

## 1.- NÚMEROS COMPLEJOS

- Halla la parte real e imaginaria de los números complejos: a)  $3-i$ , b)  $-2+i$ , c)  $5+2i$ .  
*Solución:*  $Re(a) = 3$ ,  $Im(a) = -1$ ,  $Re(b) = -2$ ,  $Im(b) = 1$ ,  $Re(c) = 5$ ,  $Im(c) = 2$ .
- Halla la parte real e imaginaria de los números complejos: a)  $3i$ , b)  $5$ , c)  $i + \sqrt{2}$ .  
*Solución:*  $Re(a) = 0$ ,  $Im(a) = 3$ ,  $Re(b) = 5$ ,  $Im(b) = 0$ ,  $Re(c) = \sqrt{2}$ ,  $Im(c) = 1$ .
- Representa gráficamente los números complejos de los ejercicios anteriores.
- Obtén las soluciones de las siguientes ecuaciones y represéntalas:  
a)  $x^2 + 9 = 0$     b)  $x^2 - 4x + 5 = 0$     c)  $2x^2 + 8 = 0$     d)  $2x^2 - 8 = 0$
- Representa gráficamente el opuesto y el conjugado de:  
a)  $2-5i$                       b)  $4+2i$   
c)  $1-2i$                       d)  $-3+2i$   
e)  $4$                               f)  $2$   
g)  $3i$                              h)  $-4i$

## 2.- OPERACIONES CON NÚMEROS COMPLEJOS

- ¿Cuánto ha de valer  $m$  para que el complejo  $z = (m-2i) \cdot (2+4i)$  sea un número real?  
*Solución:*  $m = 1$ .
- Efectúa la operación  $\frac{(5-3i)(1+i)}{(1-i)+3i}$   
*Solución:*  $\frac{12-14i}{5}$
- Determina el valor de  $m$  para que el número complejo  $z = \frac{2-mi}{8-6i}$  sea:  
a) un número real  
b) imaginario puro  
c) tal que su afijo esté en la bisectriz del segundo y cuarto cuadrantes.  
*Solución:* a)  $m = \frac{3}{2}$ , b)  $m = -\frac{8}{3}$ , c)  $m = 14$
- Determina el valor de  $a$  para que el número complejo  $z = (3-6i) \cdot (2-mi)$  sea:  
a) un número real  
b) imaginario puro  
c) tal que su afijo esté en la bisectriz del primer y tercer cuadrante.  
*Solución:* a)  $m = -4$ , b)  $m = 1$ , c)  $m = 6$
- Resuelve las siguientes ecuaciones: a)  $x^2+1 = 0$ , b)  $x^2-2x+2 = 0$ .  
Representa sus soluciones en el plano complejo. ¿Qué relación hay entre las soluciones de cada ecuación?  
*Solución:* a)  $z_1 = i$ ,  $z_2 = -i$ ; b)  $z_1 = 1+i$ ,  $z_2 = 1-i$ . Son complejos conjugados.
- 6.- Calcula el inverso de a)  $z = 1-i$ , b)  $z = 3i$ .  
*Solución:* a)  $\frac{1}{z} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$ , b)  $\frac{1}{z} = -\frac{1}{3}i$
- Halla un número complejo tal que  $|z| = 3$  e  $Im(z) = -2$ .

Solución:  $z_1 = \sqrt{5} - 2i$ ,  $z_2 = -\sqrt{5} - 2i$

13. Calcula el módulo y el argumento de los números complejos.

a)  $z_1 = \sqrt{2} + i$ , b)  $z_2 = \sqrt{2} - \sqrt{2}i$ , c)  $z_3 = \sqrt{-5}$ , d)  $z_4 = \sqrt{3} - i$

Solución: a)  $|z_1| = \sqrt{3}$ ,  $\alpha_1 = \frac{\pi}{4}$ , b)  $|z_2| = 2$ ,  $\alpha_2 = \frac{7\pi}{4}$ , c)  $|z_3| = \sqrt{5}$ ,  $\alpha_3 = \frac{\pi}{2}$ , d)  $|z_4| = 2$ ,  $\alpha_4 = \frac{11\pi}{6}$ .

14. ¿Cuánto debe valer k para que el número complejo  $(3k-2i)^2$  sea imaginario puro?

Solución:  $k = \pm \frac{2}{3}$

15. Calcula un polinomio cuyas raíces sean: a)  $1+3i$  y  $1-3i$ , b)  $2+i$  y  $3+5i$ , c)  $i$  y  $-i$ .

Solución: a)  $x^2-2x+10$ , b)  $x^2-(5+6i)x+(1+13i)$ , c)  $x^2+1$ .

