EJERCICIOS RESUELTOS COMPLEJOS

Cuestión 1.-

Efectúa, en forma binómica, y representa gráficamente la solución:

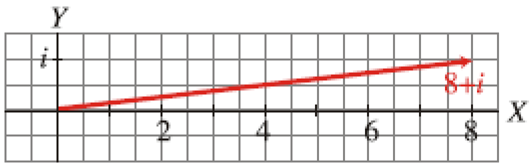
$$\frac{13i^4(2-i)}{3-2i}$$

Solución:

$$\frac{13i^4(2-i)}{3-2i}=\frac{13\cdot 1(2-i)}{3-2i}=\frac{13(2-i)}{3-2i}=\frac{13(2-i)(3+2i)}{(3-2i)(3+2i)}=\frac{13\left(6+4i-3i-2i^2\right)}{9-4i^2}=$$

$$=\frac{13(6+4i-3i+2)}{9+4}=\frac{13(8+i)}{13}=8+i$$

Representación gráfica:



Cuestión 2.-

Calcula y representa gráficamente la solución que obtengas:

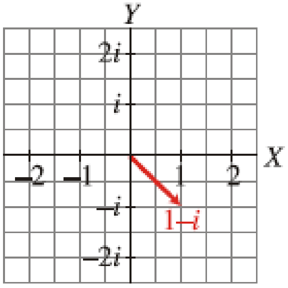
$$\frac{(3-i)i^3}{1-2i}$$

Solución:

$$\frac{(3-i)i^3}{1-2i}=\frac{(3-i)(-i)}{1-2i}=\frac{-3i+i^2}{1-2i}=\frac{-3i-1}{1-2i}=\frac{-1-3i}{1-2i}=\frac{(-1-3i)(1+2i)}{(1-2i)(1+2i)}=\frac{-1-2i-3i-6i^2}{1-4i^2}=\frac{-1-2i-3i+6}{1+4}=$$

$$=\frac{5-5i}{5}=\frac{5}{5}-\frac{5i}{5}=1-i$$

Representación gráfica:



Cuestión 3.-

Halla en forma binómica y representa la solución obtenida:

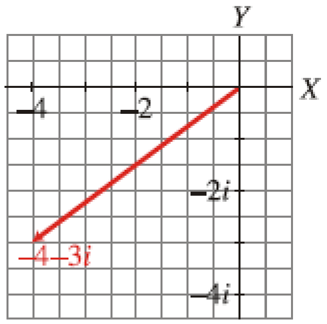
$$\frac{5i^6(-2+i)}{-1+2i}$$

Solución:

$$\frac{5i^6(-2+i)}{-1+2i}=\frac{5(-1)(-2+i)}{-1+2i}=\frac{-5(-2+i)}{-1+2i}=\frac{-5(-2+i)(-1-2i)}{(-1+2i)(-1-2i)}=\frac{-5\left(2+4i-i-2i^2\right)}{1-4i^2}=$$

$$=\frac{-5(2+4i-i+2)}{1+4}=\frac{-5(4+3i)}{5}=-4-3i$$

Representación gráfica:



Cuestión 4.-

Calcula y representa gráficamente la solución:

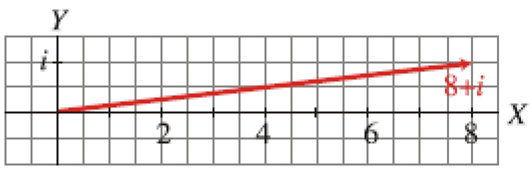
$$\frac{-10i^7(2-3i)}{4+2i}$$

Solución:

$$\frac{-10i^7(2-3i)}{4+2i}=\frac{-10(-i)(2-3i)}{4+2i}=\frac{10i(2-3i)}{4+2i}=\frac{20i-30i^2}{4+2i}=\frac{30+20i}{4+2i}=\frac{(30+20i)(4-2i)}{(4+2i)(4-2i)}=$$

$$=\frac{120-60i+80i-40i^2}{16-4i^2}=\frac{120-60i+80i+40}{16+4}=\frac{160+20i}{20}=\frac{160}{20}+\frac{20i}{20}=8+i$$

Representación gráfica:



Cuestión 5.-

Calcula en forma binómica y representa gráficamente la solución:

