } C(0,-2)$$

$$\left.\begin{array}{l} 2x+3y-9=0 \\ x=0 \end{array}\right\} \quad \left.y=3\right\} \quad \text{Punto } A(0,3)$$

2.º) Tomamos el lado $AC$ como base del triángulo:

$$base=\left|\overrightarrow{AC}\right|=5$$

3.º) La altura es la distancia de $B$ a la recta que pasa por $A$ y por $C$ (que es el eje $Y$). Por tanto:

$$altura=3$$

4.º) El área del triángulo es:

$$Área=\frac{5\cdot 3}{2}=\frac{15}{2}=7{,}5\ \text{u}^2$$

***13.*** **Prueba que si las rectas $\boldsymbol{ax+by+c=0}$ y $\boldsymbol{a'x+b'y+c'=0}$ son paralelas, se cumple que $\boldsymbol{ab'-a'b=0}$.**

***Solución:***

Pendiente de la recta $ax + by + c = 0 \rightarrow m = \frac{-a}{b}$

Pendiente de la recta $a'x + b'y + c' = 0 \rightarrow m' = \frac{-a'}{b'}$

Por ser paralelas, las pendientes coinciden:

$m = m' \rightarrow - - = -\frac{a'}{b'} \rightarrow ab' = a'b \rightarrow ab' - a'b = 0$

***14.*** **La diagonal mayor de un rombo mide el doble que la diagonal menor y tiene por extremos los puntos *B*(3, 1) y *D*(–5, –3). Halla los vértices *A* y *C* y el área del rombo.**

***Solución:***

$\overrightarrow{BD} = (-8, -4) \rightarrow \left|\overrightarrow{BD}\right| = \sqrt{64+16} = \sqrt{80} = 4\sqrt{5}$

Como esta diagonal mide el doble que la diagonal menor $\rightarrow \left|\overrightarrow{AC}\right| = \frac{4\sqrt{\ }}{2} = 2\sqrt{5}$

Por tanto $\rightarrow$ Área del rombo $= \frac{\left|\overrightarrow{BD}\right|\left|\overrightarrow{AC}\right|}{} = \frac{4\sqrt{5}\cdot 2\sqrt{5}}{2} = 20 \text{ u}^2$

Los otros dos vértices están en la perpendicular a $\overrightarrow{BD}$. Calculamos la ecuación de la recta *BD* :

Vector director (–2, –1).

Punto que pertenece a *BD*, por ejemplo *B*(3, 1).

$\frac{\quad 3}{-2} = \frac{y-}{\ } \rightarrow -x + 3 = -2y + 2 \rightarrow x - 2y - 1 = 0$

Calculamos la ecuación de la recta que pasa por *A* y *C*, perpendicular a *BD*:

Vector director (1, –2).

La recta *AC* pasa por el punto medio, *M*, del segmento $\overrightarrow{BD}$.

$M = \left(\frac{3 \quad 5}{\ }, \frac{1-3}{2}\right) = (-1, -1)$

$\frac{x+1}{1} = \frac{\ }{-} \rightarrow -2x - 2 = y + 1 \rightarrow 2x + y + 3 = 0$

Los puntos *A* y *C* serán los (*x*, *y*) que estén en *AC* y cuya distancia a *M* sea $\frac{\left|\overrightarrow{AC}\right|}{2} = \frac{2\sqrt{\ }}{\ } \quad \sqrt{5}$.

$$\left.\begin{array}{l} (x, y) \in \text{ recta } AC \rightarrow 2x + y + 3 = 0 \rightarrow y = -3 - 2x \\ dist\left((x, y), M\right) = \sqrt{5} \rightarrow \sqrt{(x+1)^2 + (y+1)^2} = \sqrt{5} \rightarrow (x+1)^2 + (y+1)^2 = 5 \end{array}\right\} \rightarrow$$

$$\rightarrow (x+1)^2 + (-3 - 2x + 1)^2 = 5 \rightarrow (x+1)^2 + (-2 - 2x)^2 = 5 \rightarrow$$

$$\rightarrow x^2 + 2x + 1 + 4 + 8x + 4x^2 - 5 = 0 \rightarrow 5x^2 + 10x = 0 \rightarrow 5x(x+2) = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow \left\{\begin{array}{l} = 0 \rightarrow y = - \\ = -2 \rightarrow y = \end{array}\right.$$

Los vértices *A* y *C* son; *A*(–2, 1) y *B*(0, –3).

51347