7 Números complejos

ACTIVIDADES INICIALES

7.I. Clasifica los siguientes números, diciendo a cuál de los conjuntos numéricos pertenece (entendiendo como tal el menor conjunto).

a) $\frac{10}{3}$ b) 6 c) -3 d) $\sqrt{2}$ e) $\frac{-10}{2}$ f) π

a) Racional b) Natural c) Entero d) Irracional (real) e) Entero f) Irracional (real)

7.II. Calcula el módulo y el argumento de los siguientes vectores dados en coordenadas.

a) $\vec{u} = (-1, 2)$ b) $\vec{v} = (-1, -1)$ c) $\vec{w} = (2, -1)$

a) $|\vec{u}| = \sqrt{(-1)^2 + 2^2} = \sqrt{5}$; $\arg \vec{u} = \text{arc tg } \frac{2}{-1} = 116°33'$

b) $|\vec{v}| = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$; $\arg \vec{v} = \text{arc tg } \frac{-1}{-1} = 225°$

c) $\vec{w} = \sqrt{2^2 + (-1)^2} = \sqrt{5}$; $\arg \vec{w} = \text{arc tg } \frac{-1}{2} = 333°26'$

7.III. Calcula las coordenadas de un vector de módulo 5 y de argumento $\frac{2\pi}{3}$ radianes.

$$\vec{v} = 5\left(\cos \frac{2\pi}{3}, \text{sen } \frac{2\pi}{3}\right) = \left(\frac{-5}{2}, \frac{5\sqrt{3}}{2}\right)$$

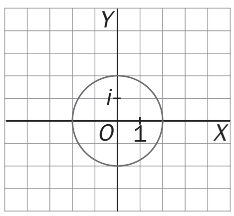
EJERCICIOS PROPUESTOS

7.1. Halla el conjugado, el opuesto y el módulo de cada uno de los siguientes números complejos.

a) $3 - i$ b) $-2 - \sqrt{2}i$ c) -5 d) $\sqrt{3}i$

	$\bar{z}$	$-z$	$\lvert z \rvert$
a) $3 - i$	$3 + i$	$-3 + i$	$\sqrt{3^2 + (-1)^2} = \sqrt{10}$
b) $-2 - \sqrt{2}i$	$-2 + \sqrt{2}i$	$2 + \sqrt{2}i$	$\sqrt{(-2)^2 + (-2)^2} = \sqrt{6}$
c) -5	-5	5	5
d) $\sqrt{3}i$	$-\sqrt{3}i$	$-\sqrt{3}i$	$\sqrt{3}$

7.2. Representa en el plano complejo el conjunto $A = \{z \in C: |z| = 2\}$.



7.3. Dados los números complejos $z = (5 + 7i)$ y $z' = \left(-\sqrt{3} + 2i\right)$, halla:

a) $z + z'$ c) $z \cdot z' \cdot z$ e) $2z - 5\bar{z}$

b) $z - z'$ d) z'^{-1} f) $z \cdot z'$

a) $z + z' = (5 + 7i) + \left(-\sqrt{3} + 2i\right) = 5 - \sqrt{3} + 9i$

b) $z - z' = (5 + 7i) - \left(-\sqrt{3} + 2i\right) = 5 + \sqrt{3} + 5i$

c) $z \cdot z' \cdot z = \left[-5\sqrt{3} - 14 + \left(10 - 7\sqrt{3}\right)i\right](5 + 7i) = 24\sqrt{3} - 140 - \left(70\sqrt{3} + 48\right)i$

d) $z'^{-1} = \dfrac{1}{z'} = \dfrac{1}{-\sqrt{3} + 2i} = \dfrac{-\sqrt{3} - 2i}{3 + 4} = \dfrac{-\sqrt{3} - 2i}{7}$

e) $2z - 5\bar{z} = 2(5 + 7i) - 5(5 - 7i) = -15 + 49i$

f) $z \cdot z' = (5 + 7i)\left(-\sqrt{3} + 2i\right) = -5\sqrt{3} - 14 + \left(10 - 7\sqrt{3}\right)i$

7.4. Calcula m y n para que sea cierta la igualdad: $(3m + 2i) - (5 - 2ni) = 2 - 6i$

$(3m + 2i) - (5 - 2ni) = 3m - 5 + (2 + 2n)i = 2 - 6i$

$$\begin{cases} 3m - 5 = 2 \\ 2 + 2n = -6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3m = 7 \\ 2n = -8 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} m = \dfrac{7}{3} \\ n = -4 \end{matrix}$$

7.5. Efectúa las siguientes operaciones con números complejos:

a) $\dfrac{-4 + 5i}{-2 + i}$ c) i^{1353} e) $\left(\dfrac{3\sqrt{3}}{2} + \dfrac{3i}{2}\right)^3$

b) $\dfrac{i^7 - i^{-7}}{2i}$ d) $(1 - 2i)^5$ f) $(\bar{3} + \bar{i})^{-2}$

a) $\dfrac{-4 + 5i}{-2 + i} = \dfrac{(-4 + 5i)(-2 - i)}{(-2 + i)(-2 - i)} = \dfrac{13}{5} - \dfrac{6}{5}i$

b) $\dfrac{i^7 - i^{-7}}{2i} = \dfrac{i^3 - \frac{1}{i^3}}{2i} = \dfrac{-i + \frac{1}{i}}{2i} = \dfrac{-i^2 + 1}{2i^2} = \dfrac{2}{-2} = -1$

c) $i^{1353} = i^{4 \cdot 338 + 1} = i$

d) $(1 - 2i)^5 = 1^5 - 5 \cdot 2i + 10 \cdot (2i)^2 - 10 \cdot (2i)^3 + 5 \cdot (2i)^4 - (2i)^5 = 1 - 10i - 40 + 80i + 80 - 32i =$
$= 41 + 38i$

e) $\left(\dfrac{3\sqrt{3}}{2} + \dfrac{3i}{2}\right)^3 = \left(\dfrac{3\sqrt{3}}{2}\right)^3 + 3\left(\dfrac{3\sqrt{3}}{2}\right)^2\dfrac{3i}{2} + 3\dfrac{3\sqrt{3}}{2}\left(\dfrac{3i}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{3i}{2}\right)^3 = \dfrac{81}{8}\sqrt{3} + \dfrac{243}{8}i - \dfrac{81}{8}\sqrt{3} - \dfrac{27}{8}i = \dfrac{216}{8}i = 27i$

f) $(\bar{3} + \bar{i})^{-2} = \dfrac{1}{(3 - i)^2} = \dfrac{1}{8 - 6i} = \dfrac{8 + 6i}{64 + 36} = \dfrac{2}{25} + \dfrac{3}{50}i$

7.6. Escribe de todas las formas posibles los siguientes números complejos.

a) i **b)** $4_{315°}$ **c)** $2\ (\cos 120° + i \text{ sen } 120°)$ **d)** $-\dfrac{\sqrt{2}}{2} - \dfrac{\sqrt{2}}{2}i$

a) $i = 1_{90°} = 1(\cos 90° + i \text{ sen } 90°)$

b) $4_{315°} = 4(\cos 315° + i \text{ sen } 315°) = 2\sqrt{2} - 2\sqrt{2}i$

c) $2(\cos 120° + i \text{ sen } 120°) = -1 + \sqrt{3}i = 2_{120°}$

d) $z = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} - \dfrac{\sqrt{2}}{2}i;\quad |z| = \sqrt{\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = 1;\quad \arg z = 225° \quad z = 1_{225°} = \cos 225° + i \text{ sen } 225°$

7.7. Dados los números complejos $z_1 = -3\sqrt{3} + 3i$, $z_2 = -i$ y $z_3 = -1 - i$

a) Pasa a forma trigonométrica y polar cada uno de los números complejos anteriores.

b) Calcula $z = z_1 \cdot z_2 \cdot z_3$. Expresa en forma trigonométrica y polar el número complejo z.

Calculamos el módulo y el argumento de cada uno de los números dados.

$|z_1| = \sqrt{(3\sqrt{3})^2 + 3^2} = 6 \qquad \arg(z_1) = \text{arc tg } -\dfrac{3}{3\sqrt{3}} = 150°$

$|z_2| = 1 \qquad \arg(z_2) = 270°$

$|z_3| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2} \qquad \arg(z_3) = \text{arc tg } \dfrac{1}{1} = 225°$

a) $z_1 = -3\sqrt{3} + 3\,i = 6_{150°} = 6(\cos 150° + i \text{ sen } 150°)$

$z_2 = i = 1_{270°} = \cos 270° + i \text{ sen } 270°$

$z_3 = -1 - i = \sqrt{2}_{225°} = \sqrt{2}(\cos 225° + i \text{ sen } 225°)$

b) $z = z_1 \cdot z_2 \cdot z_3 = \left(-3\sqrt{3} + 3i\right)(-i)(-1 - i) = -3 + 3\sqrt{3} - \left(3\sqrt{3} + 3\right)i$

En forma polar: $z = z_1 \cdot z_2 \cdot z_3 = 6_{150°} \cdot 1_{270°} \cdot \sqrt{2}_{225°} = 6\sqrt{2}_{645°} = 6\sqrt{2}_{285°} = 6\sqrt{2}(\cos 285° + i \text{ sen } 285°)$

Se comprueba que $|z| = \sqrt{(3 - 3\sqrt{3})^2 + (3\sqrt{3} + 3)^2} = 6\sqrt{2}$ y $\arg(z) = \text{arc tg } \dfrac{-3 - 3\sqrt{3}}{-3 + 3\sqrt{3}} = 285°$

7.8. Realiza las siguientes operaciones.

a) $6_{30°} \cdot 2_{120°}$ **c)** $6_{30°} : 2_{120°}$ **e)** $\left(-3\sqrt{2} + 3\sqrt{2}i\right)^4$

b) $4_{\frac{\pi}{2}} \cdot 5_{\frac{\pi}{4}}$ **d)** $4_{\frac{\pi}{2}} : 5_{\frac{\pi}{4}}$ **f)** $\dfrac{2_{60°} \cdot 45_{100°}}{3_{40°}}$

a) $6_{30°} \cdot 2_{120°} = 12_{150°}$

b) $4_{\frac{\pi}{2}} \cdot 5_{\frac{\pi}{4}} = 20_{\frac{3\pi}{4}}$

c) $6_{30°} : 2_{120°} = 3_{-90°} = 3_{270°}$

d) $4_{\frac{\pi}{2}} : 5_{\frac{\pi}{4}} = \left(\dfrac{4}{5}\right)_{\frac{\pi}{4}}$

e) $\left(-3\sqrt{2} + 3\sqrt{2}i\right)^4 = (6_{135°})^4 = 1296_{540°} = 1296_{180°}$

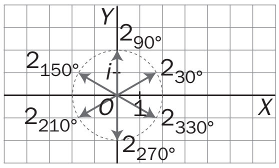
f) $\dfrac{2_{60°} \cdot 45_{100°}}{3_{40°}} = 30_{120°}$