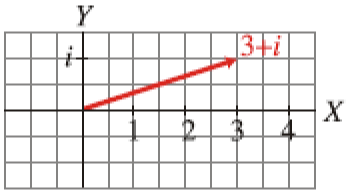
$$\frac{(4-2i)i^5}{1+i}$$

Solución:

$$\frac{(4-2i)i^5}{1+i}=\frac{(4-2i)i}{1+i}=\frac{4i-2i^2}{1+i}=\frac{4i+2}{1+i}=\frac{2+4i}{1+i}=\frac{(2+4i)(1-i)}{(1+i)(1-i)}=\frac{2-2i+4i-4i^2}{1-i^2}=\frac{2-2i+4i+4}{1+1}=$$

$$=\frac{6+2i}{2}=\frac{6}{2}+\frac{2i}{2}=3+i$$

Representación gráfica:



Cuestión 6.-

Hallar "a" para que el complejo $\frac{3+2i}{a+6i}$:

a) sea real puro
b) sea imaginario puro

Solución.

Lo primero de todo es hacer la división en forma binómica, multiplicando numerador y denominador por el conjugado del denominador, de esta forma se elimina la unidad imaginaria del denominador.

$$\frac{3+2i}{a+6i}=\frac{(3+2i)\cdot(a-6i)}{(a+6i)\cdot(a-6i)}=\frac{\left(3\cdot a+2\cdot(-6)i^2\right)+\left(3\cdot(-6)+2\cdot a\right)i}{a^2-6^2i^2}=\frac{(3a+12)+(2a-18)i}{a^2+36}=\frac{3a+12}{a^2+36}+\frac{2a-18}{a^2+36}i$$

a) Número complejo real puro $\Leftrightarrow$ la parte imaginaria nula.

$$\frac{2a-18}{a^2+36}=0\quad:\quad 2a-18=0\quad:\quad a=\frac{18}{2}=9$$

b) Número complejo imaginario puro $\Leftrightarrow$ la parte real nula.

$$\frac{3a+12}{a^2+36}=0\quad:\quad 3a+12=0\quad:\quad a=\frac{-12}{3}=-4$$

Cuestión 7.-

Hallar el valor de k para que el complejo $\frac{2-(1+k)i}{1-ki}$ sea un nº real. Hallar su cociente.

Solución.

Se multiplica numerador y denominador por el conjugado del denominador.

$$\frac{2-(1+k)i}{1-ki}=\frac{(2-(1+k)i)\cdot(1+ki)}{(1-ki)\cdot(1+ki)}=\frac{\left(2\cdot 1+(-(1+k))\cdot k\, i^2\right)+\left(2\cdot k+(-(1+k))\cdot 1\right)i}{1^2-k^2i^2}=\frac{\left(2+k+k^2\right)+(k-1)i}{1+k^2}=$$

$$=\frac{2+k+k^2}{1+k^2}+\frac{k-1}{1+k^2}i$$

Para que un número complejo sea real puro, la parte imaginaria debe ser nula.

$$\frac{k-1}{1+k^2}=0\quad:\quad k-1=0\quad:\quad k=1$$

Para k = 1:

$$=\frac{2+1+1^2}{1+1^2}+\frac{1-1}{1+1^2}i=\frac{3}{2}+0\,i$$

Cuestión 8.-

Hallar a y b para que el complejo $\frac{a+2i}{3+bi}$ sea igual $\sqrt{2}_{315}$

Solución.

$$\frac{a+2i}{3+bi}=\sqrt{2}_{315}$$

Lo primero es expresar el segundo miembro de la igualdad en forma binómica.

$$\sqrt{2}_{315}=\sqrt{2}\cdot(\cos 315+i\,\mathrm{sen}\,315)=\left\{\begin{array}{l}\cos 315=\cos(-45)=\cos 45=\frac{\sqrt{2}}{2}\\ \mathrm{sen}\,315=\mathrm{sen}\,(-45)=-\mathrm{sen}\,45=-\frac{\sqrt{2}}{2}\end{array}\right\}=\sqrt{2}\cdot\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)=1-i$$

$$\frac{a+2i}{3+bi}=1-i$$

Los parámetros a y b se calculan por identificación igualando las partes reales y las imaginarias, para lo cual lo más sencillo es pasar el denominador al segundo miembro y operar el producto.

