

1.-

Calcula el perímetro de un triángulo cuyos vértices están situados en los puntos $A(1, 2)$, $B(3, 2)$ y $C(-1, 3)$.

Calculamos los vectores $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ y $\overrightarrow{CA}$:

$$\overrightarrow{AB} = (2, 0), \overrightarrow{BC} = (-4, 1) \text{ y } \overrightarrow{CA} = (2, -1)$$

Hallamos el módulo de los vectores:

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{2^2 + 0^2} = 2$$

$$|\overrightarrow{BC}| = \sqrt{(-4)^2 + 1^2} = \sqrt{17}$$

$$|\overrightarrow{CA}| = \sqrt{2^2 + (-1)^2} = \sqrt{5}$$

El perímetro mide:

$$2 + \sqrt{17} + \sqrt{5} = 8,36 \text{ u}$$

2.-

Escribe las ecuaciones vectorial y paramétricas de la recta que pasa por los puntos $A(7, 3)$ y $B(2, 2)$.

$$\overrightarrow{AB} = (-5, -1)$$

Ecuación vectorial:

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{AB} \rightarrow (x, y) = (7, 3) + t(-5, -1)$$

Ecuaciones paramétricas:

$$\left. \begin{array}{l} x = 7 - 5t \\ y = 3 - t \end{array} \right\}$$

3.-

Halla la ecuación continua de la recta que pasa por $A(2, -1)$ y tiene la dirección del vector $\vec{d} = (2, -1)$. Averigua si el punto $P(3, 1)$ está en la recta.

Calculamos la ecuación continua de la recta:

$$\frac{x - 2}{2} = \frac{y - (-1)}{-1}$$

Comprobamos si el punto P cumple las ecuaciones de la recta:

$$\frac{3 - 2}{2} = \frac{1}{2} \qquad \frac{1 - (-1)}{-1} = -2$$

Luego el punto P no pertenece a la recta.

4.-

Obtén la ecuación general de la recta que pasa por $A(1, -1)$ y $B(0, 2)$.
Calcula también un vector perpendicular a su vector director.

Calculamos el vector director: $\overrightarrow{AB} = (-1, 3)$

Obtenemos la ecuación general:

$$A = 3 \quad B = 1 \quad C = -3 \cdot 1 + (-1) \cdot (-1) = -2$$

$$3x + y - 2 = 0$$

Un vector perpendicular a $\overrightarrow{AB}$ es $(-3, -1)$.

5.-

Calcula la recta que pasa por el punto $A(2, 7)$ y forma con el eje de abscisas un ángulo de 60° . Explica cómo lo haces.

Calculamos la pendiente: $\operatorname{tg} 60^\circ = m \rightarrow m = \sqrt{3}$

Hallamos la ecuación punto-pendiente: $y - 7 = \sqrt{3}(x - 2)$

6.-

Halla los valores de B y C para que las rectas r y s sean paralelas.

$$r: 3x + By + 5 = 0 \quad s: x + 2y + C = 0$$

Para que las rectas sean paralelas se tiene que cumplir que:

$$\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} \neq \frac{C}{C'}$$

$$\frac{3}{1} = \frac{B}{2} \rightarrow B = 6 \quad \frac{3}{1} \neq \frac{5}{C} \rightarrow C \neq \frac{5}{3}$$

7.-

Halla la distancia entre el punto $P(2, -1)$ y la recta r , cuya ecuación es:

$$r: \frac{x-1}{3} = \frac{2-y}{2}$$

Expresamos la recta en forma general:

$$r: \frac{x-1}{3} = \frac{2-y}{2} \rightarrow 2x + 3y - 8 = 0$$

$$d(P, r) = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{|2 \cdot 2 + 3 \cdot (-1) - 8|}{\sqrt{2^2 + 3^2}} = \frac{7}{\sqrt{13}} = \frac{7\sqrt{13}}{13} u$$

8.-

Calcula la distancia que separa esta recta del origen de coordenadas.

$$\left. \begin{array}{l} x = 3 - t \\ y = 2 + 2t \end{array} \right\}$$

Expresamos la recta en forma general:

$$\left. \begin{array}{l} x = 3 - t \\ y = 2 + 2t \end{array} \right\} \rightarrow -x + 3 = \frac{y - 2}{2} \rightarrow -2x - y + 8 = 0$$

$$d(P, r) = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{|-2 \cdot 0 - 1 \cdot 0 + 8|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}} = \frac{8}{\sqrt{5}} = \frac{8\sqrt{5}}{5} u$$

9.-

Halla la distancia entre estas rectas.

$$r: \frac{x}{2} = \frac{y-1}{5} \quad s: \left. \begin{array}{l} x = 2t \\ y = 3 + 5t \end{array} \right\}$$

Calculamos el vector director de la recta r : $\vec{u}_r = (2, 5)$ Hallamos el vector director de la recta s : $\vec{u}_s = (2, 5)$ Tomamos un punto de la recta r , $A(0, 1)$, y vemos si pertenece a s :

$$s: \left. \begin{array}{l} 0 = 2t \\ 1 = 3 + 5t \end{array} \right\} \rightarrow \left. \begin{array}{l} t = 0 \\ t = \frac{-2}{5} \end{array} \right\} \rightarrow A \notin s$$

Expresamos la recta, s , en forma general:

$$s: \left. \begin{array}{l} x = 2t \\ y = 3 + 5t \end{array} \right\} \rightarrow \frac{x}{2} = \frac{y-3}{5} \rightarrow 5x - 2y + 6 = 0$$

Las rectas son paralelas, y calculamos la distancia de A a s :

$$d(A, s) = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{|5 \cdot 0 - 2 \cdot 1 + 6|}{\sqrt{5^2 + (-2)^2}} = \frac{4}{\sqrt{29}} = \frac{4\sqrt{29}}{29} u$$

10.-

Calcula el ángulo que forman las rectas.