7.9. Halla el valor de α para que el cociente $60_\alpha : 2_{\frac{\pi}{4}}$ sea:

a) Un número real positivo. b) Un número real negativo. c) Un número real imaginario puro positivo.

a) $\alpha - \frac{\pi}{4} = 0 \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{4}$ b) $\alpha - \frac{\pi}{4} = \pi \Rightarrow \alpha = \frac{5\pi}{4}$ c) $\alpha - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \alpha = \frac{3\pi}{4}$

7.10. Calcula y representa las raíces sextas de -64.



$-64 = 64_{180°} \rightarrow \sqrt[6]{64_{180°}} = \sqrt[6]{64}_{\frac{180° + 360°k}{6}} = 2_{30°+60°k}$, para $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$

Las raíces son $2_{30°}, 2_{90°}, 2_{150°}, 2_{210°}, 2_{270°}, 2_{330°}$

7.11. Halla las raíces cúbicas del complejo $-2\sqrt{3} + 2i$.

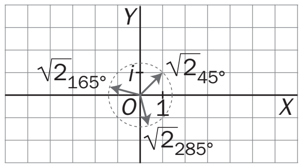
Sea $z = -2\sqrt{3} + 2i$; $|z| = \sqrt{(2\sqrt{3})^2 + 2^2} = 4$; $\arg z = \text{arc tg}\,\dfrac{2}{-2\sqrt{3}} = 150°$

Por tanto, $z = 4_{120°}$ $\sqrt[3]{-2\sqrt{3} + 2i} = \sqrt[3]{4_{150°}} = \begin{cases} \sqrt[3]{4}_{\,50°} \\ \sqrt[3]{4}_{\,170°} \\ \sqrt[3]{4}_{\,290°} \end{cases}$

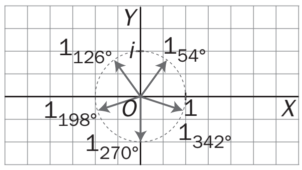
7.12. Calcula y representa las siguientes raíces.

a) $\sqrt[3]{-2 + 2i}$ b) $\sqrt[5]{\dfrac{1 - i}{1 + i}}$

$$\text{a) } \sqrt[3]{-2 + 2i} = \sqrt[3]{(\sqrt{8}_{135°})} = \sqrt{2}_{\frac{135°+360°k}{3}} = \begin{cases} \sqrt{2}_{45°} \\ \sqrt{2}_{165°} \\ \sqrt{2}_{285°} \end{cases}$$



$$\text{b) } \sqrt[5]{\frac{1 - i}{1 + i}} = \sqrt[5]{\frac{\sqrt{2}_{315°}}{\sqrt{2}_{45°}}} = \sqrt[5]{1_{270°}} = 1_{\frac{270°+360°k}{5}} = \begin{cases} 1_{54°} \\ 1_{126°} \\ 1_{198°} \\ 1_{270°} \\ 1_{342°} \end{cases}$$



7.13. Resuelve la ecuación: $z^3 - 2z^2 + 4z - 8 = 0$.

Si tiene raíces enteras, serán divisoras del término independiente. Por tanto, probaremos para $\pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 8$. $z = 2$ es una raíz, ya que $2^3 - 2 \cdot 2^2 + 4 \cdot 2 - 8 = 0$.

Si dividimos la ecuación inicial por el binomio $z - 2$, obtenemos: $z^3 - 2z^2 - 4z - 8 = (z - 2)(z^2 + 4) = 0$.

Luego las raíces son: $z_1 = 2$, $z_2 = +\sqrt{-4} = 2i$ y $z_3 = -\sqrt{-4} = -2i$.

7.14. Halla todas las raíces reales y complejas de la ecuación $z^4 - 16 = 0$.

$$z^4 = 16 \Rightarrow z = \sqrt[4]{16} = \sqrt[4]{16_{0°}} = 2_{\frac{0°+360° \cdot k}{4}} \begin{cases} 2_{0°} = 2 = z_1 \\ 2_{90°} = 2i = z_2 \\ 2_{180°} = -2 = z_3 \\ 2_{270°} = -2i = z_4 \end{cases}$$

7.15. Dada la ecuación $z^6 + 1 = 0$, ¿se puede resolver en el conjunto de los números reales? Halla todas las soluciones reales y complejas.

No se puede resolver en el conjunto R.

$z^6 = -1$; la unidad negativa es un complejo que tiene módulo 1 y argumento 180°. Por tanto:

$z = \sqrt[6]{-1} = \sqrt[6]{1_{180°}} = 1_{\frac{180°+360°k}{6}}$

$1_{30°} = 1(\cos 30° + i \operatorname{sen} 30°) = \dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2}i = z_1$

$1_{90°} = 1(\cos 90° + i \operatorname{sen} 90°) = i = z_2$

$1_{150°} = 1(\cos 150° + i \operatorname{sen} 150°) = -\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2}i = z_3$

$1_{210°} = 1(\cos 210° + i \operatorname{sen} 210°) = -\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2}i = z_4$

$1_{270°} = 1(\cos 270° + i \operatorname{sen} 270°) = -i = z_5$

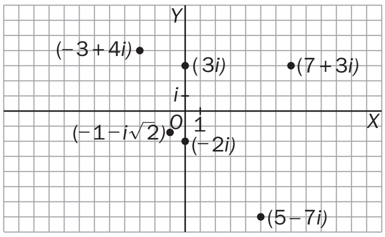
$1_{330°} = 1(\cos 330° + i \operatorname{sen} 330°) = \dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{1}{2}i = z_6$

EJERCICIOS

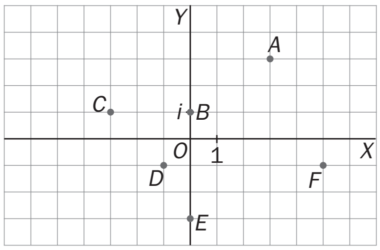
Números complejos en forma binómica

7.16. Representa los afijos de los siguientes números complejos:

a) $5 - 7i$
b) $-3 + 4i$
c) $3i$
d) $-2i$
e) $-1 - \sqrt{2}i$
f) $7 + 3i$



7.17. Escribe en forma binómica los números complejos cuyos afijos son los puntos A, B, C, D, E y F.



$A = 3 + 3i$
$B = i$
$C = -3 + i$
$D = -1 - i$
$E = -3i$
$F = 5 - i$

7.18. Escribe los complejos opuestos de los siguientes números complejos.

a) $2 - 7i$
b) $-\dfrac{5}{2} + 4i$
c) $3 - 11i$
d) 7
e) $-5i$
f) $\sqrt{2} + \sqrt{3}i$

a) $-2 + 7i$
b) $+\dfrac{5}{2} - 4i$
c) $-3 + 11i$
d) -7
e) $5i$
f) $-\sqrt{2} - \sqrt{3}i$

7.19. Halla los conjugados de los siguientes complejos.

a) $3 - 2i$
b) $-7 + 5i$
c) $-\dfrac{1}{3} + \sqrt{2}i$
d) $-5i$
e) $21 - \dfrac{1}{5}i$
f) $3i$

a) $3 + 2i$
b) $-7 - 5i$
c) $-\dfrac{1}{3} - \sqrt{2}i$
d) $5i$
e) $21 + \dfrac{1}{5}i$
f) $-3i$

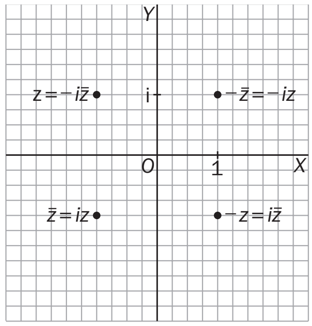
7.20. Dado el número complejo $z = -1 + i$:

a) Calcula el módulo de los siguientes complejos: z, $-z$, $\bar{z}$, $-\bar{z}$, iz, $-iz$, $i\bar{z}$, $-i\bar{z}$.

b) Representa sobre el plano los afijos de los complejos del apartado a.

a) En todos los casos, el módulo es el mismo que $|z| = \sqrt{2}$.

b)



7.21. Calcula las siguientes sumas.

a) $(2 - 3i) + (-2 + 6i)$

b) $(6 + 4i) + (-3 - 2i)$

c) $\left(\frac{3}{2} + i\right) + \left(-2 + \frac{1}{2}i\right)$

d) $\left(\sqrt{3} + 2i\right) + (1 - 5i)$

e) $i + (2 + 5i)$

f) $7 + (-10 + 3i)$

a) $(2 - 3i) + (-2 + 6i) = 3i$

b) $(6 + 4i) + (-3 - 2i) = 3 + 2i$

c) $\left(\frac{3}{2} + i\right) + \left(-2 + \frac{1}{2}i\right) = \frac{-1}{2} + \frac{3}{2}i$

d) $\left(\sqrt{3} + 2i\right) + (1 - 5i) = \left(\sqrt{3} + 1\right) - 3i$

e) $i + (2 + 5i) = 2 + 6i$

f) $7 + (-10 + 3i) = -3 + 3i$

7.22. Halla las siguientes diferencias.

a) $(2 - 3i) - (-2 + 6i)$

b) $(6 + 4i) - (-1 - 2i)$

c) $\left(-3 - \frac{1}{2}i\right) - \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{7}i\right)$

d) $\left(\sqrt{3} + 2i\right) - (1 - 5i)$

e) $(2i - 3) - \left(7 + \frac{1}{5}i\right)$

f) $-3i - (2i + 3)$

a) $(2 - 3i) - (-2 + 6i) = 4 - 9i$

b) $(6 + 4i) - (-1 - 2i) = 7 + 6i$

c) $\left(-3 - \frac{1}{2}i\right) - \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{7}i\right) = \frac{-10}{3} - \frac{9}{14}i$

d) $\left(\sqrt{3} + 2i\right) - (1 - 5i) = \left(\sqrt{3} - 1\right) + 7i$

e) $(2i - 3) - \left(7 - \frac{1}{5}i\right) = -10 + \frac{11}{5}i$

f) $-3i - (2i + 3) = -3 - 5i$

7.23. Realiza los siguientes productos.

a) $(2 - 3i) \cdot (-2 + 6i)$

b) $(6 + 4i) \cdot (-1 - 2i)$

c) $\left(-3 - \frac{1}{2}i\right) \cdot \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{7}i\right)$

d) $\left(\sqrt{3} + 2i\right) \cdot (1 - 5i)$

e) $(2i - 3) \cdot \left(7 + \frac{1}{5}i\right)$

f) $-3i \cdot (2i + 3)$

a) $(2 - 3i) \cdot (-2 + 6i) = 14 + 18i$

b) $(6 + 4i) \cdot (-1 - 2i) = 2 - 16i$

c) $\left(-3 - \frac{1}{2}i\right) \cdot \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{7}i\right) = -\frac{13}{14} - \frac{25}{42}i$

d) $\left(\sqrt{3} + 2i\right) \cdot (1 - 5i) = \sqrt{3} + 10 + \left(2 - 5\sqrt{3}\right)i$