$$a+2i=(1-i)\cdot(3+bi)$$

$$a+2i=\left(1\cdot 3+(-1)\cdot b\,i^2\right)+\left(1\cdot b+(-1)\cdot 3\right)i$$

$$a+2i=(3+b)+(b-3)i:\left\{\begin{array}{l}\mathrm{Re}: a=3+b\\ \mathrm{Im}: 2=b-3\end{array}\right.\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}a=8\\ b=5\end{array}\right.$$

Cuestión 9.-

Hallar dos números complejos cuya diferencia es imaginaria, su suma tiene como parte imaginaria 5 y su producto vale $-5+5i$.

Solución.

Se pide hallar dos números complejos $z_1 = a + bi$ y $z_2 = c + di$ que cumplan las siguientes condiciones:

1. $\mathrm{Re}\,(z_1 - z_2) = 0$

$$z_1 - z_2 = a + bi - (c + di) = (a - c) + (b - d)i$$
$$\mathrm{Re}\,(z_1 - z_2) = a - c = 0$$

2. $\text{Im}(z_1 + z_2) = 5$

$$z_1 + z_2 = a + bi + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$$
$$\text{Im}(z_1 + z_2) = b + d = 5$$

3. $z_1 \cdot z_2 = -5 + 5i$

$$z_1 \cdot z_2 = (a + bi) \cdot (c + di) = (a{\cdot}c - b{\cdot}d) + (a{\cdot}d + b{\cdot}c)i = -5 + 5i$$
$$\begin{cases} \text{Re}: a \cdot c - b \cdot d = -5 \\ \text{Im}: a \cdot d + b \cdot c = 5 \end{cases}$$

Las condiciones propuestas permiten plantear un sistema de cuatro ecuaciones y cuatro incógnitas.

$$\begin{cases} a - c = 0 \\ b + d = 5 \\ ac - bd = -5 \\ ad + bc = 5 \end{cases} \quad a = c \quad \begin{cases} b + d = 5 \\ a^2 - bd = -5 \\ ad + ba = 5 \end{cases} \quad \begin{cases} b + d = 5 \\ a^2 - bd = -5 \\ a(b + d) = 5 \end{cases}$$

Sustituyendo la 1ª en la 3ª:

$$a \cdot 5 = 5 \qquad a = c = 1$$

$$\begin{cases} b + d = 5 \\ 1^2 - bd = -5 \end{cases} \qquad \begin{cases} b + d = 5 \\ bd = 6 \end{cases}$$

Por sustitución

$$d = 5 - b \qquad b{\cdot}(5 - b) = 6$$

Ordenando se obtiene una ecuación de 2º grado.

$$b^2 - 5b + 6 = 0 : \begin{cases} b = 1 \rightarrow d = 5 - 1 = 4 \\ b = 5 \rightarrow d = 5 - 5 = 0 \end{cases}$$

Posibles soluciones:

$$z_1 = 1 + i \ \text{ y } \ z_2 = 1 + 4i$$
ó
$$z_1 = 1 + 5i \ \text{ y } \ z_2 = 1 + 0i$$

Cuestión 10.-

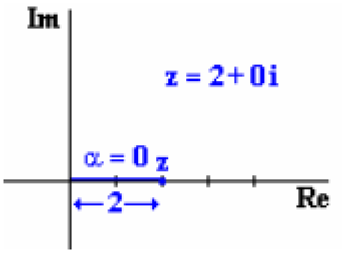
Expresar en forma polar los siguientes nº complejos:

a) 2
b) -5
c) i
d) $-2 + 2\sqrt{3}\,i$
e) $\sqrt{3} - i$

Solución.

