EJERCICIOS RESUELTOS DE GEOMETRÍA

Ejercicio nº 1.-

a) Halla el punto medio del segmento de extremos $P(3, -2)$ y $Q(-1, 5)$.
b) Halla el simétrico del punto $P(3, -2)$ con respecto a $Q(-1, 5)$.

Solución:

a) El punto medio es:

$$M = \left(\frac{3+(-1)}{2},\ \frac{-2+5}{2} \right) = \left(1,\ \frac{3}{2}\right)$$

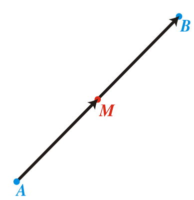
b) Llamamos $P'(x, y)$ al simétrico de P con respecto a Q. Q es el punto medio del segmento que une P y P'. Entonces:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{3+x}{2} = -1 \ \rightarrow \ x = -5 \\ \dfrac{-2+y}{2} = 5 \ \rightarrow \ y = 12 \end{array}\right\} \quad P'(-5, 12)$$

Ejercicio nº 2.-

El punto medio del segmento AB es $M(2, -1)$. Halla las coordenadas de A, sabiendo que $B(-3, 2)$.

Solución:



Si llamamos $A(x, y)$, tenemos que:

$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MB}$, es decir:

$$(2-x,\ -1-y) = (-3-2,\ 2-(-1))$$
$$(2-x,\ -1-y) = (-5,\ 3)$$

$$\left.\begin{array}{l} 2-x = -5 \ \rightarrow \ x = 7 \\ -1-y = 3 \ \rightarrow \ y = -4 \end{array}\right\} \quad \text{Por tanto } A(7, -4)$$

Ejercicio nº 3.-

Escribe las ecuaciones paramétricas de la recta que pasa por los puntos *P*(–1, 3) y *Q*(–2, 8).

Solución:

Vector posición: $\overline{OP}(-1,\ 3)$
Vector dirección: $\overline{PQ}\ (-1,\ 5)$
Ecuaciones paramétricas:

$$\begin{cases} x = -1 - t \\ y = 3 + 5t \end{cases}$$

Ejercicio nº 4.-

Dadas las rectas:

$$\boldsymbol{r: \begin{cases} x = 2 - t \\ y = 6 + 4t \end{cases} \qquad s: \begin{cases} x = 4 + 2t \\ y = -2 - 8t \end{cases}}$$

averigua su posición relativa (si se cortan, di en qué punto).

Solución:

Cambiamos el parámetro en la recta *s*:

$$r: \begin{cases} x = 2 - t \\ y = 6 + 4t \end{cases} \qquad s: \begin{cases} x = 4 + 2k \\ y = -2 - 8k \end{cases}$$

Igualamos:

$$\left.\begin{array}{l} 2 - t = 4 + 2k \\ 6 + 4t = -2 - 8k \end{array}\right\} \begin{array}{l} -2 - 2k = t \\ 6 + 4(-2 - 2k) = -2 - 8k \\ 6 - 8 - 8k = -2 - 8k \\ 0 = 0k \end{array}$$

Infinitas soluciones $\rightarrow$ Se trata de la misma recta; *r* y *s* coinciden.

Ejercicio nº 5.-

Averigua si estas dos rectas son perpendiculares. Si no lo fueran, halla el ángulo que forman:

$$\boldsymbol{r: \begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = 1 + 3t \end{cases} \qquad s: \begin{cases} x = 3 + 4t \\ y = -2 - 6t \end{cases}}$$

Solución:

Vector dirección de $r \rightarrow$ (–2, 3)
Vector dirección de $s \rightarrow$ (4, –6)

Llamamos α al ángulo formado:

$$cos\,\alpha = \frac{\left|(-2,3)\cdot(4,-6)\right|}{\sqrt{4+9}\cdot\sqrt{16+36}} = \frac{\left|-8-18\right|}{\sqrt{13}\cdot\sqrt{52}} = \frac{26}{\sqrt{13}\cdot 2\sqrt{13}} = \frac{26}{26} = 1 \rightarrow \alpha = 0^\circ \text{ (luego son perpendiculares).}$$

Ejercicio nº 6.-

Averigua la ecuación implícita de la recta que pasa por el punto *P*(2, –2) y cuya pendiente es *m* = –3.

Solución:

Escribimos la ecuación punto–pendiente y operamos:

$$y = -2 - 3(x-2) \quad \rightarrow \quad y = -2 - 3x + 6 \quad \rightarrow \quad 3x + y - 4 = 0$$

Ejercicio nº 7.-

Halla la ecuación implícita de la recta perpendicular a 2*x* + *y* – 3 = 0 que pasa por el punto *P*(1, 1).