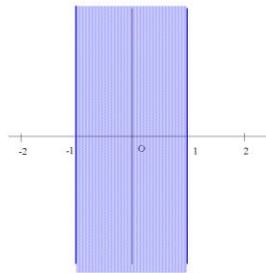
16. Calcula el número complejo  $\frac{(3+2i)^2 + (3-2i)}{(5+i)^2}$

Solución:  $z = \frac{73}{169} - \frac{40}{169}i$

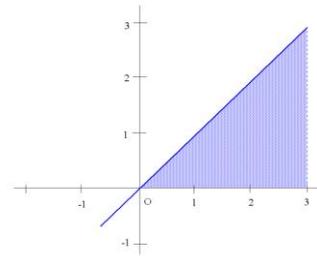
17. Representa en el plano complejo los conjuntos de números que cumplen:

a)  $-1 \leq \text{Re}(z) \leq 1$ , b)  $0 \leq \text{Im}(z) \leq \text{Re}(z) \leq 3$ .

Solución: Las figuras adjuntas



a)

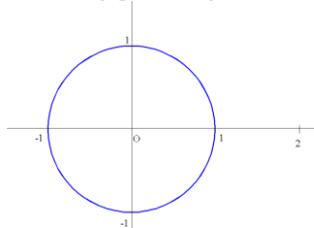


b)

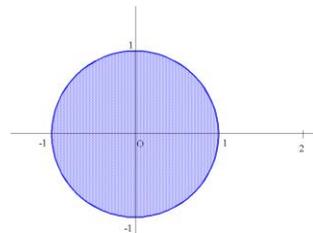
18. Representa en el plano complejo los conjuntos de números que cumplen:

a)  $|z| = 1$ , b)  $|z| < 1$

Solución: Las figuras adjuntas



a) Circunferencia  $C = (0,0)$  y radio 1



b) Círculo  $C = (0,0)$  y radio 1

### 3.- COMPLEJOS EN FORMA POLAR

19. Pon en forma polar los números complejos:

a)  $\sqrt{2} + \sqrt{2}i$ , b)  $\sqrt{3} - i$

Solución: a)  $2_{\pi/4}$  b)  $2_{11\pi/6}$

20. Pon en forma binómica el número complejo  $z = 1_{180^\circ}$

Solución:  $z = -1$

21. Halla el módulo y el argumento de los siguientes números complejos:  
a) (3,4), b)  $1 + \sqrt{3}i$ , c) (0,-3)  
*Solución:* a) 5,  $53^\circ$  b) 2,  $60^\circ$  c) 3,  $270^\circ$ .
22. Pasa a forma polar los números complejos:  
a) -1-i, b) 3, c) -3i  
*Solución:* a)  $\sqrt{2}$   $225^\circ$  b)  $30^\circ$  c)  $3270^\circ$
23. Pasa a forma trigonométrica:  
a)  $(-4, -4\sqrt{3})$ , b) (1,0), c) -1+i  
*Solución:* a)  $8(\cos 240^\circ + i \sin 240^\circ)$  b)  $1(\cos 0^\circ + i \sin 0^\circ)$  c)  $\sqrt{2}(\cos 135^\circ + i \sin 135^\circ)$
24. Pasa a forma binómica los siguientes números:  
a)  $\cos 0^\circ + i \sin 0^\circ$ , b)  $4(\cos 45^\circ + i \sin 45^\circ)$ , c)  $\cos 30^\circ + i \sin 30^\circ$   
*Solución:* a) 1 b)  $2\sqrt{2} + 2\sqrt{2}i$  c)  $\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$
25. Expresa en forma polar los complejos: a)  $z_1 = \frac{5+5i}{2}$ , b)  $z_2 = 2(\cos 30^\circ - i \sin 30^\circ)$   
*Solución:* a)  $z_1 = \left(\frac{5\sqrt{2}}{2}\right)_{45^\circ}$ , b)  $z_2 = 2_{330^\circ}$
26. Dado el número complejo  $z = \frac{1+i}{1-i}$  escríbelo en el resto de las formas que conozcas.  
*Solución:* cartesiana (0, 1), polar  $1_{90^\circ}$ ; trigonométrica  $1(\cos 90^\circ + i \sin 90^\circ)$ , binómica i.
27. Halla un número complejo del segundo cuadrante que tiene por módulo 2 y tal que  $\text{Re}(z) = -1$ .  
Expresa dicho número en forma polar.  
*Solución:*  $z = -1 + \sqrt{3}i = 2_{120^\circ}$
28. Si  $z = 2_{30^\circ}$  halla su conjugado y su opuesto.  
*Solución:*  $\bar{z} = 2_{330^\circ}$  y  $-z = 2_{210^\circ}$
29. Halla un número complejo y su opuesto sabiendo que su conjugado es  $\bar{z} = 3_{70^\circ}$   
*Solución:*  $z = 3_{290^\circ}$  y  $-z = 2_{110^\circ}$
30. Dados los números complejos  $z_1 = \sqrt{3} - i$ ,  $z_2 = 3i$  y  $z_3 = 1+i$ , calcula:  
a)  $\frac{z_1 + z_2}{z_3}$  b)  $z_1 \cdot z_3$  c)  $(z_1)^4$  d)  $\bar{z}_2$   
a)  $\frac{2 + \sqrt{3}}{2} + \frac{2 - \sqrt{3}}{2}i$  b)  $(2\sqrt{2})_{15^\circ}$  c)  $16_{120^\circ}$  d)  $3_{270^\circ}$
31. Calcula: a)  $(2 + 2i\sqrt{3})^2$ , b)  $(1+i)^5$ , c)  $(1+2i)^3$ , d)  $(2+i^5)^3$   
*Solución:* a)  $16_{120^\circ} = -8 + 8\sqrt{3}i$  b)  $\left[(\sqrt{2})_{45^\circ}\right]^5 = (4\sqrt{2})_{225^\circ}$ , c)  $(5\sqrt{5})_{80^\circ}$ , d)  $2+5i$ .
32. Calcula las operaciones indicadas expresando el resultado en forma polar y cartesiana:  
a)  $3_{150^\circ} \cdot 4_{45^\circ}$  b)  $3_{12^\circ} \cdot 4_{17^\circ} \cdot 2_{1^\circ}$  c)  $(2_{40^\circ})^3$   
*Solución:* a)  $12_{195^\circ} = -11,59 + 3,21i$  b)  $24_{30^\circ} = 20,78 + 12i$  c)  $8_{120^\circ} = -4 + 6,93i$ .
33. Demuestra que el producto de un complejo por su conjugado es igual al cuadrado del módulo.