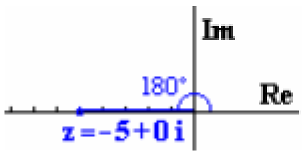
a) $z = 2$. Numero complejo real puro positivo, con dibujarlo basta para obtener su forma polar.

$$Z = 2 = 2 + 0i = 2_{0^\circ}$$



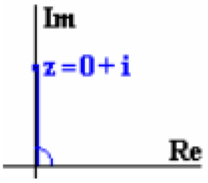
b) $z = -5$. Numero complejo real puro negativo.

$$Z = -5 + 0i = 5_{180^\circ}$$



c) z = i. Numero complejo imaginario puro.

$$Z = 0 + i = 1_{90^\circ}$$



d) $Z = -2 + 2\sqrt{3}\,i$

$$Z \in 2^\circ\text{ Cuadrante}: \left\{ \begin{array}{c} \text{Módulo}: r = \sqrt{(-2)^2 + \left(2\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{16} = 4 \\ \text{Argumento}: \alpha = 180 - \text{arctg}\left|\dfrac{2\sqrt{3}}{-2}\right| = 180 - \text{arctg}\sqrt{3} = 120 \end{array} \right\}: Z = 4_{120^\circ}$$

e) $Z = \sqrt{3} - i$

$$Z \in 4^\circ\text{ Cuadrante}: \left\{ \begin{array}{c} \text{Módulo}: r = \sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2 + (-1)^2} = \sqrt{4} = 2 \\ \text{Argumento}: \alpha = 360 - \text{arctg}\left|\dfrac{-1}{\sqrt{3}}\right| = 360 - \text{arctg}\dfrac{1}{\sqrt{3}} = 330 \end{array} \right\}: Z = 2_{330^\circ}$$

Cuestión 11.-

Expresar en forma binómica los siguientes complejos:

a) 3_{180°
b) 6_{30°
c) 2_{270°
d) $\sqrt{2}_{45^\circ}$

Solución.

a) $Z = 3_{180^\circ} = 3\cdot(\cos 180^\circ + i \operatorname{sen} 180^\circ) = 3\cdot(-1 + 0i) = -3$

b) $Z = 6_{30^\circ} = 6\cdot(\cos 30^\circ + i \operatorname{sen} 30^\circ) = 3\cdot\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2}i\right) = \dfrac{3\sqrt{3}}{2} + \dfrac{3}{2}i$

c) $Z = 2_{270^\circ} = 2\cdot(\cos 270^\circ + i \operatorname{sen} 270^\circ) = 2\cdot(0 + (-1)\,i) = -2i$

d) $Z = \sqrt{2}_{45^\circ} = \sqrt{2}(\cos 45^\circ + i \operatorname{sen} 45^\circ) = \sqrt{2}\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2} + \dfrac{\sqrt{2}}{2}i\right) = 1 + i$

Cuestión 12.-

Sean los complejos:

$$Z = 3_{30^\circ}\ ;\ W = 2_{60^\circ}\ ;\ P = 2 + 2i\ ;\ Q = 2 - 2\sqrt{3}i$$

realizar las siguientes operaciones:

a) $Z\cdot W$
b) $\overline{Z}\cdot \overline{W}^2$
c) P^2
d) Q^5
e) $\dfrac{Z^2\cdot \overline{P}}{Q^{-1}}$
f) $\dfrac{Q^3 + Z^3}{W^3 - P^3}$

Solución.

Excepto la suma o resta, las demás operaciones es más fácil hacerlas en forma polar.

$$P = 2 + 2i \in 1^{\circ}\text{ Cuadrante}: \left\{ \begin{array}{c} \text{Módulo}: r = \sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{8} \\ \text{Argumento}: \alpha = \text{arctg}\left|\frac{2}{2}\right| = \text{arctg}\, 1 = 45^{\circ} \end{array} \right\} : P = \sqrt{8}_{45^{\circ}}$$

$$Q = 2 - 2\sqrt{3}i \in 4^{\circ}\text{ Cuadrante}: \left\{ \begin{array}{c} \text{Módulo}: r = \sqrt{2^2 + \left(-2\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{16} = 4 \\ \text{Argumento}: \alpha = 360 - \text{arctg}\left|\frac{-2\sqrt{3}}{2}\right| = 360 - \text{arctg}\sqrt{3} = 300 \end{array} \right\} : Q = 4_{300^{\circ}}$$

a. $Z \cdot W = 3_{30^{\circ}} \cdot 2_{60^{\circ}} = (3 \cdot 2)_{30^{\circ} + 60^{\circ}} = 6_{90^{\circ}} = 6 \cdot (\cos 90^{\circ} + i \text{ sen } 90^{\circ}) = 6i$