e) $(2i - 3) \cdot \left(7 + \frac{1}{5}i\right) = -\frac{107}{5} + \frac{67}{5}i$

f) $-3i \cdot (2i + 3) = 6 - 9i$

7.24. Calcula el inverso de los siguientes complejos.

a) $2 - 5i$ c) $-4 - 2i$ e) $\frac{1}{3} - \frac{1}{2}i$

b) $-7 + 3i$ d) $-7i$ f) $\sqrt{2} - \sqrt{3}\,i$

a) $\frac{1}{2+5i} = \frac{2+5i}{(2-5i)(2+5i)} = \frac{2}{29} + \frac{5}{29}i$

b) $\frac{1}{-7+3i} = \frac{-7-3i}{(-7+3i)(-7-3i)} = -\frac{7}{58} - \frac{3}{58}i$

c) $\frac{1}{-4-2i} = \frac{(-4+2i)}{(-4-2i)(-4+2i)} = -\frac{1}{5} + \frac{1}{10}i$

d) $\frac{1}{-7i} = \frac{i}{-7\,i\,i} = \frac{1}{7}i$

e) $\frac{1}{\frac{1}{3} - \frac{1}{2}i} = \frac{\frac{1}{3} + \frac{1}{2}i}{\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2}i\right)\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2}i\right)} = \frac{12}{13} + \frac{18}{13}i$

f) $\frac{1}{\sqrt{2} - \sqrt{3}\,i} = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{3}\,i}{(\sqrt{2} - \sqrt{3}\,i)(\sqrt{2} + \sqrt{3}\,i)} = \frac{\sqrt{2}}{5} + \frac{\sqrt{3}}{5}i$

7.25. Calcula los siguientes cocientes.

a) $(2 - 3i) : (-2 + 6i)$ c) $\left(-3 - \frac{1}{2}i\right) : \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{7}i\right)$ e) $(2i - 3) : \left(7 + \frac{1}{5}i\right)$

b) $(6 + 4i) : (-1 - 2i)$ d) $\left(\sqrt{3} + 2i\right) : (1 - 5i)$ f) $-3i : (2i + 3)$

a) $\frac{2-3i}{-2+6i} = \frac{(2-3i)(-2-6i)}{(-2+6i)(-2-6i)} = -\frac{11}{20} - \frac{3}{20}i$

b) $\frac{6+4i}{-1-2i} = \frac{(6+4i)(-1+2i)}{(-1-2i)(-1+2i)} = -\frac{14}{5} + \frac{8}{5}i$

c) $\left(-3 - \frac{1}{2}i\right) : \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{7}i\right) = -\frac{945}{116} + \frac{231}{116}i$

d) $\frac{\sqrt{3} + 2\,i}{1-5i} = \frac{\left(\sqrt{3} + 2\,i\right)(1+5i)}{(1-5i)(1+5i)} = \frac{\sqrt{3}}{26} - \frac{5}{13} + \left(\frac{5\sqrt{3}}{26} + \frac{1}{13}\right)i$

e) $\frac{2i-3}{7 + \frac{1}{5}i} = \frac{(2i-3)\left(7 - \frac{1}{5}i\right)}{\left(7 + \frac{1}{5}i\right)\left(7 - \frac{1}{5}i\right)} = -\frac{515}{1226} + \frac{365}{1226}i$

f) $\frac{-3i}{2i+3} = \frac{-3i(3-2i)}{(3+2i)(3-2i)} = -\frac{6}{13} - \frac{9}{13}i$

7.26. Halla las siguientes potencias de *i*.

a) i^{37} c) i^{3259}

b) i^{214} d) i^{-23}

a) $i^{37} = i^{4\cdot 9+1} = i^1 = i$

b) $i^{214} = i^{53\cdot 4+2} = i^2 = -1$

c) $i^{3259} = i^{4\cdot 814+3} = i^3 = -i$

d) $i^{-23} = \frac{1}{i^{23}} = \frac{1}{i^{4\cdot 5+3}} = \frac{1}{i^3} = \frac{1}{-i} = \frac{i}{-i^2} = i$

7.27. Calcula las potencias de exponente 2, 3 y 4 de los siguientes números complejos.

a) $1 + i$ b) $2 + 3i$ c) $1 - i$ d) $-2 + i$

a) $(1 + i)^2 = 1 + 2i + 2i + i^2 = 2i$

$(1 + i)^3 = (1 + i)^2 (1 + i) = 2i (1 + i) = -2 + 2i$

$(1 + i)^4 = (1 + i)^2 (1 + i)^2 = 2i \cdot 2i = -4$

b) $(2 + 3i)^2 = 4 + 12i - 9 = -5 + 12i$

$(2 + 3i)^3 = (2 + 3i)^2 (2 + 3i) = (-5 + 12i) (2 + 3i) = -10 - 36 + 24i - 15i = -46 + 9i$

$(2 + 3i)^4 = (2 + 3i)^2 (2 + 3i)^2 = (-5 + 12i)^2 = 25 - 144 - 120i = -119 - 120i$

c) $(1 - i)^2 = 1 - 2i + i^2 = -2i$

$(1 - i)^3 = (1 - i)^2 (1 - i) = -2i (1 - i) = -2 - 2i$

$(1 - i)^4 = (1 - i)^2 (1 - i)^2 = (-2i) (-2i) = -4$

d) $(-2 + i)^2 = 4 - 4i + i^2 = 3 - 4i$

$(-2 + i)^3 = (-2 + i)^2 (-2 + i) = (3 - 4i) (-2 + i) = -6 + 4 + 3i + 8i = -2 + 11i$

$(-2 + i)^4 = (3 - 4i)^2 = 9 - 24i + 16i^2 = -7 - 24i$

7.28. Realiza las siguientes operaciones con complejos.

a) $(1 + i)^2 : (4 + i)$ b) $\dfrac{1}{i^9} + 5i^9$ c) $(i^5 + i^{-12})^3$ d) $\left(\dfrac{2i^5 + 3i^{17}}{1 + i}\right)^2$

a) $\dfrac{(1 + i)^2}{4 + i} = \dfrac{1 + 2i + i^2}{4 + i} = \dfrac{2i}{4 + i} = \dfrac{2i\,(4 - i)}{(4 + i)(4 - i)} = \dfrac{2 + 8i}{16 + 1} = \dfrac{2}{17} + \dfrac{8}{17}i$

b) $\dfrac{1}{i^9} + 5i^9 = \dfrac{1}{i} + 5i = \dfrac{1}{i^2} + 5i = -i + 5i = 4i$

c) $(i^5 + i^{-12})^3 = \left(i + \dfrac{1}{i^{12}}\right)^3 = (i + 1)^3 = i^3 + 3i^2 + 3i + 1 = -i - 3 + 3i + 1 = -2 + 2i$

d) $\left(\dfrac{2i^5 + 3i^{17}}{1 + i}\right)^2 = \left(\dfrac{2i + 3i}{1 + i}\right)^2 = \left(\dfrac{5i}{1 + i}\right)^2 = \dfrac{25i^2}{(1 + i)^2} = \dfrac{-25}{2i} = \dfrac{25}{2}i$

7.29. Calcula:

a) $(-i)^{361}$ b) i^{-346} c) $(-i)^{-15}$ d) $\dfrac{1}{i^{33}}$ e) $(i^{3\,742\,359\,768})^4$ f) $\dfrac{-1}{(-i)^{-11}}$

a) $(-i)^{361} = -i^{361} = -i^{4 \cdot 90+1} = -i$

b) $i^{-346} = \dfrac{1}{i^{346}} = \dfrac{1}{i^{4 \cdot 86+2}} = \dfrac{1}{i^2} = -1$

c) $(-i)^{-15} = \dfrac{1}{-i^{15}} = \dfrac{1}{-i^{3 \cdot 4+3}} = \dfrac{1}{-i^3} = -i$

d) $\dfrac{1}{i^{33}} = \dfrac{1}{i^{4 \cdot 8+1}} = \dfrac{1}{i} = \dfrac{i}{-1} = -i$

e) $(i^{3\,742\,359\,768})^4 = 1$

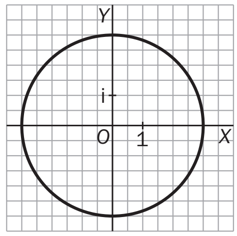
f) $\dfrac{-1}{(-i)^{11}} = \dfrac{-1}{-i^{4 \cdot 2+3}} = \dfrac{1}{i^3} = i$

7.30. Representa en el plano complejo los conjuntos de números que cumplen las siguientes condiciones.

a) $|z| = 3$ c) Parte real de $z = -5$ e) $\dfrac{z}{\bar{z}} = -1$

b) $\bar{z} \cdot z = 9$ d) Parte imaginaria de $z = 3$ f) $\dfrac{z}{\bar{z}} = i$

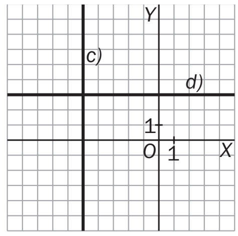
a) $|z| = 3$ Sea $z = x + yi$; $|z| = \sqrt{x^2 + y^2} = 3 \Rightarrow x^2 + y^2 = 9$
Es una circunferencia de centro el origen y radio 3.



b) $\bar{z} \cdot z = 9$ $(x - yi)\,(x + yi) = 9x^2 + y^2 = 9$
Se trata del mismo lugar geométrico que el del apartado anterior.

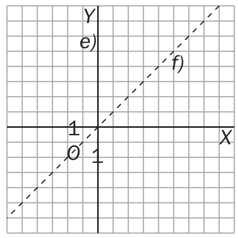
c) $x = -5$ Es una recta paralela al eje y.

d) $y = 3$ Es una recta paralela al eje x.



e) $\dfrac{z}{\bar{z}} = \dfrac{x + yi}{x - yi} = -1 \Rightarrow x + yi = -x + yi \Rightarrow 2x = 0$; $x = 0$. Es el eje y.

f) $\dfrac{z}{\bar{z}} = \dfrac{x + yi}{x - yi} = i \Rightarrow x + yi = xi + y \Rightarrow x = y$. Es la bisectriz de los cuadrantes primero y tercero.