#### 4.- RADICACIÓN DE NÚMEROS COMPLEJOS

34. Calcula las raíces cuartas del número complejo  $z = 1-i$ .  
*Solución:*  $z_1 = \sqrt[4]{2}_{78^\circ 75'}$ ,  $z_2 = \sqrt[4]{2}_{168^\circ 75'}$ ,  $z_3 = \sqrt[4]{2}_{258^\circ 75'}$  y  $z_4 = \sqrt[4]{2}_{348^\circ 75'}$ .
35. Halla las raíces cúbicas del complejo  $z = -2 + 2i$   
*Solución:*  $z_1 = \sqrt[3]{2}_{45^\circ}$ ,  $z_2 = \sqrt[3]{2}_{165^\circ}$ ,  $z_3 = \sqrt[3]{2}_{235^\circ}$ .
36. Calcula cuáles son las raíces cuartas de la unidad real y representarlas gráficamente.  
*Solución:*  $z_1 = 1$ ,  $z_2 = i$ ,  $z_3 = -1$  y  $z_4 = -i$ .
37. Calcula cuáles son las raíces quintas de la unidad real y represéntalas gráficamente.  
*Solución:*  $z_1 = 1$ ,  $z_2 = 1_{72^\circ}$ ,  $z_3 = 1_{144^\circ}$ ,  $z_4 = 1_{216^\circ}$ ,  $z_5 = 1_{288^\circ}$
38. Halla las raíces que se indican y representa sus afijos:  
 a)  $\sqrt{4(\cos 30^\circ + i \sin 30^\circ)}$ , b)  $\sqrt[4]{4(\cos 180^\circ + i \sin 180^\circ)}$ .  
*Solución:* a)  $2_{15^\circ}$ ,  $2_{195^\circ}$ ; b)  $\sqrt{2}_{45^\circ}$ ,  $\sqrt{2}_{135^\circ}$ ,  $\sqrt{2}_{225^\circ}$ ,  $\sqrt{2}_{315^\circ}$
39. Halla las soluciones de la ecuación  $z^8 - 1 = 0$ .  
*Solución:*  $1$ ,  $1_{45^\circ}$ ,  $1_{90^\circ}$ ,  $1_{135^\circ}$ ,  $1_{180^\circ}$ ,  $1_{225^\circ}$ ,  $1_{270^\circ}$ ,  $1_{315^\circ}$
40. Encuentra una ecuación de segundo grado cuyas raíces sean:  
 a)  $i$ ,  $-i$  b)  $1+2i$ ,  $1-2i$   
*Solución:* a)  $x^2+1 = 0$ , b)  $x^2-2x+5 = 0$ .
41. Halla las raíces cúbicas de 8.  
*Solución:*  $z_0 = 2$ ,  $z_1 = -1 + \sqrt{3}i$ ,  $z_2 = -1 - \sqrt{3}i$
42. Un triángulo tiene de vértices  $A = (-1, 0)$ ,  $B = (1, 0)$  y  $C = (0, 2)$ . Si giramos el triángulo  $90^\circ$  ¿cuáles serán los nuevos vértices?  
*Solución:*  $A' = (0, -1)$ ,  $B' = (0, 1)$  y  $C' = (-2, 0)$ .
43. Un cuadrado regular tiene el centro en el origen y uno de sus vértices en el punto  $A = (1, 1)$ . Calcula los demás vértices.  
*Solución:*  $B' = (-1, 1)$ ,  $C' = (-1, -1)$  y  $D' = (1, -1)$ .
44. Calcula y representa en el plano las raíces cuartas de  $-i$ .  
*Solución:*  $1_{67,5^\circ}$ ,  $1_{167,5^\circ}$ ,  $1_{157,5^\circ}$ ,  $1_{247,5^\circ}$ ,  $1_{337,5^\circ}$
45. Calcula y representa en el plano las raíces quintas de  $i$ .  
*Solución:*  $1_{18^\circ}$ ,  $1_{90^\circ}$ ,  $1_{162^\circ}$ ,  $1_{234^\circ}$ ,  $1_{306^\circ}$