$$r: \frac{x-2}{3} = \frac{y+1}{3} \quad s: \left. \begin{array}{l} x = 1 - 2t \\ y = -3 + t \end{array} \right\}$$

$$\cos \alpha = \frac{|d_1 \cdot c_1 + d_2 \cdot c_2|}{\sqrt{d_1^2 + d_2^2} \cdot \sqrt{c_1^2 + c_2^2}} = \frac{|3 \cdot (-2) + 3 \cdot 1|}{\sqrt{3^2 + 3^2} \cdot \sqrt{(-2)^2 + 1^2}} = \frac{3}{3\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{10}}{10}$$

$$\rightarrow \alpha = 71^\circ 33' 54,18''$$

11.-

Decide si los siguientes vectores son perpendiculares o paralelos.

$$a) \vec{a} = (-2, 4) \text{ y } \vec{b} = (3, 2) \quad b) \vec{c} = (4, -3) \text{ y } \vec{d} = (6, 8)$$

$$a) \frac{-2}{3} \neq \frac{4}{2}$$

No son paralelos.

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = (-2, 4) \cdot (3, 2) = -6 + 8 \neq 0$$

No son perpendiculares.

$$b) \frac{4}{6} \neq \frac{-3}{8}$$

No son paralelos.

$$\vec{c} \cdot \vec{d} = (4, -3) \cdot (6, 8) = 24 - 24 = 0$$

Son perpendiculares.

12.-

Encuentra un vector $\vec{u} = (a, b)$ que es perpendicular a $\vec{v} = (3, 5)$ y cuyo módulo sea $|\vec{u}| = 2\sqrt{34}$.

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = (a, b) \cdot (3, 5) = 3a + 5b = 0 \rightarrow a = -\frac{5b}{3}$$

$$|\vec{u}| = \sqrt{\left(-\frac{5b}{3}\right)^2 + b^2} = 2\sqrt{34} \rightarrow \frac{25b^2}{9} + b^2 = 136 \rightarrow 34b^2 = 1.224 \rightarrow b = \sqrt{36} = \pm 6$$

$$\text{Si } b = 6 \rightarrow a = -10 \quad \text{Si } b = -6 \rightarrow a = 10$$

13.-

Dado el vector $\vec{p} = (6, 2)$, obtén un vector $\vec{q}$ con módulo $\sqrt{89}$ y tal que $\vec{p} \cdot \vec{q} = 14$.

$$\vec{p} \cdot \vec{q} = (6, 2) \cdot (a, b) = 6a + 2b = 14 \rightarrow b = 7 - 3a$$

$$|\vec{q}| = \sqrt{a^2 + (7 - 3a)^2} = \sqrt{89} \rightarrow 10a^2 - 42a - 40 = 0 \rightarrow \begin{cases} a_1 = -\frac{4}{5} \\ a_2 = 5 \end{cases}$$

$$\text{Si } a = -\frac{4}{5} \rightarrow b = \frac{47}{5}$$

$$\text{Si } a = 5 \rightarrow b = -8$$

14.-

Halla m y n para que los vectores $\vec{u} = (3, m)$ y $\vec{v} = (n, -1)$ sean perpendiculares y se verifique que $|\vec{u}| = 5$.

$$|\vec{u}| = \sqrt{3^2 + m^2} = 5 \rightarrow 9 + m^2 = 25 \rightarrow m = \pm 4$$

$$\text{Si } m = 4:$$

$$(3, 4) \cdot (n, -1) = 0 \rightarrow 3n - 4 = 0 \rightarrow n = \frac{4}{3}$$

$$\text{Si } m = -4:$$

$$(3, -4) \cdot (n, -1) = 0 \rightarrow 3n + 4 = 0 \rightarrow n = -\frac{4}{3}$$

15.-

¿Podrías conseguir un vector $\vec{a}$ tal que $\vec{a} \cdot \vec{b} = 5$, siendo $\vec{b} = (2, 1)$, y que sea perpendicular a $\vec{c} = (2, 6)$?

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 5 \rightarrow (a, b) \cdot (2, 1) = 5 \rightarrow 2a + b = 5$$

$$\vec{a} \cdot \vec{c} = 0 \rightarrow (a, b) \cdot (2, 6) = 0 \rightarrow 2a + 6b = 0$$

Resolvemos el sistema:

$$a = 3, b = -1$$

16.-

Halla el ángulo que forman los vectores.

a) $\vec{a} = (-1, 5)$ y $\vec{b} = (3, 2)$

c) $\vec{e} = (-6, 4)$ y $\vec{f} = (-9, 6)$

b) $\vec{c} = (1, \sqrt{3})$ y $\vec{d} = (-1, \sqrt{3})$

d) $\vec{g} = (2, -5)$ y $\vec{h} = (4, 6)$

$$a) \cos \alpha = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{7}{\sqrt{26} \cdot \sqrt{13}} = 0,38 \rightarrow \alpha = 67^{\circ} 37' 11,51''$$

$$b) \cos \alpha = \frac{\vec{c} \cdot \vec{d}}{|\vec{c}| \cdot |\vec{d}|} = \frac{2}{\sqrt{4} \cdot \sqrt{4}} = 0,5 \rightarrow \alpha = 60^{\circ}$$

$$c) \cos \alpha = \frac{\vec{e} \cdot \vec{f}}{|\vec{e}| \cdot |\vec{f}|} = \frac{78}{\sqrt{52} \cdot \sqrt{117}} = 1 \rightarrow \alpha = 0^{\circ}$$

$$d) \cos \alpha = \frac{\vec{g} \cdot \vec{h}}{|\vec{g}| \cdot |\vec{h}|} = \frac{-22}{\sqrt{29} \cdot \sqrt{52}} = -0,56 \rightarrow \alpha = 124^{\circ} 30' 30,6''$$

17.-

Halla las coordenadas del punto simétrico de $P(-4, 2)$ respecto del punto $Q(5, -1)$.
Determina también el punto simétrico de $A(3, -2)$ respecto de $B(-3, 4)$.

