

1) Dadas las funciones  $f(x) = \sqrt{3x-1}$  y  $g(x) = \frac{3x^2-2}{2x^4+7}$ , hallar  $g \circ f$ .

$$g \circ f(x) = g[f(x)] = g[\sqrt{3x-1}] = \frac{3(\sqrt{3x-1})^2 - 2}{2(\sqrt{3x-1})^4 + 7} = \frac{3(3x-1) - 2}{2(3x-1)^2 + 7} = \frac{9x-3-2}{2(9x^2-6x+1)+7} =$$

$$= \frac{9x-5}{18x^2-12x+2+7} = \boxed{\frac{9x-5}{18x^2-12x+9}}$$

2) Hallar  $f^{-1}(x)$ , siendo  $f(x) = \frac{4x-3}{3x-8}$

$$y = \frac{4x-3}{3x-8} \Rightarrow y(3x-8) = 4x-3 \Rightarrow 3xy-8y = 4x-3 \Rightarrow 3xy-4x = 8y-3 \Rightarrow$$

$$x(3y-4) = 8y-3 \Rightarrow x = \frac{8y-3}{3y-4}.$$

Intercambiando  $x$  con  $y$ :  $y = \frac{8x-3}{3x-4}$ . Por tanto,  $\boxed{f^{-1}(x) = \frac{8x-3}{3x-4}}$

3) Dadas  $f(x) = -3x^2 - 2x$  y  $g(x) = \frac{-5x+4}{3x-1}$ , hallar (simplificando el resultado):

a)  $g \circ f$

$$g \circ f(x) = g[f(x)] = g[-3x^2 - 2x] = \frac{-5(-3x^2 - 2x) + 4}{3(-3x^2 - 2x) - 1} = \boxed{\frac{15x^2 + 10x + 4}{-9x^2 - 6x - 1}}$$

b)  $g^{-1}$ , si existe.

$$y = \frac{-5x+4}{3x-1} \Rightarrow \text{Despejamos } x: y(3x-1) = -5x+4 \Rightarrow 3xy-y = -5x+4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3xy+5x = y+4 \Rightarrow x(3y+5) = y+4 \Rightarrow x = \frac{y+4}{3y+5}$$

Esta última fórmula permite conocer quién es el original que se transforma en una imagen  $y$  conocida. La convertimos en función, usando las letras convencionales para las variables independiente y dependiente; es decir, intercambiamos  $x$  con  $y$ :

$$\boxed{y = \frac{x+4}{3x+5}}$$

4) Dadas las funciones  $f(x) = 2x - 5$  y  $g(x) = \frac{3x^2-2}{2x+7}$ , hallar  $g \circ f$ . (1 punto)

$$g \circ f(x) = g[f(x)] = g(2x-5) =$$

Llamando  $z = 2x - 5$ :

$$= g(z) = \frac{3z^2-2}{2z+7} =$$

Deshaciendo el cambio de variable anterior:

$$= \frac{3(2x-5)^2 - 2}{2(2x-5) + 7} = \frac{3(4x^2 - 20x + 25) - 2}{4x - 10 + 7} = \frac{12x^2 - 60x + 75 - 2}{4x - 3} = \boxed{\frac{12x^2 - 60x + 73}{4x - 3}}$$

5) Hallar la función inversa de  $f(x) = \frac{6-x}{2x-3}$  (1 punto)

En la función inversa, si conocemos la imagen  $y$  de cierto  $x$  mediante  $f$ , tenemos que obtener, como resultado, el valor de ese  $x$ :

$$y = \frac{6-3x}{2x-3} \Rightarrow y(2x-3) = 6-3x \Rightarrow 2xy-3y = 6-3x \Rightarrow 2xy+3x = 6+3y \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x(2y+3) = 6+3y \Rightarrow x = \frac{6+3y}{2y+3}$$

Pero los resultados de una función siempre se recogen en la variable  $y$ , siendo  $x$  quien recibe el valor de partida. Así que los intercambiamos:

$$\boxed{y = \frac{6+3x}{2x+3}}$$