1. Halla el dominio de definición y recorrido de las funciones

   a) f(x) = $\sqrt{9 - x^2}$

   b) g(x) = $\frac{1}{x^2-4}$

2. Calcula los límites:

   a) $\lim\limits_{x\to -2} \frac{x^4-16}{x^3+8}$

   b) $\lim\limits_{x\to \infty} \frac{3x^3-6x^2+12}{x^3+8x-2}$

3. Sea f la función dada por f (x) = $\frac{x^2}{x^2-1}$ para $|x| \neq 1$, determina sus asíntotas.

4. Halla el valor de los parámetros m y n para que la función f sea continua en todo **R**.

   f(x) = $\begin{cases} 2, & x \leq 1 \\ mx + n, & 1 < x < 3 \\ 4, & x \geq 3 \end{cases}$

5. Calcula los siguientes límites:

   a) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt{n^2 - 4} - \sqrt{n^2 - 3\mathrm{n}}\right)$

   b) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n+3}\right)^{n-2}$

6. Halla la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función f (x) = $2x^2$ en el punto P (−1, 2). ¿Cuál es la ecuación de la recta normal? El valor de la pendiente lo hallarás aplicando la definición de la derivada.

7. Halla las derivadas de las siguientes funciones:

   a) f(x) = $x.\sqrt{2x^3 + 1}$ b) g(x) = $\frac{x^4}{x-1}$

8. Halla las derivadas de las siguientes funciones:

   a) f(x) = $(5x^2 \mathrm{sen} x)+(x.\cos x)$ b) g(x) = $\ln \frac{1+x}{1-x}$

9. Si la función f (x) = $x^3 + ax + b$ tiene un mínimo en el punto (1, 5), determina los valores de a y b. ¿Tiene algún otro máximo o mínimo esta función?

10. El área de un rectángulo es de 100 cm^2. Si queremos que tenga el menor perímetro posible, ¿cuáles son sus dimensiones?

Solución del examen

1. Halla el dominio de definición y recorrido de las funciones

a) f(x) = $\sqrt{9-x^2}$ b) g(x) = $\frac{1}{x^2-4}$

Solución:

Hallamos los dominios:

a) La expresión $\sqrt{9-x^2}$ está definida cuando el radicando sea mayor o igual que cero, ya que la raíz cuadrada de un número negativo no es un número real. Hallamos los valores tales que:

$9-x^2 \geq 0 \Rightarrow 9 \geq x^2 \Rightarrow |x| \geq 3 \Rightarrow -3 \leq x \leq 3$

D(f) = [-3, +3].

b) La expresión $\frac{1}{x^2-4}$ está definida cuando el denominador no se anule.

$x^2-4 = 0 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2$

Por lo tanto:

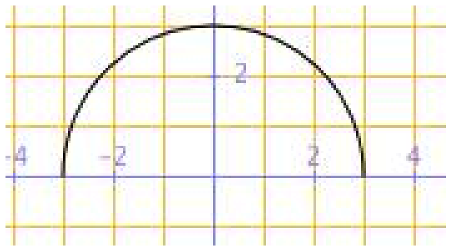
D(f) = $\mathbb{R}$-{-2,2} ó $(-\infty,-2)\cup(-2,2)\cup(2,\infty)$

Hallamos los recorridos a partir de las funciones inversas:

a) $y = \sqrt{9-x^2} \Rightarrow x = \sqrt{9-y^2} \Rightarrow x^2 = 9-y^2 \Rightarrow y^2 = 9-x^2$

$y = f^{-1}(x) = +\sqrt{9-x^2}$

Función únicamente válida en [0, 3] que es por lo tanto el recorrido de f(x).



b) $y = \frac{1}{x^2-4} \Rightarrow x = \frac{1}{y^2-4} \Rightarrow y^2 - 4 = \frac{1}{x} \Rightarrow y^2 = \frac{1}{x} + 4$

Función válida en $\mathbb{R}$-{0} que es el recorrido de g(x).