b. $$\overline{Z} \cdot \overline{W}^2 = \left\{ \begin{array}{l} \overline{Z} = \overline{3_{30^{\circ}}} = 3_{-30^{\circ}} = 3_{330^{\circ}} \\ \overline{W} = \overline{2_{60^{\circ}}} = 2_{-60^{\circ}} = 2_{300^{\circ}} \end{array} \right\} = 3_{330^{\circ}} \cdot \left(2_{300^{\circ}}\right)^2 = 3_{330^{\circ}} \cdot {2^2}_{300^{\circ}\times 2} = 3_{330^{\circ}} \cdot 4_{600^{\circ}} =$$

$$= (3 \cdot 4)_{330^{\circ}+600^{\circ}} = 12_{930^{\circ}} = 12_{2\times 360^{\circ}+210^{\circ}} = 12_{210^{\circ}} = 12 \cdot (\cos 210 + i \text{ sen } 210^{\circ}) = 12 \cdot (-\cos 30 - i \text{ sen} 30^{\circ}) =$$

$$= 12 \cdot \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} i \right) = -6\sqrt{3} - 6i$$

c. $$P^2 = \left(\sqrt{8}_{45^{\circ}}\right)^2 = \left(\sqrt{8}\right)^2_{45^{\circ}\times 2} = 8_{90^{\circ}} = 8 \cdot (\cos 90^{\circ} + i \text{ sen } 90^{\circ}) = 8i$$

d. $$Q^5 = \left(4_{300^{\circ}}\right)^5 = {4^5}_{300^{\circ}\times 5} = 1024_{1500^{\circ}} = 1024_{4\times 360^{\circ}+60^{\circ}} = 1024_{60^{\circ}} =$$

$$= 1024 \cdot (\cos 60^{\circ} + i \text{ sen } 60^{\circ}) = 1024 \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i \right) = 512 + 512\sqrt{3}i$$

---

e. $$\frac{Z^2 \cdot \overline{P}}{Q^{-1}} = \frac{\left(3_{30^{\circ}}\right)^2 \cdot \overline{\sqrt{8}_{45^{\circ}}}}{\left(4_{300^{\circ}}\right)^{-1}} = \frac{{3^2}_{30^{\circ}\times 2} \cdot \sqrt{8}_{-45^{\circ}}}{{4^{-1}}_{300^{\circ}\times(-1)}} = \frac{9_{60^{\circ}} \cdot \sqrt{8}_{315}}{{4^{-1}}_{-300^{\circ}}} = \frac{9_{60^{\circ}} \cdot \sqrt{8}_{315}}{{4^{-1}}_{60^{\circ}}} =$$

$$\left(\frac{9\sqrt{8}}{4^{-1}}\right)_{60^{\circ}+315^{\circ}-60^{\circ}} = 36\sqrt{8}_{315} = 36\sqrt{8} \cdot (\cos 315 + i \text{ sen } 315) = 36\sqrt{8} \cdot (\cos 45 - i \text{ sen } 45) =$$

$$= 36\sqrt{8} \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} i \right) = 72 - 72i$$

f. $$\frac{Q^3 + Z^3}{W^3 - P^3} = \frac{\left(4_{300^{\circ}}\right)^3 + \left(3_{30^{\circ}}\right)^3}{\left(2_{60^{\circ}}\right)^3 - \left(\sqrt{8}_{45}\right)^3} = \frac{{4^3}_{300^{\circ}\times 3} + {3^3}_{30^{\circ}\times 3}}{{2^3}_{60^{\circ}\times 3} - {\sqrt{8}^3}_{45^{\circ}\times 3}} = \frac{64_{900^{\circ}} + 27_{90^{\circ}}}{8_{180^{\circ}} - 16\sqrt{2}_{135}} =$$

$$=\frac{64_{360^\circ\times 2+180^\circ}+27_{90^\circ}}{8_{180^\circ}-16\sqrt{2}_{135}}=\frac{64_{180^\circ}+27_{90^\circ}}{8_{180^\circ}-16\sqrt{2}_{135}}=\frac{64\cdot(\cos 180^\circ+i\,\text{sen}\,180^\circ)+27\cdot(\cos 90^\circ+i\,\text{sen}\,90^\circ)}{8\cdot(\cos 180^\circ+i\,\text{sen}\,180^\circ)-16\sqrt{2}\cdot(\cos 135^\circ+i\,\text{sen}\,135^\circ)}=$$