Como $P(-4, 2)$ es el punto medio de $Q(5, -1)$ y $Q'(x, y)$:

$$(-4, 2) = \left(\frac{5+x}{2}, \frac{-1+y}{2} \right) \rightarrow \begin{cases} -4 = \frac{5+x}{2} \\ 2 = \frac{-1+y}{2} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = -13 \\ y = 5 \end{cases}$$

Y como $B(-3, 4)$ es el punto medio de $A(3, -2)$ y $A'(x, y)$:

$$(-3, 4) = \left(\frac{3+x}{2}, \frac{-2+y}{2} \right) \rightarrow \begin{cases} -3 = \frac{3+x}{2} \\ 4 = \frac{-2+y}{2} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = -9 \\ y = 10 \end{cases}$$

18.-

Si $A(3, 1)$, $B(5, 7)$ y $C(6, 4)$ son tres vértices consecutivos de un paralelogramo, ¿cuál es el cuarto vértice?

Calculamos el punto medio del segmento AC :

$$M = \left(\frac{3+6}{2}, \frac{1+4}{2} \right) = \left(\frac{9}{2}, \frac{5}{2} \right)$$

El cuarto vértice, $D(x, y)$, es simétrico de B respecto de M .

$$\left(\frac{9}{2}, \frac{5}{2} \right) = \left(\frac{5+x}{2}, \frac{7+y}{2} \right) \rightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = -2 \end{cases}$$

19.-

Calcula las coordenadas de los puntos que dividen el segmento de extremos $A(5, -1)$ y $B(17, 8)$ en tres partes iguales.

Calculamos el vector $\overrightarrow{AB}$: $\overrightarrow{AB} = (12, 9)$

El primer punto estará situado a $\frac{1}{3}$ de distancia de uno de los extremos

del segmento, y el segundo, a $\frac{2}{3}$ de distancia.

$$P_1 = A + \frac{1}{3} \overrightarrow{AB} = (5, -1) + \frac{1}{3} (12, 9) = (9, 2)$$

$$P_2 = A + \frac{2}{3} \overrightarrow{AB} = (5, -1) + \frac{2}{3} (12, 9) = (13, 5)$$

20.-

Demuestra que el triángulo de vértices $A(3, 1)$, $B(9, -1)$ y $C(5, -5)$ es isósceles. ¿Es equilátero? ¿Cuáles son sus lados iguales? Calcula su área.

Hallamos los vectores formados por los vértices del triángulo:

$$\overrightarrow{AB} = (6, -2), \overrightarrow{BC} = (-4, -4) \text{ y } \overrightarrow{AC} = (2, -6)$$

Calculamos los módulos de los vectores:

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{36 + 4} = \sqrt{40} \text{ u}$$

$$|\overrightarrow{BC}| = \sqrt{16 + 16} = \sqrt{32} \text{ u}$$

$$|\overrightarrow{AC}| = \sqrt{4 + 36} = \sqrt{40} \text{ u}$$

Como el triángulo tiene dos lados iguales, AB y AC , es un triángulo isósceles.

Para hallar el área calculamos la altura, h , sobre el lado BC aplicando el teorema de Pitágoras:

$$h = \sqrt{(\sqrt{40})^2 - \left(\frac{\sqrt{32}}{2}\right)^2} = \sqrt{40 - 8} = \sqrt{32} \text{ u}$$

$$A = \frac{B \cdot h}{2} = \frac{\sqrt{32} \cdot \sqrt{32}}{2} = 16 \text{ u}^2$$

21.-

Determina si el triángulo de vértices $A(12, 10)$, $B(20, 16)$ y $C(8, 32)$ es rectángulo.

Calculamos los vectores formados por los vértices del triángulo:

$$\overrightarrow{AB} = (8, 6), \overrightarrow{BC} = (-12, 16) \text{ y } \overrightarrow{AC} = (-4, 22)$$

Hallamos los módulos de los vectores:

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{64 + 36} = 10 \text{ u}$$

$$|\overrightarrow{BC}| = \sqrt{144 + 256} = \sqrt{400} = 20 \text{ u}$$

$$|\overrightarrow{AC}| = \sqrt{16 + 484} = \sqrt{500} \text{ u}$$

Si el triángulo es rectángulo, debe verificar el teorema de Pitágoras.

$$|\overrightarrow{AC}|^2 = |\overrightarrow{AB}|^2 + |\overrightarrow{BC}|^2$$

$$10^2 + 20^2 = 500$$

Luego el triángulo es rectángulo.

22.-

Escribe las ecuaciones vectorial y paramétricas de las rectas que cumplen estas condiciones.

a) Pasa por los puntos $(-3, 1)$ y $(5, 3)$.

b) Pasa por el punto $P(3, -4)$ y su vector director es $\vec{v} = (-2, 7)$.

c) Su ecuación explícita es $y = -3x + 4$.

a) Calculamos el vector director: $(8, 2)$

$$\text{Ecuación vectorial} \rightarrow (x, y) = (5, 3) + t(8, 2)$$

$$\text{Ecuaciones paramétricas} \rightarrow \begin{cases} x = 5 + 8t \\ y = 3 + 2t \end{cases}$$

b) Ecuación vectorial $\rightarrow (x, y) = (3, -4) + t(-2, 7)$

$$\text{Ecuaciones paramétricas} \rightarrow \begin{cases} x = 3 - 2t \\ y = -4 + 7t \end{cases}$$

c) Hallamos dos puntos de la recta: $A(0, 4)$ y $B(1, 1)$

$$\text{Calculamos el vector director: } \overrightarrow{AB} = (1, -3)$$

$$\text{Ecuación vectorial} \rightarrow (x, y) = (1, 1) + t(1, -3)$$

$$\text{Ecuaciones paramétricas} \rightarrow \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 - 3t \end{cases}$$