Números complejos en forma polar

7.31. Calcula el módulo y el argumento de los siguientes números complejos representándolos previamente.

a) $1 - i$ c) i e) $-1 - i$

b) $1 + i$ d) $-i$ f) $-1 + i$

a) $z = 1 - i$; $|z| = \sqrt{2}$; $\arg z = 315°$

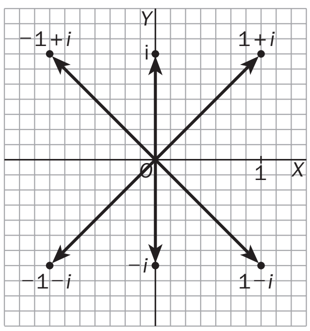
b) $z = 1 + i$; $|z| = \sqrt{2}$; $\arg z = 45°$

c) $z = i$; $|z| = 1$; $\arg z = 90°$

d) $z = -i$; $|z| = 1$; $\arg z = 270°$

e) $z = -1 - i$; $|z| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$; $\arg z = 225°$

f) $z = -1 + i$; $|z| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$; $\arg z = 135°$



7.32. Halla el módulo y el argumento de los siguientes números complejos.

a) -3 b) $5i$ c) $-7i$ d) $\sqrt{3}+i$ e) $2-\sqrt{3}i$ f) $2-2i$

a) $z = -3$; $|z| = 3$; $\arg z = 180°$

b) $z = 5i$; $|z| = 5$; $\arg z = 90°$

c) $z = -7i$; $|z| = 7$; $\arg z = 270°$

d) $z = \sqrt{3} + i$; $|z| = \sqrt{10}$; $\arg z = \text{arc tg } \dfrac{1}{\sqrt{3}} = 30°$

e) $z = 2 - \sqrt{3}i$; $|z| = \sqrt{7}$; $\arg z = \text{arc tg } \dfrac{-\sqrt{3}}{2} = \text{arc tg } \left(\dfrac{-\sqrt{3}}{2}\right) = -40°\ 53'\ 36{,}22''$

f) $z = 2 - 2i$; $|z| = 2\sqrt{2}$; $\arg z = \text{arc tg } \dfrac{-2}{2} = 315°$

7.33. Calcula las siguientes potencias.

a) $(1+i)^5$ b) $(2+2\sqrt{3}i)^2$ c) $(1+i)^{20}$ d) $(2+2\sqrt{3}i)^6$

a) $(1+i)^5 = \left(\sqrt{2}_{45°}\right)^5 = \left(4\sqrt{2}\right)_{5\cdot 45°} = \left(4\sqrt{2}\right)_{225°} = 4\sqrt{2}(\cos 225° + i \text{ sen } 225°) = 4\sqrt{2}\left(\dfrac{-\sqrt{2}}{2} - i\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) = -4 - 4i$

b) $\left(2 + 2\sqrt{3}i\right)^2 = 4 + 8\sqrt{3}i + 4 \cdot i^2 \cdot 3 = 4 - 12 + 8\sqrt{3}i = -8 + 8\sqrt{3}i$

c) $(1+i)^{20} = \left(\sqrt{2}_{45°}\right)^{20} = \left(\sqrt{2}\right)^{20}_{20\cdot 45°} = 1024_{900°} = 1024_{180°} = -1024$

d) $\left(2 + 2\sqrt{3}i\right)^6 = (4_{60°})^6 = (4^6)_{6\cdot 60°} = 4096_{0°} = 4096$

7.34. Calcula las siguientes raíces.

a) $\sqrt[3]{-1}$ c) $\sqrt{-36}$ e) $\sqrt[6]{729i}$

b) $\sqrt[4]{1+i}$ d) $\sqrt[3]{-27}$ f) $\sqrt[4]{16(\cos 180° + i \text{ sen } 180°)}$

a) $\sqrt[3]{-1} = \sqrt[3]{1_{180°}} \quad \begin{cases} 1_{60°} \\ 1_{180°} = -1 \\ 1_{300°} \end{cases}$

d) $\sqrt[3]{-27} = \sqrt[3]{27_{180°}} \quad \begin{cases} 3_{60°} \\ 3_{180°} = -3 \\ 3_{300°} \end{cases}$

b) $\sqrt[4]{1+i} = \sqrt[4]{\sqrt{2}_{45°}} \quad \begin{cases} \sqrt[8]{2}_{45°/4} \\ \sqrt[8]{2}_{405°/4} \\ \sqrt[8]{2}_{765°/4} \\ \sqrt[8]{2}_{1125°/4} \end{cases}$

e) $\sqrt[6]{729i} = \sqrt[6]{729_{90°}} \quad \begin{cases} 3_{15°} \\ 3_{75°} \\ 3_{135°} \\ 3_{195°} \\ 3_{255°} \\ 2_{315°} \end{cases}$

c) $\sqrt{-36} = \sqrt{36} \cdot \sqrt{-1} = \pm 6i$

f) $\sqrt[4]{16(\cos 180° + i \text{ sen } 180°)} = \sqrt[4]{16_{180°}} \quad \begin{cases} 2_{45°} \\ 2_{135°} \\ 2_{225°} \\ 2_{315°} \end{cases}$

7.35. Halla la potencia $(-1 + i)^{30}$.

$$(-1 + i)^{30} = \left(\sqrt{2}_{135°}\right)^{30} = \left(\sqrt{2}\right)^{30}_{30 \cdot 135°} = 2^{15} (\cos 4050° + i \operatorname{sen} 4050°) = 2^{15} (\cos 90° + i \operatorname{sen} 90°) =$$
$$= 2^{15} (0 + i1) = 2^{15}\, i = 32\,768i$$

7.36. Sea $z = 10 - 10\sqrt{3}i$. Calcula z^5 y $\sqrt[4]{z}$.

$$|z| = \sqrt{100 + 100 \cdot 3} = \sqrt{400} = 20$$

$$\alpha = \operatorname{arc\,tg} \frac{-10\sqrt{3}}{10} = \operatorname{arc\,tg} \left(-\sqrt{3}\right);\ \alpha = 300°$$

$$z^5 = (20_{300°})^5 = 20^5_{300° \cdot 5} = 20^5 (\cos 1500° + i \operatorname{sen} 1500°) = 20^5\left(\frac{1}{2} + i\,\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 16 \cdot 10^5 + 16 \cdot 10^5\sqrt{3}\, i$$

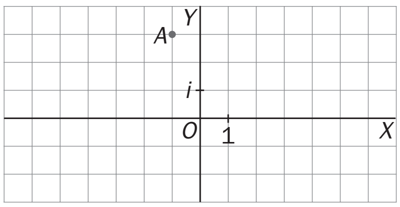
$$\sqrt[4]{z} = \sqrt[4]{20_{300°}} \qquad \begin{cases} \sqrt[4]{20}_{75°} \\ \sqrt[4]{20}_{165°} \\ \sqrt[4]{20}_{255°} \\ \sqrt[4]{20}_{345°} \end{cases}$$

7.37. Halla la potencia décima del número complejo $z = -\dfrac{1}{2} + i\,\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, expresando previamente el complejo en forma polar.

$$z = -\frac{1}{2} + i\,\frac{\sqrt{3}}{2}; \qquad |z| = 1;\ \arg z = \operatorname{arc\,tg} -\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = 120°$$

$$z^{10} = \left(-\frac{1}{2} + i\,\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{10} = (1_{120°})^{10} = 1_{1200°} = 1_{120°} = z$$

7.38. a) Escribe en forma binómica el número complejo cuyo afijo es el punto A.



b) Multiplica el complejo obtenido por el complejo $1_{90°}$.

c) Multiplica el complejo obtenido en el apartado *b* por el número complejo $1_{270°}$. ¿Qué obtienes?

a) $z_A = -1 + 3i$

b) Como $1_{90°} = i$, se tiene: $z_a \cdot 1_{90°} = (-1 + 3i)\, i = -3 - i$

c) $(-3 - i)\,(-i) = -1 + 3i = z_A$

Se obtiene el número complejo inicial, ya que el primer producto equivale a un giro de centro el origen y ángulo de 90°, y el segundo producto equivale a un giro de centro el origen y ángulo de 270°. Por tanto, al componer los dos movimientos se obtiene un giro de centro el origen y amplitud de 360°, es decir, la identidad.

7.39. Sea $z = -8\sqrt{3} - 8i$. Calcula $\sqrt[5]{z}$ y z^4.

$$|z| = \sqrt{64 \cdot 3 + 64} = 16; \quad \alpha = \text{arc tg}\,\frac{-8}{-8\sqrt{3}} = \text{arc tg}\,\frac{1}{\sqrt{3}} = 210°$$

$$\sqrt[5]{16}_{210°} = \begin{cases} \sqrt[5]{16}_{42°} \\ \sqrt[5]{16}_{114°} \\ \sqrt[5]{16}_{186°} \\ \sqrt[5]{16}_{258°} \\ \sqrt[5]{16}_{330°} \end{cases}$$

$$z^4 = (16_{210°})^4 = 16^4{}_{4 \cdot 210°} = 16^4\,(\cos 840° + i \,\text{sen}\, 840°) = 16^4\left(-\frac{1}{2} + i\,\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -32\,768 + 32\,768\,i$$

7.40. Halla las raíces cuartas de $\dfrac{i^5 - i^3}{1 + i}$.

$$\frac{i^5 - i^3}{1 + i} = \frac{i - (-i)}{1 + i} = \frac{2i}{1 + i} = \frac{2i(1 - i)}{(1 + i)(1 - i)} = 1 + i = \sqrt{2}_{45°} \to \sqrt[4]{\sqrt{2}_{45°}} = \sqrt[8]{2}_{\frac{45°+360°k}{4}} = \begin{cases} \sqrt[8]{2}_{11°15'} \\ \sqrt[8]{2}_{101°15'} \\ \sqrt[8]{2}_{191°15'} \\ \sqrt[8]{2}_{281°15'} \end{cases}$$

7.41. Halla las raíces cúbicas de los siguientes números complejos.

a) $\dfrac{27\sqrt{3}}{2} + \dfrac{27}{2}i$ b) $4 + 4\sqrt{3}\,i$ c) $\sqrt{2} + \sqrt{2}\,i$ d) $5 - 5i$

a) $\dfrac{27\sqrt{3}}{2} + \dfrac{27}{2}i = 27_{30°} \quad \Rightarrow \quad \sqrt[3]{27_{30°+n \cdot 360°}} = 3_{\frac{30°+360° \cdot n}{3}} = \{3_{10°}, 3_{130°}, 3_{250°}\}$

b) $4 + 4\sqrt{3}\,i = 8_{60°} \quad \Rightarrow \quad \sqrt[3]{8_{30°+360° \cdot n}} = 2_{\frac{60°+360° \cdot n}{3}} = \{2_{20°};\ 2_{140°};\ 2_{260°}\}$

c) $\sqrt{2} + \sqrt{2}\,i = 2_{45°} \quad \Rightarrow \quad \sqrt[3]{2_{45°+360° \cdot n}} = \{\sqrt[3]{2}_{15°};\ \sqrt[3]{2}_{135°};\ \sqrt[3]{2}_{225°}\}$

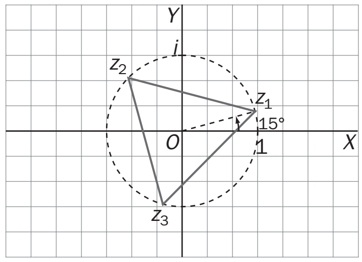
d) $5 - 5i = 5\sqrt{2}_{45°} \quad \Rightarrow \quad \sqrt[3]{5\sqrt{2}_{45°+360° \cdot n}} = \sqrt[6]{50}_{\frac{45°+360° \cdot n}{3}} = \{\sqrt[6]{50}_{15°};\ \sqrt[6]{50}_{135°};\ \sqrt[6]{50}_{255°}\}$

7.42. Un octógono regular inscrito en la circunferencia de radio 3 y centro el origen tiene uno de sus vértices en el afijo del número complejo $3_{45°}$. ¿Cuáles son los números complejos cuyos afijos ocupan los siete vértices restantes?

