

Problema 1 Discutir y resolver por el método de Gauss los siguientes sistemas:

$$\begin{cases} 2x - y - z = 0 \\ x + 2y - z = 1 \\ 3x + y + 2z = 2 \end{cases} ; \quad \begin{cases} 2x + 3y = 4 \\ x + 2y - z = 2 \\ x + y + z = 1 \end{cases}$$

Solución:

$$\begin{cases} 2x - y - z = 0 \\ x + 2y - z = 1 \\ 3x + y + 2z = 2 \end{cases} \text{ Sistema Compatible Determinado} \implies \begin{cases} x = 7/20 \\ y = 9/20 \\ z = 1/4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x + 3y = 4 \\ x + 2y - z = 2 \\ x + y + z = 1 \end{cases} \text{ Sistema Incompatible}$$

Problema 2 Resolver las ecuaciones:

a) $\log x - \log(x - 3) = \log(2x)$

b) $\log x - \log(x - 1) = 2$

c) $\log(2 + x^2) - \log x = 1$

Solución:

a) $\log x - \log(x - 3) = \log(2x) \implies \log \frac{x}{x-3} = \log(2x) \implies x^2 - 5x = 0 \implies x = 7/2.$

b) $\log x - \log(x - 1) = 2 \implies \log \frac{x}{x-1} = \log 100 \implies x = \frac{100}{99}.$

c) $\log(2 + x^2) - \log x = 1 \implies \log \frac{2 + x^2}{x} = \log 10 \implies x^2 - 10x + 2 = 0 \implies x = 9,795; x = 0,205.$

Problema 3 Resolver el siguiente sistema

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ x + 2y = 0 \end{cases}$$

Solución:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ x + 2y = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} x = -\frac{2\sqrt{3}}{3}, y = \frac{\sqrt{3}}{3} \\ x = \frac{2\sqrt{3}}{3}, y = -\frac{\sqrt{3}}{3} \end{cases}$$

Problema 4 Resolver las inecuaciones siguientes:

a) $\frac{x-1}{5} - \frac{x}{10} \leq \frac{x+3}{2}$

b) $\frac{x^2 - 2x - 3}{x^2 + x - 2} \geq 0$

Solución:

a) $\frac{x-1}{5} - \frac{x}{10} \leq \frac{x+3}{2} \implies \left[-\frac{17}{4}, +\infty\right)$

b) $\frac{x^2 - 2x - 3}{x^2 + x - 2} \geq 0 \implies (-\infty, -2) \cup [-1, 1) \cup [3, \infty)$

Problema 5 Calcular los siguientes límites:

a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^6 + 2x^5 - 1}{5x^6 + 1}$

b) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^5 + x^4 + x}{x^6 + 2}$

c) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^6 + x^5 - 2x + 1}{-3x^4 + 3}$

d) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x^2 + x - 1}{x^2 + 1} \right)^{\frac{x^2+3}{2}}$

e) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 - x + 1}{x^2 + 1} \right)^{2x}$

f) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^4 + 1}{2x^4} \right)^{x+2}$

Solución:

a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^6 + 2x^5 - 1}{5x^6 + 1} = \frac{3}{5}$

b) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^5 + x^4 + x}{x^6 + 2} = 0$

c) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^6 + x^5 - 2x + 1}{-3x^4 + 3} = -\infty$

d) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x^2 + x - 1}{x^2 + 1} \right)^{\frac{x^2+3}{2}} = +\infty$

e) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 - x + 1}{x^2 + 1} \right)^{2x} = e^{-2}$

f) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^4 + 1}{2x^4} \right)^{x+2} = 0$