23.-

Expresa la ecuación continua de la recta que:

a) Pasa por los puntos $(8, 3)$ y $(1, 5)$.

b) Pasa por el punto $P(-2, 5)$ y tiene como vector director $\vec{v} = (3, -4)$.

c) Su ecuación general es $-2x + y + 7 = 0$.

a) Calculamos el vector director: $(-7, 2)$

$$\text{Ecuación continua} \rightarrow \frac{x - 8}{-7} = \frac{y - 3}{2}$$

$$\text{b) Ecuación continua} \rightarrow \frac{x + 2}{3} = \frac{y - 5}{-4}$$

c) Hallamos dos puntos de la recta: $A(0, -7)$ y $B(1, -5)$

$$\text{Calculamos el vector director: } \overrightarrow{AB} = (1, 2)$$

$$\text{Ecuación continua} \rightarrow \frac{x}{1} = \frac{y + 7}{2}$$

24.-

Escribe la ecuación explícita de la recta que:

a) Pasa por los puntos $(-3, 5)$ y $(3, -1)$.

b) Pasa por el punto $P(-1, 0)$ y tiene como vector director $\vec{v} = (-3, -2)$.

c) Su ecuación continua es $\frac{x}{-2} = \frac{y - 3}{5}$.

$$\text{a) } \begin{cases} y = mx + n \xrightarrow{(-3, 5)} 5 = -3m + n \\ y = mx + n \xrightarrow{(3, -1)} -1 = 3m + n \end{cases}$$

Resolviendo el sistema obtenemos: $m = -1$ y $n = 2 \rightarrow y = -x + 2$

b) Calculamos la pendiente: $m = \frac{2}{3}$

El punto $P(-1, 0)$ debe cumplir la ecuación de la recta.

$$y = \frac{2}{3}x + n \rightarrow 0 = -\frac{2}{3} + n \rightarrow n = \frac{2}{3}$$

Por tanto, la ecuación explícita de la recta es:

$$y = \frac{2}{3}x + \frac{2}{3}$$

$$c) \frac{x}{-2} = \frac{y-3}{5} \rightarrow 5x = -2y + 6 \rightarrow y = -\frac{5}{2}x + 3$$

25.-

Expresa en forma vectorial, paramétrica y continua la ecuación de la recta que:

a) Pasa por el punto $(1, 3)$ y es paralela a la recta $\frac{x+1}{2} = \frac{y-3}{-4}$.

b) Es paralela a la recta $5x - 2y + 12 = 0$ y pasa por el punto $(-2, 5)$.

a) Vector director de la recta: $(2, -4)$

Ecuación vectorial $\rightarrow (x, y) = (1, 3) + t(2, -4)$

Ecuaciones paramétricas $\rightarrow \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 3 - 4t \end{cases}$

Ecuación continua $\rightarrow \frac{x-1}{2} = \frac{y-3}{-4}$

b) Vector director de la recta: $(2, 5)$

Ecuación vectorial $\rightarrow (x, y) = (-2, 5) + t(2, 5)$

Ecuaciones paramétricas $\rightarrow \begin{cases} x = -2 + 2t \\ y = 5 + 5t \end{cases}$

Ecuación continua $\rightarrow \frac{x+2}{2} = \frac{y-5}{5}$

26.-

Expresa en forma explícita la recta que:

a) Pasa por el punto $(0, -1)$ y es paralela a la recta $\begin{cases} x = 2 + 3\lambda \\ y = -4 \end{cases}$.

b) Es paralela a la recta $\frac{x-3}{4} = \frac{y}{-1}$ y pasa por el punto $(5, -2)$.

a) Vector director de la recta: $(3, 0)$

Pendiente: $m = 0$

$-1 = 0x + n \rightarrow n = -1$

Ecuación explícita $\rightarrow y = -1$

b) Vector director de la recta: $(4, -1)$

Pendiente: $m = -\frac{1}{4}$

$-2 = -\frac{5}{4} + n \rightarrow n = -\frac{3}{4}$

Ecuación explícita $\rightarrow y = -\frac{1}{4}x - \frac{3}{4}$

27.-

Escribe la ecuación general de la recta que:

a) Pasa por el punto $(10, -2)$ y es paralela a la recta $\begin{cases} x = -1 - 3\lambda \\ y = 2 - 2\lambda \end{cases}$.

b) Es paralela a la recta $y = \frac{8x - 3}{2}$ y pasa por el punto $(4, 0)$.

a) Expresamos la recta en forma continua: $\frac{x - 10}{-3} = \frac{y + 2}{-2}$

Y la expresamos en forma general: $-2x + 20 = -3y - 6 \rightarrow -2x + 3y + 26 = 0$

b) Vector director de la recta: $(1, 4)$

Expresamos la recta en forma continua: $\frac{x - 4}{1} = \frac{y}{4}$

Y la expresamos en forma general: $4x - 16 = y \rightarrow 4x - y - 16 = 0$

28.-

Escribe las ecuaciones vectorial y paramétricas de la recta.

a) Pasa por el punto $(0, -3)$ y es perpendicular a la recta $\frac{x + 2}{-3} = \frac{y + 1}{4}$.

b) Pasa por el punto $(-5, 0)$ y es perpendicular a la recta $-3x - 2y + 7 = 0$.

a) Un vector perpendicular a $(-3, 4)$ es $(4, 3)$.

Ecuación vectorial $\rightarrow (x, y) = (0, -3) + t(4, 3)$

Ecuaciones paramétricas $\rightarrow \begin{cases} x = 4t \\ y = -3 + 3t \end{cases}$

b) Calculamos el vector director de la recta:

$A(1, 2), B(-1, 5) \rightarrow \overrightarrow{AB} = (-2, 3)$

Un vector perpendicular a $(-2, 3)$ es $(-3, -2)$

Ecuación vectorial $\rightarrow (x, y) = (-5, 0) + t(-3, -2)$

Ecuaciones paramétricas $\rightarrow \begin{cases} x = -5 - 3t \\ y = -2t \end{cases}$

29.-

Halla la ecuación explícita de la recta que:

a) Pasa por el punto $(2, -5)$ y es perpendicular a la recta $\frac{x + 1}{2} = \frac{y - 4}{-3}$.

b) Pasa por el punto $(-4, 8)$ y es perpendicular a la recta $-2x + 3y - 16 = 0$.

a) Calculamos el vector director de la recta: $\vec{u}_r = (3, 2)$

La pendiente de la recta es $m = \frac{2}{3}$.