2. Calcula los límites:

a) $\lim\limits_{x\to-2} \frac{x^4-16}{x^3+8}$ b) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{3x^3-6x^2+12}{x^3+8x-2}$

Solución:

a) Es una indeterminación del tipo $\left(\frac{0}{0}\right)$, resolvemos el límite descomponiendo en factores numerador y denominador con la regla de Ruffini y simplificando el resultado obtenido:

$$\lim_{x\to-2} \frac{x^3-16}{x^3+8} = \lim_{x\to-2} \frac{x^3-16}{x^3+8} = \lim_{x\to-2} \frac{(x^2+4)(x+2)(x-2)}{(x+2).(x^2-2x+4)} = \lim_{x\to-2} \frac{(x^2+4)(x-2)}{(x^2-2x+4)} = \frac{8.(-4)}{12} = -\frac{8}{3}$$

b) Es una indeterminación del tipo $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$, como el grado del numerador es igual que el grado del denominador sustituimos los polinomios por su monomio de mayor grado y simplificamos el resultado obtenido:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{3x^3-6x^2+12}{x^3+8x-2} = \lim_{x\to\infty} \frac{3x^3}{x^3} = \mathbf{3}$$

3. Sea f la función dada por f (x) = $\frac{x^2}{x^2-1}$ para $|x| \neq 1$, determina sus asíntotas.

Solución:

El dominio de definición es $\mathbb{R}$ - {-1, 1}.

- Asíntotas verticales: Son rectas verticales en las que $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \pm\infty$. Como es un cociente buscamos los valores que anulan el denominador:

  $\lim\limits_{x\to-1^-} \frac{x^2}{x^2-1} = +\infty$, $\lim\limits_{x\to-1^+} \frac{x^2}{x^2-1} = -\infty$

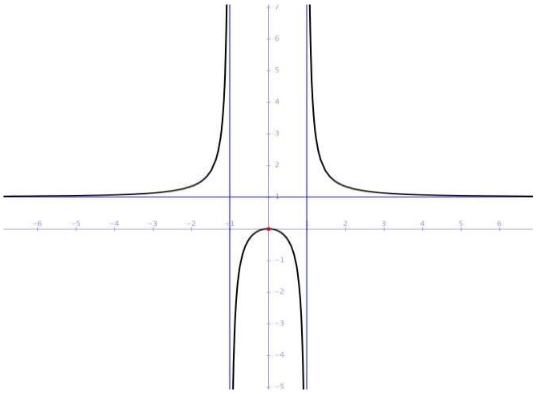
$\lim\limits_{x \to 1^-} \frac{x^2}{x^2-1}$ = -∞, $\lim\limits_{x \to 1^+} \frac{x^2}{x^2-1}$ = +∞

La asíntotas verticales son: **x = -1** y **x = 1**.

- Asíntotas horizontales: Son rectas de ecuación y = b, tales que $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = b$.

  $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{x^2}{x^2-1}$ = $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{x^2}{x^2}$ = 1

  La asíntota horizontal es **y = 1** a izquierda y derecha. Se acerca a ella por arriba a izquierda y derecha.



- Asíntotas oblicuas:

  No tiene asíntotas oblicuas.

La gráfica es la de la figura adjunta

4. Halla el valor de los parámetros m y n para que la función f sea continua en todo ℝ.

f(x) = $\begin{cases} \mathbf{2}, & \boldsymbol{x \leq 1} \\ \boldsymbol{mx+n}, & \boldsymbol{1 < x < 3} \\ \mathbf{4}, & \boldsymbol{x \geq 3} \end{cases}$

Solución:

Como es una función definida a trozos en ℝ y las ramas son constantes o polinómicas, será una función continua salvo en los puntos de solapamiento.

- En x = 1, debemos igualar los límites laterales en dicho punto:

  f(1) = $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x)$ = 2

  $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x)$ = $\lim\limits_{x \to 1^+} (mx + n)$ = m+n

  Igualando valores obtenemos:

  m+n = 2.