$(3_{45°})^8 = 3^8_{8 \cdot 45°} = 3^8_{360°} = 3^8$. Los números serán las raíces octavas de 3^8. Dado que conocemos una de ellas, $3_{45°}$, para obtener las demás solo hay que ir aplicando un giro centrado en el origen de ángulo $\dfrac{360°}{8} = 45°$.

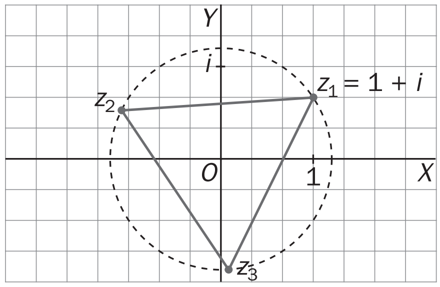
Los números restantes son $3_{90°} = 3i$, $3_{135°}$, $3_{180°} = -3$, $3_{225°}$, $3_{270°} = -3i$, $3_{315°}$ y $3_{360°} = 3$.

7.43. **Escribe en forma polar los números complejos cuyos afijos son los vértices del triángulo equilátero inscrito en la circunferencia de centro el origen O y radio 1 de la figura.**



El primer número es $1_{15°}$. Los otros dos se obtienen mediante giros de centro O y amplitud $\frac{360°}{3} = 120°$. Por tanto, serán $1_{135°}$ y $1_{255°}$.

7.44. **Los afijos de los números complejos z_1, z_2 y z_3 son los vértices de un triángulo equilátero cuyo incentro es el origen de coordenadas. Sabiendo que $z_1 = 1 + i$, calcula z_2 y z_3.**



$z_2 = z_1 \cdot 1_{120°} = (1 + i)\ 1(\cos 120° + i \text{ sen } 120°) = \frac{-1 - \sqrt{3}}{2} +$

$+ \frac{\sqrt{3} - 1}{2} i$

$z_3 = z_2 \cdot 1_{120°} = \left(\frac{-1 - \sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3} - 1}{2} i\right)(\cos 120° + i \text{ sen } 120°) =$

$= \frac{\sqrt{3} - 1}{2} + \frac{-\sqrt{3} - 1}{2} i$

Cada raíz se obtiene a partir de la anterior sin más que multiplicar por el número complejo de módulo1 y argumento 120°, que equivale a un giro de 120°. En forma polar, $z_1 = \sqrt{2}_{45°}$, $z_2 = \sqrt{2}_{165°}$, $z_3 = \sqrt{2}_{285°}$.

7.45. **Se considera el complejo $2 + 2\sqrt{3}i$; se gira 45º alrededor del origen de coordenadas en sentido contrario a las agujas del reloj. Halla el complejo obtenido después del giro.**

$2 + 2\sqrt{3}i = 4_{60°}$; $4_{60°} \cdot 1_{45°} = 4_{105°} = 4(\cos 105° + i \text{ sen } 105°) = (\sqrt{2} - \sqrt{6}) + (\sqrt{6} + \sqrt{2})i$

Resolución de ecuaciones

7.46. **Encuentra las ecuaciones de segundo grado cuyas raíces son las siguientes.**

a) $i, -1$ **b)** $1 + i, 1 - i$ **c)** $3 + 2i, 3 - 2i$ **d)** $\sqrt{2}_{45°}, \sqrt{2}_{315°}$

a) $(x - i)\ (x + i) = 0;\ x^2 + 1 = 0$

b) $(x - 1 - i)\ (x - 1 + i) = 0;\ x^2 - 2x + 2 = 0$

c) $(x - 3 + 2i)\ (x - 3 - 2i) = 0;\ x^2 - 6x + 13 = 0$

d) $\sqrt{2}_{45°} = 1 + i$; $\sqrt{2}_{315°} = 1 - i$, como en b

7.47. **Para cada uno de los siguientes números complejos, encuentra una ecuación cuadrática con coeficientes reales de la que sea solución:**

a) $\sqrt{5}i$ **b)** $2 - i$ **c)** $-1 - 3i$ **d)** $\frac{1}{2} + \frac{1}{3}i$

En todos los casos, la otra solución es el conjugado del número dado.

a) $(x - \sqrt{5}i)(x + \sqrt{5}i) = 0 \rightarrow x^2 + 5 = 0$

b) $(x - 2 + i)(x - 2 - i) = 0 \rightarrow x^2 - 4x + 5 = 0$

c) $(x + 1 + 3i)(x + 1 - 3i) = 0 \rightarrow x^2 + 2x + 10 = 0$

d) $\left(x - \frac{1}{2} - \frac{1}{3}i\right)\left(x - \frac{1}{2} + \frac{1}{3}i\right) = 0 \rightarrow 36x^2 - 36x + 13 = 0$

7.48. Resuelve las siguientes ecuaciones de segundo grado.

a) $x^2 + 16 = 0$

b) $x^2 - 4x + 53 = 0$

c) $x^2 + 6x + 25 = 0$

d) $16x^2 + 16x + 13 = 0$

a) $x^2 + 16 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 4i \\ x = -4i \end{cases}$

c) $x^2 + 6x + 25 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -3 + 4i \\ x = -3 - 4i \end{cases}$

b) $x^2 - 4x + 53 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 2 + 7i \\ x = 2 - 7i \end{cases}$

d) $16x^2 + 16x + 13 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{3}{4}i \\ x = -\dfrac{1}{2} - \dfrac{3}{4}i \end{cases}$

7.49. Resuelve las siguientes ecuaciones de tercer grado.

a) $x^3 = 8$

b) $x^3 = -i$

c) $x^3 - 8x^2 + 21x - 20 = 0$

d) $2x^3 + 14x^2 + 32x + 20 = 0$

Usando la regla de Ruffini se halla la raíz real, y se resuelve el polinomio de segundo grado restante.

a) $x^3 = 8 \Rightarrow \begin{cases} x = -1 - \sqrt{3}i \\ x = -1 + \sqrt{3}i \\ x = 2 \end{cases}$

b) $x^3 = -i \Rightarrow x = \sqrt[3]{-i} = \sqrt{1_{270°}} \Rightarrow \begin{cases} 1_{90°} = \cos 90° + i \operatorname{sen} 90° = i \\ 1_{210°} = \cos 210° + i \operatorname{sen} 210° = -\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2}i \\ 1_{330°} = \cos 330° + i \operatorname{sen} 330° = +\dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{1}{2}i \end{cases}$

c) $x^3 - 8x^2 + 21x - 20 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 2i \\ x = 2 - i \\ x = 4 \end{cases}$

d) $2x^3 + 14x^2 + 32x + 20 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -3 + i \\ x = -3 - i \\ x = -1 \end{cases}$

7.50. Resuelve las siguientes ecuaciones de cuarto grado.

a) $x^4 = -3$

b) $x^4 = 16$

c) $x^4 - 2x^3 + 6x^2 - 2x + 5 = 0$

d) $x^4 - 4x^3 + 4x^2 + 4x - 5 = 0$

a) $x^4 = -3 \Rightarrow x = \sqrt[4]{-3} = \sqrt[4]{3_{180°}} = \sqrt[4]{3}_{\frac{180°+360° \cdot k}{4}}$

Raíces: $\sqrt[4]{3}\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2} + \dfrac{\sqrt{2}}{2}i\right)$, $\sqrt[4]{3}\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2} - \dfrac{\sqrt{2}}{2}i\right)$, $\sqrt[4]{3}\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2} + \dfrac{\sqrt{2}}{2}i\right)$, $\sqrt[4]{3}\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2} - \dfrac{\sqrt{2}}{2}i\right)$

b) $x^4 = 16$; $x = \sqrt[4]{16} = \sqrt[4]{16_{0°}} = 2_{\frac{0°+360° \cdot k}{4}}$ $\quad x = 2$; $x = -2$; $x = 2i$; $x = -2i$

c) $x^4 - 2x^3 + 6x^2 - 2x + 5 = 0$

Dado que no tiene raíces reales, se puede dar la indicación de probar con $x = i$.

$x = 1 + 2i \qquad x = 1 - 2i \qquad x = i \qquad x = -i$

d) $x^4 - 4x^3 + 4x^2 + 4x - 5 = 0$; $x = 2 + i$; $x = 2 - i$; $x = -1$; $x = 1$

7.51. La ecuación $12x^3 - 49x^2 + 88x - 7 = 0$ tiene exactamente tres soluciones. ¿Pueden ser las tres imaginarias?

No, ya que si z es una solución, el conjugado de z también lo es. El número de raíces complejas debe ser par.

7.52. Halla todas las soluciones reales e imaginarias de estas ecuaciones.

a) $z^8 - 1 = 0$ c) $z^3 + 1 = 0$ e) $z^6 - 2i = 0$

b) $z^2 - 2z + 2 = 0$ d) $z^6 - 28z^3 + 27 = 0$ f) $z^4 - 5 + 5i = 0$

a) $z^8 - 1 = 0$; $z = \sqrt[8]{1} = \sqrt[8]{1_{0°}}$

$$\begin{cases} z_1 = 1_0 = 1;\ z_2 = 1_{45°} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} + i\dfrac{\sqrt{2}}{2};\ z_3 = 1_{90°} = i;\ z_4 = 1_{135°} = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} + i\dfrac{\sqrt{2}}{2};\ z_5 = 1_{180°} = -1; \\ z_6 = 1_{225°} = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} - i\dfrac{\sqrt{2}}{2};\ z_7 = 1_{270°} = -i;\ z_8 = 1_{315°} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} - i\dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

b) $z^2 - 2z + 2 = 0$; $z_1 = 1 + i$; $z_2 = 1 - i$

c) $z^3 + 1 = 0$; $z = \sqrt[3]{-1} = \sqrt[3]{1_{180°}}\ \left\{ z_1 = 1_{60°} = \dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}i;\ z_2 = 1_{180°} = -1;\ z_3 = 3_{300°} = \dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}i \right.$

d) $z^6 - 28z^3 + 27 = 0$; $z^3 = w$; $w^2 - 28w + 27 = 0$

$w = z^3 = 27$; $z = \sqrt[3]{27}\ \left\{ z_1 = 3_{0°} = 3;\ z_2 = 3_{120°} = -\dfrac{3}{2} + 3\dfrac{\sqrt{3}}{2}i;\ z_3 = 3_{240°} = -\dfrac{3}{2} - 3\dfrac{\sqrt{3}}{2}i \right.$

$w = z^3 = 1$; $z = \sqrt[3]{1}\ \left\{ z_4 = 1_{0°} = 1;\ z_5 = 1_{120°} = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}i;\ z_6 = 1_{240°} = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}i \right.$

e) $z^6 - 2i = 0$; $z^6 = 2i$; $z = \sqrt[6]{2}\,i$

$z = \sqrt[6]{2_{90°}}$; $\{z_1 = \sqrt[6]{2}_{15°}$; $z_2 = \sqrt[6]{2}_{75°}$; $z_3 = \sqrt[6]{2}_{135°}$; $z_4 = \sqrt[6]{2}_{195°}$; $z_5 = \sqrt[6]{2}_{255°}$; $z_6 = \sqrt[6]{2}_{213°}$

f) $z^4 - 5 + 5i = 0$; $z^4 = 5 - 5i$; $z = \sqrt[4]{5 - 5i}$

$z = \sqrt[4]{50_{315°}}\ \{z_1 = \sqrt[4]{50}_{78°45'}$; $z_2 = \sqrt[4]{50}_{168°45'}$; $z_3 = \sqrt[4]{50}_{258°45'}$; $z_4 = \sqrt[4]{50}_{348°45'}$

7.53. Comprueba que $\sqrt{2}\,i$ y $2 - i$ son soluciones de la ecuación $x^4 - 4x^3 + 7x^2 - 8x + 10 = 0$ y encuentra las otras soluciones.