Como pasa por el punto $(2, -5)$:

$-5 = \frac{2}{3} \cdot 2 + n \rightarrow n = -\frac{19}{3}$

La ecuación de la recta es $y = \frac{2}{3}x - \frac{19}{3}$.

b) Calculamos el vector director de la recta: $\vec{u}_r = (-2, 3)$

La pendiente de la recta es $m = -\frac{3}{2}$.

Como pasa por el punto $(-4, 8)$:

$$8 = -\frac{3}{2} \cdot (-4) + n \rightarrow n = 2$$

La ecuación de la recta es $y = -\frac{3}{2}x + 2$.

30.-

Determina la ecuación de una recta que pasa por los puntos $(-1, -10)$ y $(2, c)$, sabiendo que su pendiente es 7. Expresa la recta en forma continua y general.

Hallamos el vector director: $(3, c + 10)$

Como sabemos que la pendiente es: $7 = \frac{c + 10}{3} \rightarrow 21 = c + 10 \rightarrow c = 11$

$\vec{u}_r = (3, 21)$

Expresamos la recta en forma continua:

$$\frac{x + 1}{3} = \frac{y + 10}{21}$$

Y la expresamos en forma general:

$$21x + 21 = 3y + 30 \rightarrow 21x - 3y - 9 = 0$$

31.-

Determina la ecuación de la recta r , que es perpendicular a $s: 3x - 2y + 1 = 0$ y que pasa por el punto de coordenadas $P(0, 2)$.

Hallamos el vector director de la recta: $m = \frac{3}{2} \rightarrow (2, 3)$

Por tanto, un vector perpendicular a ella es vector director de la recta r .

$\vec{u}_r = (-3, 2)$

$$\left. \begin{array}{l} x = -3t \\ y = 2 + 2t \end{array} \right\}$$

32.-

Halla el valor que debe tomar k para que la recta $\frac{x + 1}{k} = \frac{y - 2}{3}$ sea paralela a $\left. \begin{array}{l} x = 3 - \lambda \\ y = 2 + 5\lambda \end{array} \right\}$.

Para que las rectas sean paralelas, los vectores directores deben ser proporcionales.

$$\frac{k}{-1} = \frac{3}{5} \rightarrow k = -\frac{3}{5}$$

33.-

Encuentra el valor de a para que la recta $ax + 3y - 7 = 0$ sea paralela

$$a \frac{x - 1}{5} = y + 2.$$

Para que las rectas sean paralelas, los vectores directores deben ser proporcionales.

$$\frac{-3}{5} = \frac{a}{1} \rightarrow a = -\frac{3}{5}$$

34.-

Determina la recta paralela a r que pasa por el punto simétrico de P respecto de la recta r .

a) $r: 2x - 3y + 10 = 0$ $P(4, -7)$

b) $r: \begin{cases} x = -2\lambda \\ y = 2 - \lambda \end{cases}$ $P(4, 4)$

c) $r: y = \frac{3x - 1}{4}$ $P(5, -9)$

a) Calculamos la recta s , perpendicular a r , y que pasa por P :

$$s: \frac{x - 4}{-2} = \frac{y + 7}{3}$$

Hallamos el punto de corte de las rectas:

$$\begin{cases} 2x - 3y + 10 = 0 \\ 3x - 12 = -2y - 14 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2x - 3y = -10 \\ 3x + 2y = -2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y = 2 \end{cases}$$

$(-2, 2)$ es el punto medio de P y su simétrico, P' , respecto de r .

Calculamos $P'(x, y)$:

$$(-2, 2) = \left(\frac{4 + x}{2}, \frac{-7 + y}{2} \right) \rightarrow \begin{cases} x = -8 \\ y = 11 \end{cases}$$

La recta es: $\begin{cases} x = -8 + 3\lambda \\ y = 11 + 2\lambda \end{cases}$

b) Calculamos la recta s , perpendicular a r , y que pasa por P :

$$s: \frac{x - 4}{1} = \frac{y - 4}{-2}$$

Hallamos el punto de corte de las rectas:

$$\frac{-2\lambda - 4}{1} = \frac{2 - \lambda - 4}{-2} \rightarrow \lambda = 2$$

$(-4, 0)$ es el punto medio de P y su simétrico, P' , respecto de r .

Calculamos $P'(x, y)$:

$$(-4, 0) = \left(\frac{4 + x}{2}, \frac{4 + y}{2} \right) \rightarrow \begin{cases} x = -12 \\ y = -4 \end{cases}$$

La recta es: $\begin{cases} x = -12 - 2\lambda \\ y = -4 - \lambda \end{cases}$

c) Calculamos la recta s , perpendicular a r , y que pasa por P :

$$s: \frac{x - 5}{-3} = \frac{y + 9}{4}$$

Hallamos el punto de corte de las rectas:

$$\begin{cases} 4y = 3x - 1 \\ 4x - 20 = -3y - 27 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -3x + 4y = -1 \\ 4x + 3y = -7 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = -1 \end{cases}$$

$(-1, -1)$ es el punto medio de P y su simétrico, P' , respecto de r .