$$=\frac{64\cdot(-1+0i)+27\cdot(0+1i)}{8\cdot(-1+0i)-16\sqrt{2}\cdot\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)}=\frac{-64+27i}{-8-(-16+16i)}=\frac{-64+27i}{8-16i}=\frac{(-64+27i)\cdot(8+16i)}{(8-16i)\cdot(8+16i)}=$$

$$\frac{(-64\cdot 8+27\cdot 16i^2)+(27\cdot 8-64\cdot 16)i}{8^2-16^2i^2}=\frac{-944-808i}{320}=-\frac{59}{20}-\frac{101}{40}i$$

Cuestión 13.-

Escribir $Z_1=2+2i$ y $Z_2=6-6i$ en forma polar y calcular $\frac{Z_1}{Z_2}$ en forma polar y en forma binómica.

Solución.

El primer paso es pasar los números complejos a forma polar.

$$Z_1=2+2i\in 1^\circ\text{ Cuadrante}:\left\{\begin{array}{l}\text{Módulo}: r=\sqrt{2^2+2^2}=\sqrt{8}\\ \text{Argumento}: \alpha=\text{arctg}\left|\frac{2}{2}\right|=\text{arctg}\,1=45^\circ\end{array}\right\}: Z_1=\sqrt{8}_{45^\circ}$$

$$Z_2=6-6i\in 4^\circ\text{ Cuadrante}:\left\{\begin{array}{l}\text{Módulo}: r=\sqrt{6^2+(-6)^2}=\sqrt{72}\\ \text{Argumento}: \alpha=360^\circ-\text{arctg}\left|\frac{-6}{6}\right|=360^\circ-\text{arctg}\,1=315\end{array}\right\}: Z_2=\sqrt{72}_{315^\circ}$$

$$\frac{Z_1}{Z_2}=\frac{\sqrt{8}_{45^\circ}}{\sqrt{72}_{315^\circ}}=\left(\frac{\sqrt{8}}{\sqrt{72}}\right)_{45^\circ-315^\circ}=\sqrt{\frac{8}{72}}_{-270^\circ}=\sqrt{\frac{1}{9}}_{90^\circ}=\frac{1}{3}_{90^\circ}=\frac{1}{3}(\cos 90^\circ+i\,\text{sen}\,90^\circ)=0+\frac{1}{3}i=\frac{1}{3}i$$

Nota "El argumento de los números complejos en forma polar es conveniente dejarlo en positivo. Para expresar en positivo un argumento negativo se le suma 360º, si el argumento es menor de −360º, primero se divide por 360º y al resto, en negativo, se le suma 360º "

Cuestión 14.-

Calcular $(1+i)^{20}$. Expresar la solución en forma binómica.

Solución.

La forma más sencilla de hacer la potenciación de números complejos es en polar.

$$1+i\in 1^\circ\text{ Cuadrante}:\left\{\begin{array}{l}\text{Módulo}: r=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}\\ \text{Argumento}: \alpha=\text{arctg}\left|\frac{1}{1}\right|=\text{arctg}\,1=45^\circ\end{array}\right\}: Z_1=\sqrt{2}_{45^\circ}$$

$$(1+i)^{20}=\left(\sqrt{2}_{45^\circ}\right)^{20}=\left(\sqrt{2}\right)^{20}_{20\times 45^\circ}=2^{10}_{900^\circ}=1024_{180^\circ+360^\circ\times 2}=1024_{180^\circ}=$$

$$=1024\cdot(\cos 180^\circ+i\,\text{sen}\,180^\circ)=-1024+0\,i=-1024$$

Cuestión 15.-

Calcular las siguientes raíces

a) $\sqrt[3]{-3+3i}$

b) $\sqrt[5]{-1+\sqrt{3}i}$

c) $\sqrt[6]{64}$

d) $\sqrt[4]{-9}$

e) $\sqrt[3]{i}$

f) $\sqrt[4]{-16i}$

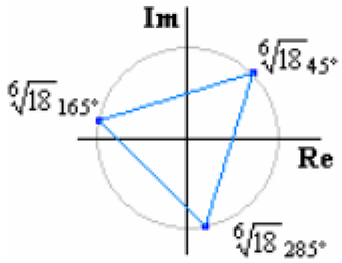
g) $\sqrt[5]{-\sqrt{3}-i}$

Solución.