$(\sqrt{2}i)^4 - 4(\sqrt{2}i)^3 + 7(\sqrt{2}i)^2 - 8\sqrt{2}i + 10 = 4 + 8\sqrt{2}i - 14 - 8\sqrt{2}i + 10 = 0$

$(2 - i)^4 - 4(2 - i)^3 + 7(2 - i)^2 - 8(2 - i) + 10 = (-7 - 24i) - (8 + 44i) + (21 - 28i) - (16 - 8i) + 10 = 0$

Las otras dos soluciones son los complejos conjugados de $\sqrt{2}i$ y $2 - i$, es decir, $-\sqrt{2}i$ y $2 + i$.

7.54. Resuelve la siguiente ecuación.

$$ix^2 - (2 + 2i)x + 2 - i = 0$$

$$ix^2 - (2 + 2i)x + 2 - i = 0 \rightarrow x = \frac{2 + 2i \pm \sqrt{(2 + 2i)^2 - 4 \cdot i \cdot (2 - i)}}{2i} = \frac{2 + 2i \pm \sqrt{-4}}{2i} =$$

$$= \frac{2 + 2i \pm 2i}{2i} = \frac{2i - 2 \pm 2}{2} = \begin{cases} -i \\ -2 + i \end{cases}$$

PROBLEMAS

7.55. Halla x para que el cociente $\frac{2+i}{x+i}$ sea un número complejo cuyo afijo se encuentra en la bisectriz del primero y tercer cuadrante.

$\frac{2+i}{x+i} = \frac{(2+i)(x-i)}{(x+i)(x-i)} = \frac{2x+1}{x^2+1} + \frac{x-2}{x^2+1}i$. Los afijos que se encuentran en la bisectriz del primero y tercer cuadrantes tienen sus coordenadas iguales; por tanto, $\frac{2x+1}{x^2+1} + \frac{x-2}{x^2+1} \Rightarrow 2x+1 = x-2 \Rightarrow x = -3$

7.56. Calcula x de manera que $\frac{x+i}{1-i}$ sea:

a) Igual a $1 + 2i$.

b) Un número real.

c) Un número imaginario puro.

a) $\frac{x+i}{1-i} = 1 + 2i \Rightarrow x + i = (1-i)(1+2i) = 3 + i \Rightarrow x = 3$

b) $\frac{x+i}{1-i} = \frac{(x+i)(1+i)}{(1-i)(1+i)} = \frac{x-1}{2} + \frac{x+1}{2}i$. Si tiene que ser un número real, $\frac{x+1}{2} = 0 \Rightarrow x = -1$

c) Si tiene que ser un número imaginario puro, $\frac{x-1}{2} = 0 \Rightarrow x = 1$

7.57. Calcula el cociente $\frac{a+i}{2+i}$ y determina el valor de a para que el módulo del mismo sea $\sqrt{2}$.

$\frac{a+i}{2+i} = \frac{(a+i)(2-i)}{(2+i)(2-i)} = \frac{2a+1}{5} + \frac{2-a}{5}i$; $\left(\frac{2a+1}{5}\right)^2 + \left(\frac{2-a}{5}\right)^2 = \left(\sqrt{2}\right)^2 \Rightarrow a = \pm 3$

7.58. El producto de dos números complejos es $4i$, y el cubo de uno de ellos, dividido por el otro, $\frac{1}{4}$. Halla los módulos y los argumentos de los complejos dados.

$$r_\alpha \cdot s_\beta = 4_{90^\circ} \rightarrow \begin{cases} rs = 4 \\ \alpha + \beta = 90^\circ + 360^\circ\, n \end{cases}$$

$$\frac{(r_\alpha)^3}{s_\beta} = \frac{1}{4} \rightarrow \begin{cases} \frac{r^3}{s} = \frac{1}{4} \\ 3\alpha - \beta = 0^\circ + 360^\circ\, m \end{cases}$$

$$\begin{cases} rs = 4 \rightarrow r(4r^3) = 4 \rightarrow r = 1 \rightarrow s = 4 \\ 4r^3 = s \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 90^\circ + 360^\circ\, n \\ 3\alpha - \beta = 0^\circ + 360^\circ\, m \end{cases} \rightarrow 4\alpha = 90^\circ + 360^\circ\, k \rightarrow \begin{cases} \alpha = \frac{0^\circ + 360^\circ k}{4} = 22^\circ\, 30' + 90^\circ\, k \\ \beta = 67^\circ\, 30' + 90^\circ\, k \end{cases}$$

7.59. Halla dos números cuyo cociente sea imaginario puro y cuya suma sea 5, sabiendo que el módulo del dividendo es doble del módulo del divisor.

Sean los números complejos $z = a + bi$ y $z' = c + di$; del enunciado se deduce:

$$\text{Re}\left(\frac{a+bi}{c+di}\right) = 0 \to \frac{ac}{c^2+d^2} + \frac{bd}{c^2+d^2} = 0 \to ac + bd = 0$$

$$(a + bi) + (c + di) = 5 \to \begin{cases} a + c = 5 \\ b + d = 0 \end{cases}$$

$$|z| = 2|z'| \to \sqrt{a^2+b^2} = 2\sqrt{c^2+d^2} \to a^2 + b^2 = 4c^2 + 4d^2$$

Se opera para dejar una ecuación con una sola incógnita.

$a = 5 - c$

$b = -d$

$ac + bd = 0 \to c(5 - c) - b^2 = 0 \to b^2 = c(5 - c)$

$a^2 + b^2 = 4c^2 + 4d^2 \to (5 - c)^2 + c(5 - c) = 4c^2 + 4c(5 - c) \to 25 = 25c \to c = 1$

$a = 5 - 1 = 4$

$b = \sqrt{4} = \pm 2$

$d = -b = \pm 2$

Solución: $(4 + 2i$ y $1 - 2i)$ o $(4 - 2i$ y $1 + 2i)$

7.60. Dados los números complejos $2 - mi$ y $3 - ni$, halla los valores que deben tener m y n para que el producto de los complejos dados sea igual a $8 + 4i$.

$$(2 - mi)(3 - mi) = 8 + 4i \to \begin{cases} 6 - mn = 8 \to mn = -2 \\ 3m + 2n = -4 \end{cases} \to$$

$$\to \begin{cases} n = \dfrac{-3m-4}{2} \\ m\left(\dfrac{-3m-4}{2}\right) = -2 \to 3m^2 + 4m - 4 = 0 \to \end{cases} \begin{cases} m = -2,\ n = 1 \\ m = \dfrac{2}{3},\ n = -3 \end{cases}$$

7.61. El producto de dos números complejos es −8. Halla sus módulos y argumentos, sabiendo que uno de ellos es el cuadrado del otro.

$$\begin{matrix} r_\alpha \cdot r'_{\alpha'} = -8 = 8_{180°} & \Rightarrow & r \cdot r' = 8 & \alpha + \alpha' = 180° + 360° \cdot n & \Rightarrow \\ (r_\alpha)^2 = r'_{\alpha'} & & r^2 = r' & 2\alpha = \alpha' & \end{matrix}$$

$$\Rightarrow \left.\begin{cases} r = 2; \quad r' = 4 \\ \alpha = 60° + 120° \cdot k; \quad \alpha' = 120° + 240° \cdot k,\ k = 0, 1, 2 \end{cases}\right\}$$

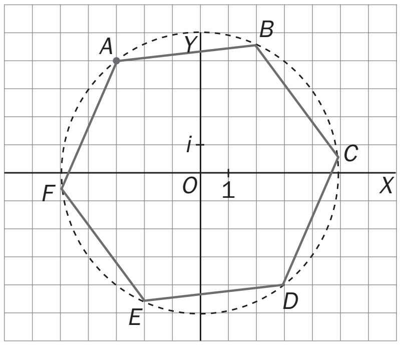
Se tienen las parejas de complejos: $2_{60°}$ y $4_{120°}$; $2_{180°}$ y $4_{0°}$; $2_{300°}$ y $4_{240°}$

7.62. Un cuadrado tiene su centro en el origen de coordenadas y un vértice en el punto (4, 0). Determina los complejos cuyos afijos sean los otros tres vértices.

Los otros afijos son (0, 4), (−4, 0) y (0, −4).

Por tanto, los complejos son $4i$, -4, $-4i$ y 4.

7.63. **Con la información de la figura, calcula las coordenadas de todos los vértices del hexágono regular con centro el origen que aparecen en ella.**



Si el vértice A corresponde al complejo $z_A = -3 + 4i$, para obtener los demás se realizan giros de centro el origen y ángulo $\frac{-360°}{6} = -60°$.