Calculamos $P'(x, y)$:

$$(-1, -1) = \left(\frac{5+x}{2}, \frac{-9+y}{2} \right) \rightarrow \begin{cases} x = -7 \\ y = 7 \end{cases}$$

La recta es: $\begin{cases} x = -7 + 4\lambda \\ y = 7 + 3\lambda \end{cases}$

35.-

Encuentra el ángulo que forman la recta que pasa por los puntos $P(-1, 4)$ y $Q(3, 8)$

y la recta $\frac{x-3}{2} = \frac{y+2}{8}$.

$$\overrightarrow{PQ} = (4, 4), \overrightarrow{u_r} = (2, 8)$$

$$\cos \alpha = \frac{|d_1 \cdot c_1 + d_2 \cdot c_2|}{\sqrt{d_1^2 + d_2^2} \cdot \sqrt{c_1^2 + c_2^2}} = \frac{|4 \cdot 2 + 4 \cdot 8|}{\sqrt{4^2 + 4^2} \cdot \sqrt{2^2 + 8^2}} = \frac{40}{\sqrt{2 \cdot 176}}$$

$$\alpha = 30^\circ 57' 49,52''$$

36.-

Encuentra el valor de m para que $y = mx - 1$ forme un ángulo de 45°

con $\frac{x+2}{-3} = \frac{y-3}{6}$.

$$\overrightarrow{u_r} = (-3, 6), \overrightarrow{u_s} = (1, m)$$

$$\begin{aligned} \cos 45^\circ &= \frac{|d_1 \cdot c_1 + d_2 \cdot c_2|}{\sqrt{d_1^2 + d_2^2} \cdot \sqrt{c_1^2 + c_2^2}} \rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{|-3 \cdot 1 + 6 \cdot m|}{\sqrt{(-3)^2 + 6^2} \cdot \sqrt{1^2 + m^2}} \\ &\rightarrow m = 3, m = -\frac{1}{3} \end{aligned}$$

37.-

Obtén el valor que debe tener b para que la recta $3x + by + 6 = 0$ forme un ángulo de 60° con la recta $y = \frac{x+4}{-3}$.

$$\overrightarrow{u_r} = (-3, 1), \overrightarrow{u_s} = (b, -3)$$

$$\begin{aligned} \cos 60^\circ &= \frac{|d_1 \cdot c_1 + d_2 \cdot c_2|}{\sqrt{d_1^2 + d_2^2} \cdot \sqrt{c_1^2 + c_2^2}} \rightarrow \frac{1}{2} = \frac{|-3 \cdot b + 1 \cdot (-3)|}{\sqrt{(-3)^2 + 1^2} \cdot \sqrt{b^2 + (-3)^2}} \\ &\rightarrow m = \frac{-18 - 15\sqrt{3}}{13}, m = \frac{-18 + 15\sqrt{3}}{13} \end{aligned}$$

38.-

Halla la distancia del punto $P(4, -2)$ a las rectas.

a) $-6x + 8y - 5 = 0$ b) $\begin{cases} x = 2 - \lambda \\ y = 2 + 2\lambda \end{cases}$ c) $\frac{x-1}{3} = \frac{y-2}{6}$ d) $y = \frac{4x-5}{3}$

a) $d(P, r) = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{|-6 \cdot 4 + 8 \cdot (-2) - 5|}{\sqrt{(-6)^2 + 8^2}} = \frac{45}{10} = \frac{9}{2} u$

b) Calculamos la ecuación general de la recta:

$$-x + 2 = \frac{y - 2}{2} \rightarrow 2x + y - 6 = 0$$

$$d(P, r) = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{|2 \cdot 4 + 1 \cdot (-2) - 6|}{\sqrt{2^2 + 1^2}} = 0 \text{ u}$$

c) Hallamos la ecuación general de la recta:

$$6x - 6 = 3y - 6 \rightarrow 6x - 3y = 0 \rightarrow 2x - y = 0$$

$$d(P, r) = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{|2 \cdot 4 - 1 \cdot (-2)|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}} = \frac{10}{\sqrt{5}} = 2\sqrt{5} \text{ u}$$

d) Determinamos la ecuación general de la recta:

$$3y = 4x - 5 \rightarrow -4x + 3y + 5 = 0$$

$$d(P, r) = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{|-4 \cdot 4 + 3 \cdot (-2) + 5|}{\sqrt{(-4)^2 + 3^2}} = \frac{17}{5} \text{ u}$$

39.-

Calcula la distancia del origen de coordenadas a la recta que pasa por $(-3, 6)$

y es paralela a $\frac{x-1}{-6} = \frac{y-2}{8}$.

$$\text{Determinamos la recta pedida: } \frac{x+3}{-6} = \frac{y-6}{8}$$

Calculamos la ecuación general de la recta:

$$8x + 24 = -6y + 36 \rightarrow 8x + 6y - 12 = 0$$

$$d(P, r) = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{|8 \cdot 0 + 6 \cdot 0 - 12|}{\sqrt{8^2 + 6^2}} = \frac{12}{10} = \frac{6}{5} \text{ u}$$

40.-

¿Qué distancia hay entre los pares de rectas?

$$\text{a) } r: \begin{cases} x = -1 + 2\lambda \\ y = 3 + \lambda \end{cases} \quad s: -x + 2y + 5 = 0 \quad \text{c) } r: \begin{cases} x = 2 + 3\lambda \\ y = -1 - \lambda \end{cases} \quad s: y = \frac{-x-1}{3}$$

$$\text{b) } r: \frac{x+3}{2} = \frac{y-1}{6} \quad s: y = \frac{8x-3}{4}$$

a) $\vec{u}_r = (2, 1)$, $\vec{u}_s = (-2, -1)$. Los vectores son proporcionales. Un punto de r es $P(-1, 3)$

$$d(r, s) = \frac{12\sqrt{5}}{5}$$

b) $\vec{u}_r = (2, 6)$, $\vec{u}_s = (4, 8)$. Los vectores no son proporcionales; por tanto, las rectas son secantes.

c) $\vec{u}_r = (3, -1)$, $\vec{u}_s = (3, -1)$. Como los vectores son iguales, las rectas son paralelas o coincidentes.

$$\text{Tomamos un punto de la recta } r, A(2, -1), \text{ y vemos si pertenece a } s: -1 = \frac{-2-1}{3}.$$

Las rectas son coincidentes.