Las raíces de números complejos se hacen en forma polar, por lo que el primer paso será pasar el número complejo a forma polar.

a) $$\sqrt[3]{-3+3i}=\left\{-3+3i\in 2^{\circ}\,\text{Cuadrante}:\left\{\begin{array}{l}\text{Módulo}: r=\sqrt{(-3)^2+3^2}=\sqrt{18}\\ \text{Argumento}: \alpha=180-\text{arctg}\left|\dfrac{3}{-3}\right|=135\end{array}\right\}\right\}=\sqrt[3]{\sqrt{18}_{135^{\circ}}}$$

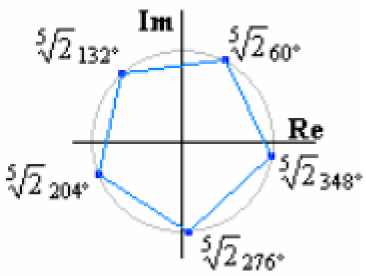
$$\sqrt[3]{\sqrt{18}_{135^{\circ}}}=\left\{\begin{array}{l}=\sqrt[3]{\sqrt{18}}_{\frac{135^{\circ}+360^{\circ}\cdot 0}{3}}=\sqrt[6]{18}_{45^{\circ}}\\ =\sqrt[3]{\sqrt{18}}_{\frac{135^{\circ}+360^{\circ}\cdot 1}{3}}=\sqrt[6]{18}_{165^{\circ}}\\ =\sqrt[3]{\sqrt{18}}_{\frac{135^{\circ}+360^{\circ}\cdot 2}{3}}=\sqrt[6]{18}_{285^{\circ}}\end{array}\right.$$



Los afijos de las soluciones de una raíz de un número complejo son los vértices de un polígono regular de tantos lados como indique el índice de la raíz

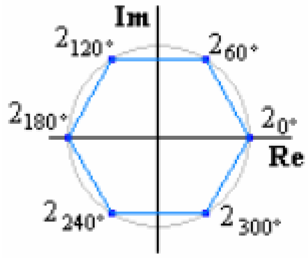
b) $$\sqrt[5]{1-\sqrt{3}i}=\left\{1-\sqrt{3}i\in 4^{\circ}\,\text{Cuadrante}:\left\{\begin{array}{l}\text{Módulo}: r=\sqrt{1^2+\left(-\sqrt{3}\right)^2}=\sqrt{4}=2\\ \text{Argumento}: \alpha=360-\text{arctg}\left|\dfrac{-\sqrt{3}}{1}\right|=300^{\circ}\end{array}\right\}\right\}=\sqrt[5]{2}_{300^{\circ}}$$

$$\sqrt[5]{2}_{300^{\circ}}=\left\{\begin{array}{l}=\sqrt[5]{2}_{\frac{300^{\circ}+360\cdot 0}{5}}=\sqrt[5]{2}_{60^{\circ}}\\ =\sqrt[5]{2}_{\frac{300^{\circ}+360\cdot 1}{5}}=\sqrt[5]{2}_{132^{\circ}}\\ =\sqrt[5]{2}_{\frac{300^{\circ}+360\cdot 2}{5}}=\sqrt[5]{2}_{204^{\circ}}\\ =\sqrt[5]{2}_{\frac{300^{\circ}+360\cdot 3}{5}}=\sqrt[5]{2}_{276^{\circ}}\\ =\sqrt[5]{2}_{\frac{300^{\circ}+360\cdot 4}{5}}=\sqrt[5]{2}_{348^{\circ}}\end{array}\right.$$