$r = |z_A| = 5$; $\alpha = \arg z = \text{arc tg } \frac{-4}{3} = 126°52'$

$z_B = 5_{\alpha-60°}$, $z_C = 5_{\alpha-120°}$, $z_D = 5_{\alpha-180°}$, $z_E = 5_{\alpha-240°}$, $z_F = 5_{\alpha-300°}$

También se puede operar en forma binómica. Por ejemplo,

$$z_B = z_A \cdot 1_{-60°} = (-3 + 4i)\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = \left(\frac{-3}{2} + 2\sqrt{3}\right) + \left(2 + \frac{3\sqrt{3}}{2}\right)i$$

7.64. **Halla dos números complejos sabiendo que su suma es $1 + 6i$ y que el cociente de los mismos es un número imaginario puro. Además, la parte real de uno de los sumandos es la unidad negativa.**

Los complejos serán de la forma $a + bi$, $c + di$.

$$(a + bi) + (c + di) = 1 + 6i \rightarrow \begin{cases} a + c = 1 \rightarrow c = 1 - a \\ b + d = 6 \end{cases}$$

$$\text{Re}\left(\frac{a + bi}{c + di}\right) = 0 \rightarrow ac + bd = 0$$

$$\text{Re}(a + bi) = -1 \rightarrow a = -1 \rightarrow c = 2 \rightarrow \begin{cases} b + d = 6 \\ -2 + bd = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} b = 6 - d \\ d(6 - d) = 2 \rightarrow d^2 - 6d + 2 = 0 \end{cases} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{cases} d = 3 + \sqrt{7} \rightarrow b = 3 - \sqrt{7} \\ d = 3 - \sqrt{7} \rightarrow b = 3 + \sqrt{7} \end{cases}$$

Entonces las soluciones son:

$z = -1 + (3 - \sqrt{7})i$ y $z' = 2 + (3 + \sqrt{7})i$ o bien $z = -1 + (3 + \sqrt{7})i$ y $z' = 2 + (3 - \sqrt{7})i$

7.65. **Halla dos números complejos z_1 y z_2 tales que $z_1 + z_2$ es imaginario puro, $z_1 \cdot z_2 = -8$ y $\frac{z_1}{z_2} = 8$. (Hay dos soluciones.)**

Se resuelve el sistema formado por las dos últimas ecuaciones, y se comprueba qué soluciones cumplen la primera condición.

$$\begin{cases} z_1 \cdot z_2 = -8 \\ \frac{z_1}{z_2} = 8 \rightarrow z_1 = 8z_2 \end{cases} \rightarrow 8z_2^2 = -8 \rightarrow z_2 = \pm i \rightarrow z_1 = \pm 8i$$

Hay dos soluciones: $z_1 = 8i$, $z_2 = i$ y $z_1 = -8i$, $z_2 = -i$. En los dos casos aparecen números imaginarios puros, luego su suma también lo es, por lo que verifican la primera condición.

7.66. Demuestra que $\sqrt{1 + \sqrt{-3}} - \sqrt{1 - \sqrt{-3}} = \sqrt{2}i$.

$$\left(\sqrt{1 + i\sqrt{3}} - \sqrt{1 - i\sqrt{3}}\right)^2 = 1 + i\sqrt{3} + 1 - i\sqrt{3} - 2\sqrt{(1 + i\sqrt{3})(1 - i\sqrt{3})} = 2 - 2\sqrt{4} = -2$$

Por tanto, $\sqrt{1 + i\sqrt{3}} - \sqrt{1 - i\sqrt{3}} = \sqrt{-2} = \sqrt{2}i$

7.67. Sea $z = \frac{-1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$.

a) Comprueba que $|z| = 1$ y que $z^2 = \overline{z}$.   b) Deduce $z^3 = 1$.   c) Calcula z^{3002}.

a) $|z| = \sqrt{\left(\frac{-1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}} = \sqrt{1} = 1$, $z^2 = \left(\frac{-1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^2 = \frac{1}{4} + \frac{3}{4}i^2 - 2\frac{1}{2}\frac{\sqrt{3}}{2}i =$

$= \frac{-2}{4} - \frac{\sqrt{3}}{2}i = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i = \overline{z}$

b) $z^3 = z^2 \cdot z = \overline{z} \cdot z = |z| = 1$

c) $z^{3002} = z^{3 \cdot 1000+2} = (z^3)^{1000} \cdot z^2 = 1^{1000} \cdot \overline{z} = \overline{z} = \frac{-1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$

7.68. Se multiplican los números complejos de los afijos de un triángulo equilátero de centro el origen por el número $1_{15°}$. Uno de los vértices del triángulo está en el afijo del número 3. ¿Cuáles son los números complejos que resultan tras el producto?

Si uno de los vértices corresponde a $3_{0°}$, su transformado será $3_{0°} \cdot 1_{15°} = 3_{15°}$ Los otros vértices transformados se obtienen aplicando un giro de centro el origen y ángulo $\frac{360°}{3} = 120°$. Se obtienen los números $3_{135°}$ y $3_{255°}$.

7.69*. Se dan los puntos $A(1_\pi)$, $B(2_{\frac{\pi}{2}})$ y $C\left(3\sqrt{2}_{\frac{\pi}{4}}\right)$ afijos de tres números complejos que determinan un paralelogramo $ABCD$. Calcula las coordenadas de D y las del centro del paralelogramo.

Pasamos a cartesianas las coordenadas polares:

$A(-1, 0)$; $B(0, 2)$; $C(3, 3)$

$AB = DC$: $(1, 2) = (3 - x, 3 - y) \Rightarrow x = 2;\ y = 1$ $D(2, 1)$

$AC = 2AM$: $(4, 3) = 2(x + 1, y) \Rightarrow x = 1;\ y = \frac{3}{2}$ $M\left(1, \frac{3}{2}\right)$

7.70. El origen de coordenadas O y el punto $A(2, 1)$ son vértices consecutivos de un cuadrado. Halla los otros dos vértices sabiendo que tienen su ordenada positiva.

Para obtener el vértice opuesto de A se aplica un giro de centro el origen y ángulo 90º.

$C = (1 + 2i) \cdot i = -2 + i = (-2, 1)$

El punto restante B puede obtenerse vectorialmente. $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} \rightarrow B = A + C = 2i = (0, 2)$.

7.71. La distancia del afijo P de un número complejo al origen es 5. Si se aplica un giro de 90° con centro el origen, se obtiene un punto P' de abscisa -3. Halla el número complejo cuyo afijo es el punto P.

Sea $z = a + bi$ el número complejo cuyo afijo es el punto P. Del enunciado se deduce:

$|z| = 5 \rightarrow \sqrt{a^2 + b^2} = 5$

$(a + bi) \cdot 1_{90^\circ} = (a + bi)i = -b + ai \rightarrow -b = -3 \rightarrow b = 3 \rightarrow a = \pm 4$

Por tanto, el número complejo pedido es $z = 4 + 3i$ o $z = -4 + 3i$.

(Conviene observar que realizar un giro de 90° equivale a multiplicar por el complejo 1_{90°, que es precisamente i).

7.72. Halla el lugar geométrico de los afijos de los números complejos de la forma $a + bi$ tales que $\frac{b}{a}$ sea constante.

Si $\frac{b}{a} = k$, quiere decir que arc tg $\frac{b}{a}$ = arc tg k, es decir, es el lugar geométrico de los puntos del plano que tienen tangente constante. Por tanto, se trata de una recta que pasa por el origen.

7.73. Demuestra que se verifican las siguientes igualdades de complejos:

a) $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$

b) $\overline{(\bar{z})} = z$

c) $\overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$

d)* $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$

e) $z \cdot \bar{z} = |z|^2$

f) $\overline{z^{-1}} = (\bar{z})^{-1}$

a) $z_1 = a + bi;\ z_2 = c + di \Rightarrow z_1 + z_2 = (a + c) + (b + d)i$

$\bar{z}_1 = a - bi;\ \bar{z}_2 = c - di \Rightarrow \bar{z}_1 + \bar{z}_2 = (a + c) - (b + d)i = \overline{z_1 + z_2}$

b) $z = r_\alpha;\ \bar{z} = r_{-\alpha} \Rightarrow \overline{(\bar{z})} = r_{-(-\alpha)} = r_\alpha = z.$

c) $z_1 = r_\alpha;\ z_2 = r'_{\alpha'};\ \Rightarrow z_1 \cdot z_2 = (r \cdot r')_{\alpha+\alpha'};$

$\bar{z}_1 = r_{-\alpha};\ \bar{z}_2 = r'_{-\alpha'};\ \Rightarrow \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2 = (r \cdot r')_{-\alpha-\alpha'} = \overline{z_1 \cdot z_2}$

d) $\frac{z_1}{z_2} = \left(\frac{r}{r'}\right)_{\alpha-\alpha'} \Rightarrow \overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \left(\frac{r}{r'}\right)_{-(\alpha-\alpha')} = \frac{r_\alpha}{r'_{-\alpha'}} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$

e) $z \cdot \bar{z} = r_\alpha \cdot r_{-\alpha} = r^2_{0^\circ} = |z|^2$

f) $z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{1}{r_\alpha} = \left(\frac{1}{r}\right)_{-\alpha} \Rightarrow \overline{z^{-1}} = \left(\frac{1}{r}\right)_\alpha = \frac{1}{r_\alpha} = r_{-\alpha} = (\bar{z})^{-1}$

7.74. Los afijos de tres números complejos forman un triángulo de vértices $A(3, 0)$, $B(-1, 4)$ y $C(0, -5)$. Si se multiplica cada uno de los números complejos por el número i, se obtienen otros tres números complejos cuyos afijos son A', B' y C', vértices del triángulo $A'B'C'$. Calcula las coordenadas de estos vértices.

$z_A = 3$; $\quad z_A \cdot i = 3i$

$z_B = -1 + 4i$; $\quad z_B \cdot i = (-1 + 4i)i = -4 - i$

$z_C = -5i$; $\quad z_C \cdot i = (-5i)i = 5$

El triángulo de vértices A', B' y C' es el que se obtiene al girar el triángulo inicial ABC en un giro de centro el origen y amplitud 90°.

PROFUNDIZACIÓN

7.75. Demuestra que para cualquier número natural n, la siguiente igualdad es cierta.

$$i^{2n} + i^{2n+1} + i^{2n+2} + i^{2n+3} = \frac{1}{i^{2n}} + \frac{1}{i^{2n+1}} + \frac{1}{i^{2n+2}} + \frac{1}{i^{2n+3}}$$

$i^{2n} + i^{2n+1} + i^{2n+2} + i^{2n+3} = i^{2n}(1 + i + i^2 + i^3) = i^{2n}(1 + i - 1 - i) = i^{2n} \cdot 0 = 0$

$$\frac{1}{i^{2n}} + \frac{1}{i^{2n+1}} + \frac{1}{i^{2n+2}} + \frac{1}{i^{2n+3}} = \frac{1}{i^{2n}} \cdot \frac{i^3}{i^3} + \frac{1}{i^{2n+1}} \cdot \frac{i^2}{i^2} + \frac{1}{i^{2n+2}} \cdot \frac{i}{i} + \frac{1}{i^{2n+3}} =$$

$$= \frac{i^3}{i^{2n+3}} + \frac{i^2}{i^{2n+3}} + \frac{i}{i^{2n+3}} + \frac{1}{i^{2n+3}} = \frac{i^3 + i^2 + i + 1}{i^{2n+3}} = \frac{-i - 1 + i + 1}{i^{2n+3}} = \frac{0}{i^{2n+3}} = 0$$

7.76. Halla un número complejo cuyo cubo es un número real y la componente real del mismo es superior en una unidad a la componente imaginaria.