- En x = 3, debemos igualar los límites laterales en dicho punto:

  $\lim\limits_{x \to 3^-} f(x)$ = $\lim\limits_{x \to 3^-} (mx + n)$ = 3m+n

  f(3) = $\lim\limits_{x \to 3^+} f(x)$ = 4

  Igualando valores obtenemos:

  3m+n = 4

Obtenemos el sistema:

$\begin{cases} m + n = 2 \\ 3m + n = 4 \end{cases}$

que resolvemos por reducción restando a la 2ª ecuación la 1ª:

2m = 2 ⇒ **m = 1**

sustituyendo en 1ª ecuación:

1+n = 2 ⇒ **n = 1**

5. Calcula los siguientes límites:

a) $\boldsymbol{\lim\limits_{n \to \infty} \left(\sqrt{n^2 - 4} - \sqrt{n^2 - 3n}\right)}$

b) $\boldsymbol{\lim\limits_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n+3}\right)^{n-2}}$

Solución:

a) $\lim\limits_{n \to \infty} \left(\sqrt{n^2 - 4} - \sqrt{n^2 - 3n}\right)$ = ∞-∞

Es una indeterminación del tipo (∞-∞), que resolvemos multiplicando y dividiendo por la conjugada de la expresión dada, sustituyendo el polinomio por el monomio de mayor grado y simplificando el resultado obtenido:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2-4}-\sqrt{n^2-3\text{n}}\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{n^2-4}-\sqrt{n^2-3\text{n}}).(\sqrt{n^2-4}+\sqrt{n^2-3\text{n}})}{\sqrt{n^2-4}+\sqrt{n^2-3\text{n}}} = \lim_{n\to\infty}\frac{n^2-4-n^2+3\text{n}}{\sqrt{n^2-4}+\sqrt{n^2-3\text{n}}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{3\text{n}-4}{\sqrt{n^2-4}+\sqrt{n^2-3\text{n}}} = \lim_{n\to\infty}\frac{3\text{n}}{\sqrt{n^2}+\sqrt{n^2}} = \lim_{n\to\infty}\frac{3\text{n}}{n+\text{n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{3\text{n}}{2n} = \lim_{n\to\infty}\frac{3}{2} = \mathbf{\frac{3}{2}}$$

b) Es una indeterminación del tipo (1^∞) que resolvemos aplicando la fórmula L = e^λ con:

$$\lambda = \lim_{n\to\infty}[\text{f(x)} - 1].\text{g(x)} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{\text{n}+3}-1\right).(\text{n}-2) = \lim_{n\to\infty}\frac{\text{n}-2}{\text{n}+3} = \lim_{n\to\infty}\frac{\text{n}}{\text{n}} = 1$$

Por lo tanto

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+3}\right)^{n-2} = e^1 = \mathbf{e}$$

6. Halla la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función f (x) = 2x^2 en el punto P (−1, 2). ¿Cuál es la ecuación de la recta normal? El valor de la pendiente lo hallarás aplicando la definición de la derivada.

Solución:

- Utilizando la definición de derivada calculamos el límite x_0 = -1 :

  $$\text{f}'(-1) = \lim_{h\to 0}\frac{\text{f}(-1+\text{h})-\text{f}(-1)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{2(-1+\text{h})^2-2}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{2\text{h}^2-4\text{h}+2-2}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{2\text{h}^2-4\text{h}}{h} = \left(\frac{0}{0}\right)$$

  Indeterminación que resolvemos descomponiendo factorialmente y eliminando factores obtenemos la derivada:

  $$\text{f}'(-1) = \lim_{h\to 0}\frac{2\text{h}^2-4\text{h}}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\text{h}(2\text{h}-4)}{h} = \lim_{h\to 0}(2\text{h}-4) = -4$$

- Hallamos el valor de la función en el punto x_0 = -1:

  f(-1) = 2.(-1)^2 = 2

- Sustituimos valores en la ecuación de la recta tangente:

  y - 2 = -4(x - 1) $\Rightarrow$ **y = -4x-2**

- La ecuación de la recta normal será:

  y - 2 = $\frac{1}{4}$ (x+1) $\Rightarrow$ **y = $\frac{1}{4}$x+ $\frac{9}{4}$**

7. Halla las derivadas de las siguientes funciones:

a) f(x) = x. $\sqrt{2\text{x}^3+1}$ **b) g(x) = $\frac{\text{x}^4}{\text{x}-1}$**

Solución:

a) Aplicamos las reglas de derivación de las raíces cuadradas, potenciales y los productos:

$$\text{f}'(\text{x}) = 1.\sqrt{2x^3+1}+x.\frac{1}{2\sqrt{2x^3+1}}.6x^2 = \sqrt{2x^3+1}+\frac{3x^3}{\sqrt{2x^3+1}} = \frac{2x^3+1}{\sqrt{2x^3+1}}+\frac{3x^3}{\sqrt{2x^3+1}} = \frac{5x^3+1}{\sqrt{2x^3+1}}$$

