

Problema 1 (2 puntos) Descompón cada polinomio como producto de factores de grado uno:

1. $P(x) = x^4 + 2x^3 - 5x^2 - 6x$

2. $Q(x) = x^3 - 5x^2 - x + 5$

3. $H(x) = x^3 - 3x^2 - 3x + 9$

Solución:

1. $P(x) = x^4 + 2x^3 - 5x^2 - 6x = x(x+3)(x-2)(x+1)$

2. $Q(x) = x^3 - 5x^2 - x + 5 = (x-5)(x-1)(x+1)$

3. $H(x) = x^3 - 3x^2 - 3x + 9 = (x-3)(x+\sqrt{3})(x-\sqrt{3})$

Problema 2 (2 puntos) Resolver por el método de Gauss:

$$\begin{cases} x - 2y + z = 1 \\ 2x + 2y - z = 0 \\ 3x - 3y + z = 2 \end{cases}$$

Solución:

$$\begin{cases} x - 2y + z = 1 \\ 2x + 2y - z = 0 \\ 3x - 3y + z = 2 \end{cases} \xrightarrow{\begin{smallmatrix} (E_2 - 2E_1) \\ (E_3 - 3E_1) \end{smallmatrix}} \begin{cases} x - 2y + z = 1 \\ 6y - 3z = -2 \\ 3y - 2z = -1 \end{cases} \xrightarrow{(2E_3 - E_2)}$$

$$\begin{cases} x - 2y + z = 1 \\ 6y - 3z = -2 \\ -z = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} x = \frac{1}{3} \\ y = -\frac{1}{3} \\ z = 0 \end{cases}$$

Problema 3 (3 puntos) Hallar las soluciones reales de:

1.

$$\sqrt{x+6} + \sqrt{x} = 3$$

2.

$$\lg(x^2 + 2699) = 2 + \lg(x + 2)$$

Solución:

1.

$$\sqrt{x+6} + \sqrt{x} = 3 \implies \sqrt{x+6} = 3 - \sqrt{x} \implies (\sqrt{x+6})^2 = (3 - \sqrt{x})^2 \implies$$

$$x + 6 = 9 + x - 6\sqrt{x} \implies -3 = -6\sqrt{x} \implies \frac{1}{2} = \sqrt{x} \implies x = \frac{1}{4}$$

2.

$$\lg(x^2 + 2699) = 2 + \lg(x + 2) \implies \lg(x^2 + 2699) = \lg 100 + \lg(x + 2) \implies$$

$$\lg(x^2 + 2699) = \lg 100(x + 2) \implies (x^2 + 2699) = 100(x + 2) \implies$$

$$x^2 - 100x + 2499 = 0 \implies \begin{cases} x = 51 \\ x = 49 \end{cases}$$

Problema 4 (3 puntos) Resolver las inecuaciones siguientes:

1.

$$\frac{x^2 + 3x + 2}{x - 3} < 0$$

2.

$$\frac{x^2 + 2x - 3}{x - 5} \geq 0$$

Solución:

1.

$$\frac{x^2 + 3x + 2}{x - 3} = \frac{(x + 2)(x + 1)}{(x - 3)} < 0$$

	$(-\infty, -2)$	$(-2, -1)$	$(-1, 3)$	$(3, +\infty)$
$x + 2$	—	+	+	+
$x + 1$	—	—	+	+
$x - 3$	—	—	—	+
$\frac{(x+2)(x+1)}{x-3}$	—	+	—	+

La solución pedida sería:

$$(-\infty, -2) \cup (-1, 3)$$

2.

$$\frac{x^2 + 2x - 3}{x - 5} = \frac{(x + 3)(x - 1)}{x - 5} \geq 0$$

	$(-\infty, -3)$	$(-3, 1)$	$(1, 5)$	$(5, +\infty)$
$x + 3$	—	+	+	+
$x - 1$	—	—	+	+
$x - 5$	—	—	—	+
$\frac{(x+3)(x-1)}{x-5}$	—	+	—	+

La solución pedida sería:

$$[-3, 1] \cup (5, +\infty]$$