$z = (a + 1) + ai$

$z^3 = (a + 1)^3 + 3(a + 1)^2 ai + 3(a + 1)a^2i^2 + a^3i^3 = (-2a^3 + 3a + 1) + (2a^3 + 6a^2 + 3a)i$

$$\text{Im}(z^3) = 0 \to 2a^3 + 6a^2 + 3a = 0 \to \begin{cases} a = 0 \to z = 1 \\ a = \dfrac{-3}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{2} \to z = \left(\dfrac{-1}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) + \left(\dfrac{-3}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)i \\ a = \dfrac{-3}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2} \to z = \left(\dfrac{-1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) + \left(\dfrac{-3}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)i \end{cases}$$

7.77. Demuestra que para el complejo $z = \cos a - i \operatorname{sen} a$ se verifica:

a) $\dfrac{1}{z} = \cos a + i \operatorname{sen} a$

b) $\dfrac{1}{\overline{z}} = \cos a - i \operatorname{sen} a$

c) Si $a = 45°$, halla las raíces cúbicas y de orden quinto del número complejo z.

a) $z = \cos a - i \operatorname{sen} a = \cos(-a) + i \operatorname{sen}(-a) = 1_{-a} \Rightarrow \dfrac{1}{z} = \dfrac{1}{1_a} = 1_a = \cos a + i \operatorname{sen} a$

b) $\overline{z} = \cos a + i \operatorname{sen} a = 1_a \Rightarrow \dfrac{1}{\overline{z}} = \dfrac{1}{1_a} = 1_{-a} = \cos(-a) + i \operatorname{sen}(-a) = \cos a - i \operatorname{sen} a$

c) $z = 1_{-45°} = 1_{315°}$ $\quad \sqrt[3]{1_{315°+360° \cdot n}} = \{1_{105°}; 1_{225°}; 1_{345°}\}$; $\quad \sqrt[5]{1_{315°+360° \cdot n}} = \{1_{63°}; 1_{135°}; 1_{207°}; 1_{279°}; 1_{351°}\}$

7.78. **Se multiplican los números complejos de los afijos de un triángulo equilátero de centro el origen de coordenadas por un número r_α, y los afijos del resultado están en los puntos medios de los lados del triángulo original. Calcula r_α.**

Dado que los afijos del resultado están en los puntos medios de los lados del triángulo original, $r = \dfrac{1}{2}$.

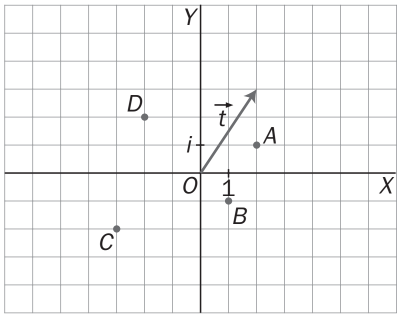
Para que los afijos del resultado estén en los lados del triángulo original, hay tres posibilidades: $\alpha = 0°$, $\alpha = 120°$ y $\alpha = 240°$.

7.79. **Una traslación se puede representar en el plano complejo como la suma de un número complejo fijo, cuyo afijo tiene por vector de posición el vector guía de la traslación. Sea $\vec{t} = (2, 3)$ el vector guía de una traslación.**

a) Escribe el número complejo equivalente a este vector guía.

b) Si los puntos A, B, C y D de la figura sufren una traslación de vector $\vec{t}$, escribe los complejos asociados a los puntos de partida y a los trasladados.

c) Si $P(4, -3)$ es un vértice de un pentágono regular centrado en el origen de coordenadas, encuentra las coordenadas de los vértices del pentágono formado a partir del anterior mediante una traslación de vector $\vec{t}$.



a) $z_{\vec{t}} = 2 + 3i$

b) $z_A = 2 + i \rightarrow z_{A'} = 4 + 4i$; $z_B = 1 - i \rightarrow z_{B'} = 3 + 2i$; $z_C = -3 - 2i \rightarrow z_{C'} = -1 + i$;
$z_D = -2 + 2i \rightarrow z_{D'} = 5i$

c) Los vértices del pentágono de partida se obtienen mediante giros de centro el origen de coordenadas y ángulo $\dfrac{360°}{5} = 72°$.

Sumando a cada uno $z_{\vec{t}} = 2 + 3i$ se obtienen los vértices del pentágono trasladado.

Si $z_P = 4 - 3i$, $\arg(z_P) = \text{art tg}\,\dfrac{-3}{4} = -36°52'$

Vértices trasladados:

$z_P = 4 - 3i \rightarrow z'_P = 6$

$z_1 = z_P \cdot 1_{72°} = 5_{-36°52'+72°} = 5_{35°8'} = 4 + 2{,}9i \rightarrow z'_1 = 6 + 5{,}9i$

$z_2 = z_P \cdot 1_{144°} = 5_{-36°52'+144°} = 5_{107°8'} = -1{,}5 + 4{,}8i \rightarrow z'_2 = 0{,}5 + 7{,}8i$

$z_3 = z_P \cdot 1_{216°} = 5_{-36°52'+216°} = 5_{179°8'} = -5 + 0{,}1i \rightarrow z'_3 = -3 + 3{,}1i$

$z_4 = z_P \cdot 1_{288°} = 5_{-36°52'+288°} = 5_{251°8'} = -1{,}6 - 4{,}7i \rightarrow z'_4 = 0{,}4 - 1{,}7i$

7.80. **El punto P' se ha obtenido girando el punto P un ángulo α, con centro de giro en el punto C. Si z, z' y z_c son los números complejos cuyos afijos son los puntos P, P' y C, demuestra que se cumple:**

$$z' = (z - z_c) \cdot 1_\alpha + z_c$$

Aplica este resultado para hallar el triángulo que se forma al girar 90º respecto del punto $C(2, 1)$ el triángulo de vértices $A(0, 2)$, $B(-2, 1)$ y $O(0, 0)$.

Los afijos de los números complejos $z - z_c$ y $z' - z_c$ son los puntos trasladados de P y P' según un vector $-\overrightarrow{OC}$.

El trasladado de C siguiendo este mismo vector es el origen de coordenadas.

Como la traslación conserva los ángulos, $z' - z_c = (z - z_c) \cdot 1_\alpha \rightarrow z' = (z - z_c) \cdot 1_\alpha + z_c$

Los vértices correspondientes son:

$z_{A'} = (z_A - z_C) \cdot 1_{90°} + z_C = (2i - (2 + i))i + 2 + i = -1 - 2i + 2 + i = 1 - i$

$z_{B'} = (-2 + i - (2 + i))i + 2 + i = -4i + 2 + i = 2 - 3i$

$z_{O'} = (0 - (2 + i))i + 2 + i = 1 - 2i + 2 + i = 3 - i$

7.81. Sea $z = x + yi$ un número complejo, y $z' = x' + y'i$ su transformado por un movimiento en el plano. Demuestra que las siguientes igualdades representan los movimientos que se describen a continuación.

a) $z' = -z$. Simetría respecto al origen.

b) $z' = \bar{z}$. Simetría respecto el eje de abscisas.

c) $z' = z + a$, siendo $a = a_1 + a_2 i$. Traslación de vector guía $\vec{v} = (a_1, a_2)$.

d) $z' = 1_\alpha z$. Giro de centro el origen y amplitud α.

e) $z' = kz$, siendo k un número real no nulo. Homotecia de centro el origen y razón k.

a) $z' = -z$ $\quad x' + y'i = -(x + yi) = -x - yi \Rightarrow x' = -x, y' = -y$

Por tanto, es una simetría respecto del origen.

b) $z' = \bar{z}$ $\quad x' + y'i = x - yi \Rightarrow x' = x, y' = -y$

Por tanto, es una simetría respecto del eje de abscisas.

c) $z' = z + a, a = a_1 + a_2 i$ $\quad x' + y'i = (x + yi) + (a_1 + a_2 i) \Rightarrow x' = x + a_1; y' = y + a_2$

Por tanto, es una traslación de vector guía $\vec{v} = (a_1, a_2)$.

d) $z' = 1_\alpha z$ $\quad \arg z' = \arg 1_\alpha + \arg z = \alpha + \arg (z); |z'| = 1; |z'| = z$

Por tanto, es un giro de centro el origen y amplitud α.

Sustituyendo en la igualdad dada, obtenemos sus ecuaciones:

$x' + y'i = (\cos \alpha + i \operatorname{sen} \alpha)(x + yi) = x \cos \alpha - y \operatorname{sen} \alpha + (x \operatorname{sen} \alpha + y \cos \alpha)i$

$\Rightarrow x' = x \cos \alpha - y \operatorname{sen} \alpha$

$y' = x \operatorname{sen} \alpha + y \cos \alpha$

e) $z' = kz$ $\quad k \in R - \{0\}$

$x' + y'i = k(x + yi) = kx + kyi \Rightarrow x' = kx; y' = ky$

Por tanto, es una homotecia de centro el origen y razón k.

7.82. Sea $z = x + yi$ un número complejo, y $z' = x' + y'i$, su complejo transformado en un movimiento cuyas ecuaciones vienen dadas por las relaciones:

a) $z' = 3\overline{z}$

b) $z' = \dfrac{1}{2}z + 2 + 3i$

c) $z' = -5z$

d) $z' = 1_{30°}\, 2z$

Indica en cada caso de qué movimiento o movimientos sucesivos se trata y halla las coordenadas del transformado del punto $P(2, -3)$ en cada movimiento.

a) $z' = 3\overline{z} = 3\,(x - yi) = 3x - 3yi \quad \rightarrow \quad x' = 3x \quad y' = -3y$

Movimientos: 1.º Simetría respecto del eje de abscisas.
2.º Homotecia de centro el origen y $k = 3$

El transformado de $P(2, -3)$ es $P'(6, 0)$.

b) $z' = \dfrac{1}{2}(x + yi) + (2 + 3i) = \dfrac{1}{2}[(x + 4) + (y + 6)i] = \dfrac{x + 4}{2} + \dfrac{y + 6}{2}i \rightarrow x' = \dfrac{x + 4}{2},\ y' = \dfrac{y + 6}{2}$

Movimientos: 1.º Traslación vector guía $\vec{v}\,(4, 6)$
2.º Homotecia $k = \dfrac{1}{2}$

El transformado de $P(2, -3)$ es $P'\left(3, \dfrac{3}{2}\right)$.

c) $z' = -5z = -5(x + yi) = -5x - 5yi \rightarrow x' = -5x,\ y' = -5y$

Movimientos: 1.º Homotecia $k = 5$
2.º Simetría respecto del origen

El transformado de $P(2, -3)$ es $P'(-10, 15)$.

d) $z' = 1_{30°}\, 2z = (2\,|z|)_{30°+\arg z}$

Movimientos: 1.º Homotecia $k = 2$
2.º Giro de centro el origen y amplitud 30°
$x' = 2(x \cos 30° - y \operatorname{sen} 30°)$
$y' = 2(x \operatorname{sen} 30° + y \cos 30°)$

$x' = 2 \cdot 2\dfrac{\sqrt{3}}{2} - (-3)\, 2\dfrac{1}{2}$ $\qquad x' = 2\sqrt{3} + 3$

$y' = 2 \cdot 2\dfrac{1}{2} + (-3)\, 2\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ $\qquad y' = 2 - 3\sqrt{3}$

El transformado de $P(2, -3)$ es $P'\left(2\sqrt{3} + 3,\ 2 - 3\sqrt{3}\right)$.