Solución:

Obtenemos la pendiente de la recta dada:

$$2x + y - 3 = 0 \quad \rightarrow \quad y = -2x + 3 \quad \rightarrow \quad pendiente = -2$$

La pendiente de la perpendicular es:

$$\frac{-1}{-2} = \frac{1}{2}$$

La ecuación de la recta buscada será:

$$y = 1 + \frac{1}{2}(x-1) \quad \rightarrow \quad 2y = 2 + x - 1 \quad \rightarrow \quad x - 2y + 1 = 0$$

51348

Ejercicio nº 8.-

Halla la distancia de *P* a *Q* y de *P* a *r*, siendo:

***P*(–1, –1), *Q*(2, –3) y *r*: 3*x* – *y* + 6 = 0**

Solución:

$$dist(P,Q)=\left|\overrightarrow{PQ}\right|=\sqrt{3^2+(-2)^2}=\sqrt{9+4}=\sqrt{13}$$

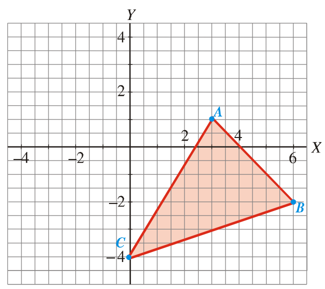
$$dist(P,r)=\frac{|3\cdot(-1)-(-1)+6|}{\sqrt{9+1}}=\frac{|-3+1+6|}{\sqrt{10}}=\frac{4}{\sqrt{10}}=\frac{4\sqrt{10}}{10}=\frac{2\sqrt{10}}{5}$$

Ejercicio nº 9.-

Halla el área del triángulo de vértices:

***A*(3, 1) *B*(6, –2) *C*(0, –4)**

Solución:



1.º) Tomamos el lado *BC* como base del triángulo:

$$base=\left|\overrightarrow{BC}\right|=\sqrt{36+4}=\sqrt{40}$$

2.º) La altura es la distancia de *A* a la recta que pasa por *B* y *C*. Hallamos la ecuación de dicha recta:

$$pendiente=\frac{-4+2}{0-6}=\frac{-2}{-6}=\frac{1}{3}$$

$$y=-4+\frac{1}{3}x \quad\rightarrow\quad 3y=-12+x \quad\rightarrow\quad r: x-3y-12=0$$

Por tanto:

$$altura=dist(A,r)=\frac{|3-3-12|}{\sqrt{1+9}}=\frac{12}{\sqrt{10}}$$

3.º) El área del triángulo es:

$$Área=\frac{base\cdot altura}{2}=\frac{\sqrt{40}\cdot\frac{12}{\sqrt{10}}}{2}=12\ \text{u}^2$$

Ejercicio nº 10.-

La ecuación explícita de la recta r es $y=mx+n$ y la implícita $Ax+By+C=0$ con $B\neq$ 0. Expresa m y n en función de A, B y C.

Solución:

Despejamos y de la expresión $Ax+By+C=0 \;\rightarrow\; By=-Ax-C \;\rightarrow\; y=-\frac{A}{B}x-—$

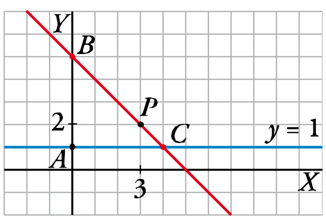
Como $y=mx+n$ es la misma recta que la anterior se tiene:

$m=-—$ y $n=-\frac{C}{B}$

Ejercicio nº 11.-

Halla la ecuación de una recta que pasa por el punto $P(3,\,2)$ y forma con el eje de ordenadas y la recta $y=1$ un triángulo isósceles. Calcula el área de dicho triángulo.

Solución:



Para calcular la ecuación de la recta que pasa por P nos faltaría otro punto B o C, dos de los vértices del triángulo ABC, o la pendiente. Los vértices del triángulo son de la forma:
$A(0,\,1)$, $B(0,\,b)$, $C(c,\,1)$

Por ser un triángulo isósceles $\rightarrow$ $dist(A,\,C)=dist(A,\,B)$ $\rightarrow$ $c=b-1$

Por otro lado, $\overrightarrow{BC}=\left(c,1-b\right)=\left(b-1,\ 1-b\right) \;\rightarrow\; m=\frac{1-b}{b-1}=\frac{-\left(b-1\right)}{}=-1$

Luego la ecuación de la recta que pasa por $P(3,\,2)$ y tiene $m=-1$ es:
$y=2-1(x-3)$ $\rightarrow$ $y=2-x+3$ $\rightarrow$ $x+y-5=0$

Calculamos el vértice C punto de intersección de las rectas $\begin{cases} y=1 \\ x+y-5= \end{cases}$:

$x+1-5=0$ $\rightarrow$ $x=4$ $\rightarrow$ $C(4,\,1)$

Luego $B(0,\ c+1) = (0,\ 5)$.

$$A_{\text{TRIÁNGULO}} = \frac{\overline{AC} \cdot \overline{AB}}{2} = \frac{4 \cdot 4}{2} = 8 \text{ u}^2$$