41.-

Calcula el valor de a para que la distancia del punto a la recta sea de 4 unidades.

$$r: 12x + 5y - 19 = 0 \quad P(3, a)$$

$$4 = \frac{|12 \cdot 3 + 5a - 19|}{\sqrt{12^2 + 5^2}} \rightarrow 52 = |17 + 5a|$$

$$a = 7, a = -\frac{69}{5}$$

42.-

Halla el valor de b para que la recta y el punto se encuentren a 5 unidades de distancia.

$$r: \frac{x+1}{b} = \frac{y+3}{3} \quad P(-4, 1)$$

Expresamos la recta en forma general:

$$3x + 3 = by + 3b \rightarrow 3x - by + 3 - 3b = 0$$

$$5 = \frac{|3 \cdot (-4) - b \cdot 1 + 3 - 3b|}{\sqrt{3^2 + (-b)^2}} \rightarrow 5\sqrt{9 + b^2} = |-9 - 4b|$$

$$9b^2 - 72b + 144 = 0 \rightarrow b = 4$$

43.-

Comprueba si están alineados los puntos $P(-1, 4)$, $Q(3, 1)$ y $R(11, -5)$.
En caso afirmativo, escribe la ecuación de la recta que los contiene.

Calculamos los vectores formados por los puntos:

$$\overrightarrow{PQ} = (4, -3)$$

$$\overrightarrow{PR} = (12, -9)$$

Como los vectores son proporcionales, los puntos están alineados.

Calculamos la ecuación de la recta que los contiene:

$$r: \begin{cases} x = -1 + 4\lambda \\ y = 4 - 3\lambda \end{cases}$$

44.-

Verifica si los puntos $(-4, -3)$, $(1, 4)$ y $(16, 23)$ están alineados. En caso afirmativo, escribe la ecuación de la recta.

Llamamos a los puntos:

$$P(-4, -3)$$

$$Q(1, 4)$$

$$R(16, 23)$$

Calculamos los vectores formados por los puntos:

$$\overrightarrow{PQ} = (5, 7)$$

$$\overrightarrow{PR} = (20, 26)$$

Como los vectores no son proporcionales, los puntos no están alineados.

45.-

Halla el área del triángulo cuyos vértices son $(2, 1)$, $(4, 3)$ y $(6, -1)$.

Llamamos a los puntos:

$$P(2, 1)$$

$$Q(4, 3)$$

$$R(6, -1)$$

Calculamos las longitudes de los lados:

$$\overrightarrow{PQ} = (2, 2) \quad \overrightarrow{PR} = (4, -2) \quad \overrightarrow{QR} = (2, -4)$$

$$|\overrightarrow{PQ}| = \sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{8}$$

$$|\overrightarrow{PR}| = \sqrt{4^2 + (-2)^2} = \sqrt{20}$$

$$|\overrightarrow{QR}| = \sqrt{2^2 + (-4)^2} = \sqrt{20}$$

Hallamos la altura sobre el lado desigual, utilizando el teorema de Pitágoras:

$$h = \sqrt{(\sqrt{20})^2 - \left(\frac{\sqrt{8}}{2}\right)^2} = \sqrt{18} u$$

Por tanto, el área es:

$$A = \frac{b \cdot h}{2} = \frac{\sqrt{8} \cdot \sqrt{18}}{2} = 6 u^2$$

46.-

Las rectas que contienen los lados de un triángulo son $x + y - 5 = 0$, $6x + 5y - 24 = 0$ y $2x + y - 8 = 0$. Calcula sus vértices y su área.

Hallamos los puntos de corte de las rectas:

$$\left. \begin{array}{l} x + y - 5 = 0 \\ 6x + 5y - 24 = 0 \end{array} \right\} \xrightarrow{x = -y + 5} 6(-y + 5) + 5y - 24 = 0 \rightarrow -y + 6 = 0$$

$$y = 6, x = -1$$

Las rectas se cortan en el punto $P(-1, 6)$.

$$\left. \begin{array}{l} x + y - 5 = 0 \\ 2x + y - 8 = 0 \end{array} \right\} \xrightarrow{x = -y + 5} 2(-y + 5) + y - 8 = 0 \rightarrow -y + 2 = 0$$

$$y = 2, x = 3$$

Las rectas se cortan en el punto $Q(3, 2)$.

$$\left. \begin{array}{l} 6x + 5y - 24 = 0 \\ 2x + y - 8 = 0 \end{array} \right\} \xrightarrow{y = -2x + 8} 6x + 5(-2x + 8) - 24 = 0 \rightarrow -4x + 16 = 0$$

$x = 4, y = 0 \rightarrow$ Las rectas se cortan en el punto $R(4, 0)$.

Calculamos las longitudes de los lados:

$$\overrightarrow{PQ} = (4, -4) \rightarrow |\overrightarrow{PQ}| = \sqrt{4^2 + (-4)^2} = \sqrt{32}$$

$$\overrightarrow{PR} = (5, -6) \rightarrow |\overrightarrow{PR}| = \sqrt{5^2 + (-6)^2} = \sqrt{61}$$

$$\overrightarrow{QR} = (1, -2) \rightarrow |\overrightarrow{QR}| = \sqrt{1^2 + (-2)^2} = \sqrt{5}$$

Hallamos la altura, h , sobre el lado mayor:

$$\left. \begin{aligned} (\sqrt{32})^2 &= x^2 + h^2 \\ (\sqrt{5})^2 &= (\sqrt{61} - x)^2 + h^2 \end{aligned} \right\} \rightarrow h = \frac{4\sqrt{61}}{61} u$$

Por tanto, el área es:

$$A = \frac{b \cdot h}{2} = \frac{\sqrt{61} \cdot \frac{4\sqrt{61}}{61}}{2} = 2 u^2$$

47.-

La recta que pasa por el punto $(2, 3)$ y es paralela a la recta $\frac{x-6}{4} = \frac{y+3}{-6}$ forma un triángulo con los ejes cartesianos. Calcula su área.