Racionalizando la función obtenida:

$$\text{f}'(\text{x}) = \frac{(5x^3+1).\sqrt{2x^3+1}}{2x^3+1}$$

b) Hallamos la derivada aplicando las reglas de derivación de las funciones potenciales y del cociente de dos funciones y simplificamos la función obtenida:

$$\text{g}'(\text{x}) = \frac{4\text{x}^3.(x-1)-\text{x}^4.1}{(\text{x}-1)^2} = \frac{4\text{x}^4-4\text{x}^3-\text{x}^4}{(\text{x}-1)^2} = \frac{3\text{x}^4-4\text{x}^3}{(\text{x}-1)^2}$$

8. Halla las derivadas de las siguientes funciones:

a) f(x) = (5x^{2}senx)+(x.cosx) **b) g(x) = ln $\frac{1+\text{x}}{1-\text{x}}$**

Solución:

a) Hallamos la derivada aplicando las reglas de derivación de las funciones trigonométricas y potenciales y sacamos factor común de la función obtenida:
$f'(x) = (5 \cdot 2x \cdot senx + 5x^2.cosx) + (1 \cdot cosx + x \cdot (-senx)) =$
$= 10xsenx + 5x^2.cosx + cosx - xsenx = 9\ xsenx + (5x^2-1)cosx$

b) Aplicamos las las reglas de derivación de logaritmos, cocientes y la regla de la cadena:
$g'(x) = \frac{1}{\frac{1+x}{1-x}} \cdot \frac{1.(1-x)-(1+x).(-1)}{(1-x)^2} = \frac{1}{\frac{1+x}{1-x}} \cdot \frac{2}{(1-x)^2}$

Hallamos el común denominador y sumamos las fracciones obtenidas:
$g'(x) = \frac{2}{(1+x).(1-x)} = \mathbf{\frac{2}{1-x^2}}$

9. Si la función f (x) = x^3 + ax + b tiene un mínimo en el punto (1, 5), determina los valores de a y b. ¿Tiene algún otro máximo o mínimo esta función?

Solución:
$f'(x) = 3x^2 + a$ Si la función tiene un mínimo en x =1:
$f'(1) = 0 \Rightarrow 3+a = 0 \Rightarrow a = -3$
Como el punto (1, 5) pertenece a la gráfica de la función f(x), se verifica que:
$f(1) = 5$
Al ser $f(x) = x^3 - 3x + b$, se tiene que:
$1-3+b = 5 \Rightarrow b = 7$

Por lo tanto, la expresión de la función es:
$\mathbf{f(x) = x^3 - 3x + 7}$

hallemos si tiene algún otro máximo o mínimo:
$f'(x) = 3x^2 - 3 \Rightarrow 3x^2 - 3 = 0 \Rightarrow x = \pm 1$
$f''(x) = 6x \Rightarrow f''(-1) = -6 < 0$
En x =−1 tiene un máximo.

10. El área de un rectángulo es de 100 cm^2. Si queremos que tenga el menor perímetro posible, ¿cuáles son sus dimensiones?

Solución:
Si tomamos las dimensiones del rectángulo como x e y, de las expresión del área despejamos:
$x.y = 100 \Rightarrow y = \frac{100}{x}$

El perímetro será:
$P(x, y) = 2x + 2y = 2x + 2.\frac{100}{x} \Rightarrow P(x) = 2x + \frac{200}{x}$

Derivamos y calculamos el valor en que se anula dicha derivada:
$P'(x) = 2 - \frac{200}{x^2}$
$2 - \frac{200}{x^2} = 0 \Rightarrow 2 = \frac{200}{x^2} \Rightarrow 2x^2 = 200 \Rightarrow x^2 = 100 \Rightarrow x = \pm 10$

El valor x = -10 no tiene sentido. Calculemos la segunda derivada y veamos su valor para x = 10:
$P''(x) = \frac{400}{x^3}$

$f''(10) > 0 \Rightarrow$ En x = 10 tiene un mínimo.
Las dimensiones del rectángulo son **x = 10 cm, y = 10 cm**. Es un cuadrado de 10 cm de lado.