

Composición de funciones

Idea inicial

Al componer las funciones $f(x)$ y $g(x)$ sobre un valor $x=a$, primero se sustituye x por a en la fórmula de $f(x)$ para obtener $f(a)=b$, y luego se sustituye x por b en la fórmula de $g(x)$ para obtener $g(b)$. Por lo tanto, estamos calculando $g(b) = g(f(a))$.

Por ejemplo: Si $f(x)=x^2-3x$ y $g(x)=\frac{2}{x}$, y queremos componer f y g sobre el valor $x=2$, calculamos $f(2)=2^2-3\cdot 2=-2$ y luego $g(-2)=\frac{2}{-2}=-1$. Así, $g(f(2))=-1$

Es importante tener en cuenta el orden. Si componemos f con g obtenemos normalmente (pero no siempre) un resultado distinto que si componemos g con f .

Ejemplo: Componiendo $g(x)$ con $f(x)$ sobre $x=2$ como antes, obtenemos primero $g(2)=\frac{2}{2}=1$ y luego $f(1)=1^2-3\cdot 1=-2$. Es decir, $f(g(2))=-2$ mientras que $g(f(2))=-1$.

Composición

En general, componer dos funciones $f(x)$ y $g(x)$ consiste en aplicar la segunda sobre el resultado obtenido por la primera. La composición de f y g se escribe $g \circ f$ (Hay que notar que se escribe al revés de como se dice: f compuesta con g se escribe g “circulito” f). También se escribe $g(f(x))$

El dominio de f compuesta con g es el dominio de f quitando los valores cuya imagen no esté en el dominio de g , porque no se podrían calcular.

En el ejemplo anterior, $\text{Dominio}(f)=\mathbb{R}$, $\text{Dominio}(g)=\mathbb{R}-\{0\}$ Para calcular el dominio de $g \circ f$ hay que quitar de \mathbb{R} los valores que hagan $f(x)=0$ porque no existe $g(0)$.

Así, como $f(x)=0 \rightarrow x^2-3x=0 \rightarrow x(x-3)=0 \rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=3 \end{cases}$, tendremos $\text{Dominio}(g \circ f)=\mathbb{R}-\{0, 3\}$.

Por otra parte, $\text{Dominio}(f \circ g)=\mathbb{R}-\{0\}$, pues g no se calcula en 0 y f siempre se puede calcular.

Fórmula (expresión analítica) de la función compuesta

Como vimos en los ejemplos, $g \circ f(x)=g(f(x))$ (se lee abreviadamente “g de f de x”) y se puede calcular sustituyendo todas las x de la segunda función por la fórmula completa de la primera. Después hay que operar y simplificar el resultado.

Ejemplos: Con las funciones anteriores, $f(x)=x^2-3x$ y $g(x)=\frac{2}{x}$

$$g \circ f(x)=g(f(x))=\frac{2}{f(x)}=\frac{2}{x^2-3x}$$

$$f \circ g(x)=f(g(x))=(g(x))^2-3g(x)=\left(\frac{2}{x}\right)^2-3\cdot\frac{2}{x}=\frac{4}{x^2}-\frac{6}{x}=\frac{4-6x}{x^2} \quad (\text{hallando el divisor común})$$

$$f \circ f(x)=f(f(x))=(f(x))^2-3f(x)=(x^2-3x)^2-3(x^2-3x)=x^4-6x^3+9x^2-3x^2+9x=$$
$$=x^4-6x^3+6x^2+9x \quad (\text{recordando la identidad notable } (a-b)^2=a^2-2ab+b^2)$$

$$g \circ g(x)=g(g(x))=\frac{2}{g(x)}=\frac{2}{\frac{2}{x}}=2 \div \frac{2}{x}=\frac{2x}{2}=x$$

Inversa (o Recíproca) de una función

Idea inicial

Dada una función $f(x)$, se llama función inversa de f (o función recíproca de f) a otra función (escrita como $f^{-1}(x)$) que invierte la "x" y la "y" de la tabla de valores de f .

Por ejemplo, si $f(x) = 2x - 1$ su tabla de valores sería (dando a x unos valores cualesquiera):

x	$y = 2x - 1$
0	-1
1	1
2	3
4	7

En ese caso, su inversa será la función $f^{-1}(x)$ cuya tabla de valores es:

x	$y = f^{-1}(x)$
-1	0
1	1
3	2
7	4

Justo al revés. Pero deberá invertir también todos los demás valores, aunque no aparezcan en la tabla. Claramente, si aplicamos primero $f(x)$ y luego $f^{-1}(x)$, o al revés, volvemos al valor inicial.

Inversa de una función

Se dice que una función $f(x)$ tiene inversa si existe otra función $f^{-1}(x)$ de forma que $f^{-1} \circ f(x) = x$ para cualquier valor $x \in \text{Dominio}(f)$. En ese caso también se cumple $f \circ f^{-1}(x) = x \quad \forall x \in \text{Dom}(f^{-1})$

(Llamando Identidad a la función $I(x) = x$, se tiene $f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f = I$)

No todas las funciones tienen inversa. En particular, no las tienen si hay valores repetidos.

Por ejemplo, si $g(1) = 5$ y $g(2) = 5$ ¿Cuánto será $g^{-1}(5)$? ¿1? ¿2?

En cualquier caso falla $g^{-1} \circ g = I$ en 2 o en 1.

Cálculo de la inversa

En la fórmula $y = f(x)$ despejamos la x dejándola sola a un lado de la igualdad, siempre que se pueda. $f^{-1}(x)$ se obtiene sustituyendo las "y" del otro lado de la igualdad por "x".

Ejemplo 1: Hallamos la inversa de $f(x) = 2x - 1$

Partimos de $y = 2x - 1$ y despejamos la x : $y = 2x - 1 \rightarrow y + 1 = 2x \rightarrow \frac{y+1}{2} = x$

Entonces $f^{-1}(x) = \frac{x+1}{2}$ poniendo x en lugar de la y en la fórmula obtenida.

Ejemplo 2: Inversa de $g(x) = \frac{x+1}{2x-3}$

$$y = \frac{x+1}{2x-3} \rightarrow y \cdot (2x-3) = x+1 \rightarrow 2xy - 3y = x+1 \rightarrow 2xy - x = 1+3y$$

Sacando x de factor común $x(2y-1) = 1+3y \rightarrow x = \frac{1+3y}{2y-1}$ Así, $g^{-1}(x) = \frac{1+3x}{2x-1}$