Calculamos la recta:

$$\left. \begin{aligned} x &= 2 + 4\lambda \\ y &= 3 - 6\lambda \end{aligned} \right\}$$

Determinamos el punto de corte con el eje X:

$$0 = 3 - 6\lambda \rightarrow \lambda = \frac{1}{2} \rightarrow P(4, 0)$$

Hallamos el punto de corte con el eje Y:

$$0 = 2 + 4\lambda \rightarrow \lambda = -\frac{1}{2} \rightarrow Q(0, 6)$$

Como el triángulo que se forma es rectángulo, el área es:

$$A = \frac{b \cdot h}{2} = \frac{6 \cdot 4}{2} = 12 u^2$$

48.-

Los puntos $(0, -2)$, $(1, 1)$, $(5, 2)$ y $(4, -1)$ son los vértices de un cuadrilátero. Obtén las ecuaciones de sus diagonales y su longitud. Indica de qué tipo de cuadrilátero se trata.

Llamamos a los puntos $A(0, -2)$, $B(1, 1)$, $C(5, 2)$ y $D(4, -1)$.

Calculamos las ecuaciones de sus diagonales:

$$\frac{x}{5} = \frac{y+2}{4}$$

$$\frac{x-1}{3} = \frac{y-1}{-2}$$

$$|\overrightarrow{AC}| = \sqrt{5^2 + 4^2} = \sqrt{41}$$

$$|\overrightarrow{BD}| = \sqrt{3^2 + (-2)^2} = \sqrt{13}$$

$$\overrightarrow{AB} = (1, 3) \quad \overrightarrow{DC} = (1, 3) \quad \overrightarrow{BC} = (4, 1) \quad \overrightarrow{AD} = (4, 1)$$

Es un paralelogramo.

49.-

Obtén la ecuación de la mediatriz del segmento cuyos extremos son $(1, 5)$ y $(-3, -7)$.

Llamamos a los puntos $P(1, 5)$ y $Q(-3, -7)$.

Calculamos el punto medio, M : $M(-1, -1)$

Hallamos el vector $\overrightarrow{PQ} = (-4, -12)$.

Un vector normal a $\overrightarrow{PQ}$ es $(-3, 1)$.

La ecuación de la mediatriz es:

$$\frac{x+1}{-3} = \frac{y+1}{1}$$

50.-

Calcula el valor de k para que las tres rectas: $2x + 5y - 1 = 0$, $-x + 2y + k = 0$ y $4x + 7y - 5 = 0$ se corten en el mismo punto. Determina las coordenadas de dicho punto.

Hallamos las coordenadas del punto de corte:

$$\left. \begin{array}{l} 2x + 5y - 1 = 0 \\ 4x + 7y - 5 = 0 \end{array} \right\} \rightarrow (3, -1)$$

$$-3 + 2 \cdot (-1) + k = 0 \rightarrow k = 5$$

51.-

Obtén los ángulos del triángulo cuyos vértices son $(3, -5)$, $(1, 6)$ y $(-3, 2)$.

Llamamos a los puntos $A(3, -5)$, $B(1, 6)$ y $C(-3, 2)$.

$$\overrightarrow{AB} = (-2, 11) \quad \overrightarrow{AC} = (-6, 7) \quad \overrightarrow{CB} = (4, 4)$$

$$\cos \alpha = \frac{|-2 \cdot (-6) + 11 \cdot 7|}{\sqrt{(-2)^2 + 11^2} \cdot \sqrt{(-6)^2 + 7^2}} \rightarrow \alpha = 30^\circ 17' 47,21''$$

$$\cos \beta = \frac{|-2 \cdot 4 + 11 \cdot 4|}{\sqrt{(-2)^2 + 11^2} \cdot \sqrt{4^2 + 4^2}} \rightarrow \beta = 55^\circ 18' 17,45''$$

$$180^\circ - 30^\circ 17' 47,21'' - 55^\circ 18' 17,45'' = 94^\circ 23' 55,34''$$

52.-

Halla un punto de la recta $2x - y + 18 = 0$ que equidiste de los puntos $(3, -1)$ y $(7, 3)$.

Despejamos y de la ecuación de la recta:

$$y = 2x + 18$$

Los puntos de la recta son de la forma: $(x, 2x + 18)$

Como los puntos deben estar a la misma distancia de la recta, tenemos que:

$$\sqrt{(x-3)^2 + (2x+18-(-1))^2} = \sqrt{(x-7)^2 + (2x+18-3)^2} \rightarrow x = -4$$

$$2 \cdot (-4) + 18 = 10$$

El punto es $(-4, 10)$.

53.-

Halla la ecuación de la recta que corta a los ejes de coordenadas en los puntos $(3, 0)$

y $(0, 5)$. Comprueba que esa ecuación puede escribirse en la forma: $\frac{x}{3} + \frac{y}{5} = 1$.

Comprueba que si una recta corta a los ejes en los puntos $(a, 0)$ y $(0, b)$, su ecuación puede escribirse en la forma: $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$.

Esta manera de escribir una recta se llama *forma canónica o segmentaria*.

Calculamos el vector director de la recta: $\vec{u}_r = (3, -5)$

$$\frac{x-3}{3} = \frac{y}{-5} \rightarrow \frac{x}{3} - 1 = -\frac{y}{5} \rightarrow \frac{x}{3} + \frac{y}{5} = 1$$

Hallamos el vector director de la recta:

$$\vec{u}_r = (a, -b)$$

$$\frac{x-a}{a} = \frac{y}{-b} \rightarrow \frac{x}{a} - \frac{a}{a} = -\frac{y}{b} \rightarrow \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$