Problema 1 *(2 puntos)*

1. Calcula el MCD y el mcm de los siguientes polinomios

   $P(x) = x^5 + x^4 - 7x^3 + x^2 + 10x - 6$

   $Q(x) = x^5 + 5x^4 + x^3 - 19x^2 - 6x + 18$

   Solución: $P(x) = x^5+x^4-7x^3+x^2+10x-6 = (x-1)^2(x+3)(x^2-2)$

   $Q(x) = x^5 + 5x^4 + x^3 - 19x^2 - 6x + 18 = (x-1)(x+3)^2(x^2-2)$

   $MCD(P(x), Q(x)) = (x-1)(x+3)(x^2-2) = x^4 + 2x^3 - 5x^2 - 4x + 6$

   $$\begin{aligned} mcm(P(x), Q(x)) &= (x-1)^2(x+3)^2(x^2-2) = \\ &= x^6 + 4x^5 - 4x^4 - 20x^3 + 13x^2 + 24x - 18 \end{aligned}$$

2. Calcular x en la siguiente ecuación

   $$\frac{2x}{x^2-4x+3} - \frac{x-1}{x^2-1} = \frac{2}{x^2-2x-3}$$

   Solución:

   $$\left\{\begin{array}{ll} x^2-4x+3 & = (x-3)(x-1) \\ x^2-1 & = (x+1)(x-1) \\ x^2-2x-3 & = (x-3)(x+1) \end{array}\right. \Longrightarrow mcm = (x+1)(x-1)(x-3)$$

   $$2x(x+1)-(x-1)(x-3) = 2(x-1) \Longrightarrow x^2+4x-1 = 0 \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = -2+\sqrt{5} \\ x = -2-\sqrt{5} \end{array}\right.$$

Problema 2 *(2 puntos)*

1. Resolver por el método de Gauss:

   $$\left\{\begin{array}{rrrr} x+ & y+ & 2z = & 1 \\ 2x+ & y+ & z = & 3 \\ 2x- & 2y- & z = & -1 \end{array}\right.$$

   Solución:

   $$\left\{\begin{array}{rrrr} x+ & y+ & 2z = & 1 \\ 2x+ & y+ & z = & 3 \\ 2x- & 2y- & z = & -1 \end{array}\right. \xrightarrow[(E_3-2E_1)]{(E_2-2E_1)} \left\{\begin{array}{rrrr} x+ & y+ & 2z = & 1 \\ - & y- & 3z = & 1 \\ - & 4y- & 5z = & -3 \end{array}\right. \xrightarrow{(E_3-4E_2)}$$

$$\left\{\begin{array}{rrrr} x+ & y+ & 2z= & 1\\ & -\ y- & 3z= & 1\\ & & 7z= & -7\end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{rr} x= & 1\\ y= & 2\\ z= & -1\end{array}\right.$$

2. Hallar las soluciones reales de:

$$\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}=1$$

Solución:

$$\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}=1 \Longrightarrow \sqrt{x+1}=1+\sqrt{x-1} \Longrightarrow$$

$$x+1=1+(x-1)-2\sqrt{x-1} \Longrightarrow 1=\sqrt{x-1} \Longrightarrow x=\frac{5}{4}$$

Problema 3 *(3 puntos)* Calcular

1.

$$2\cdot 3^{2x-1}+3^{x+1}-1=0$$

2.

$$\log(x^2-1)+2=1+2\log(x+1)$$

Solución:

1.

$$2\cdot 3^{2x-1}+3^{x+1}-1=0 \Longrightarrow \frac{2\cdot 3^{2x}}{3}+3\cdot 3^x-1=0 \Longrightarrow 2\cdot 3^{2x}+9\cdot 3^x-3=0$$

Haciendo el cambio de variables $u=3^x$ la ecuación quedará de la siguiente forma:

$$2u^2+9u-3=0 \Longrightarrow u=0,3117376914,\quad u=-4,811737691$$

Deshaciendo el cambio de variable tenemos que

$$u=0,3117376914=3^x \Longrightarrow \log 0,3117376914=\log 3^x \Longrightarrow$$

$$x\log 3=\log 0,3117376914 \Longrightarrow$$

$$x=\frac{\log 0,3117376914}{\log 3}=-1,060968632$$

En el otro caso, $u=-4,811737691=3^x$ no es posible obtener solución.

2.

$$\log(x^2-1)+2=1+2\log(x+1) \Longrightarrow \log(x^2-1)+1=2\lg(x+1) \Longrightarrow$$

$$\lg 10(x^2-1)=\lg(x+1)^2 \Longrightarrow 10(x^2-1)=(x+1)^2 \Longrightarrow 9x^2-2x-11=0$$

$$\Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=-1\\ x=\dfrac{11}{9}\end{array}\right.$$

La solución $x=-1$ no es válida.

Problema 4 *(3 puntos)* Resolver las inecuaciones siguientes:

1.
$$\frac{x^2-2x-3}{x+2} \geq 0$$

2.
$$\frac{x-1}{10} - \frac{3x}{5} \geq \frac{2x}{6} + 1$$

Solución:

1.
$$\frac{x^2-2x-3}{x+2} = \frac{(x-3)(x+1)}{(x+2)} \geq 0$$

	$(-\infty,-2)$	$(-2,-1)$	$(-1,3)$	$(3,+\infty)$
$x+2$	$-$	$+$	$+$	$+$
$x+1$	$-$	$-$	$+$	$+$
$x-3$	$-$	$-$	$-$	$+$
$\frac{(x-3)(x+1)}{(x+2)}$	$-$	$+$	$-$	$+$

La solución pedida sería:

$$(-2,-1] \cup [3,+\infty)$$

2.
$$\frac{x-1}{10} - \frac{3x}{5} \geq \frac{2x}{6} + 1$$

$$3x-3-18x \geq 10x+30 \Longrightarrow -25x \geq 33 \Longrightarrow x \leq -\frac{33}{25}$$

$$\left(-\infty, -\frac{33}{25}\right)$$