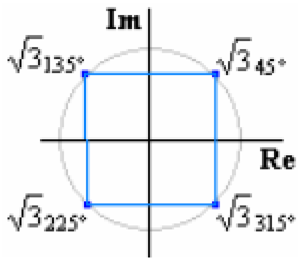
c) $\sqrt[6]{64}=\sqrt[6]{64_{0^\circ}}$

$$\sqrt[6]{64_{0^\circ}}=\begin{cases}=\sqrt[6]{64}\ _{\frac{0^\circ+360^\circ\cdot 0}{6}}=2_{0^\circ}\\ =\sqrt[6]{64}\ _{\frac{0^\circ+360^\circ\cdot 1}{6}}=2_{60^\circ}\\ =\sqrt[6]{64}\ _{\frac{0^\circ+360^\circ\cdot 2}{6}}=2_{120^\circ}\\ =\sqrt[6]{64}\ _{\frac{0^\circ+360^\circ\cdot 3}{6}}=2_{180^\circ}\\ =\sqrt[6]{64}\ _{\frac{0^\circ+360^\circ\cdot 4}{6}}=2_{240^\circ}\\ =\sqrt[6]{64}\ _{\frac{0^\circ+360^\circ\cdot 5}{6}}=2_{300^\circ}\end{cases}$$



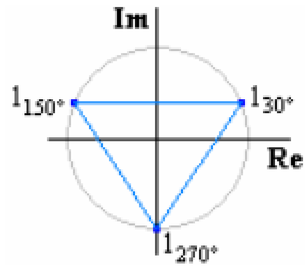
d) $\sqrt[4]{-9}=\sqrt[4]{9_{180^\circ}}$

$$\sqrt[4]{9_{180^\circ}}=\begin{cases}=\sqrt[4]{9}\ _{\frac{180^\circ+360\cdot 0}{4}}=\sqrt{3}_{45^\circ}\\ =\sqrt[4]{9}\ _{\frac{180^\circ+360\cdot 0}{4}}=\sqrt{3}_{135^\circ}\\ =\sqrt[4]{9}\ _{\frac{180^\circ+360\cdot 0}{4}}=\sqrt{3}_{225^\circ}\\ =\sqrt[4]{9}\ _{\frac{180^\circ+360\cdot 0}{4}}=\sqrt{3}_{315^\circ}\end{cases}$$



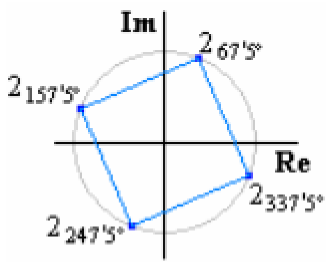
e) $\sqrt[3]{i}=\sqrt[3]{1_{90^\circ}}$

$$\sqrt[3]{1_{90^\circ}}=\begin{cases}=\sqrt[3]{1}\ _{\frac{90^\circ+360^\circ\cdot 0}{3}}=1_{30^\circ}\\ =\sqrt[3]{1}\ _{\frac{90^\circ+360^\circ\cdot 1}{3}}=1_{150^\circ}\\ =\sqrt[3]{1}\ _{\frac{90^\circ+360^\circ\cdot 2}{3}}=1_{270^\circ}\end{cases}$$



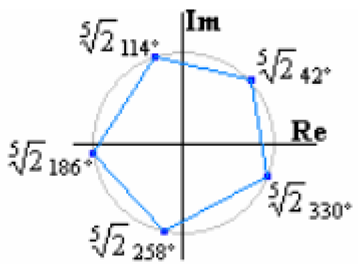
f) $\sqrt[4]{-16i}=\sqrt[4]{16_{270^\circ}}$

$$\sqrt[4]{16_{270^\circ}}=\begin{cases}=\sqrt[4]{16}\ _{\frac{270^\circ+360^\circ\cdot 0}{4}}=2_{67'5^\circ}\\ =\sqrt[4]{16}\ _{\frac{270^\circ+360^\circ\cdot 0}{4}}=2_{157'5^\circ}\\ =\sqrt[4]{16}\ _{\frac{270^\circ+360^\circ\cdot 0}{4}}=2_{247'5^\circ}\\ =\sqrt[4]{16}\ _{\frac{270^\circ+360^\circ\cdot 0}{4}}=2_{337'5^\circ}\end{cases}$$



g) $\sqrt[5]{-\sqrt{3}-i}=\left\{-\sqrt{3}-i\in 3^{\text{o}}\text{ Cuadrante}:\left\{\begin{array}{l}\text{Módulo}: r=\sqrt{\left(-\sqrt{3}\right)^2+(-1)^2}=\sqrt{4}=2\\ \text{Argumento}: \alpha=180+\text{arctg}\left|\dfrac{-1}{-\sqrt{3}}\right|=210^{\text{o}}\end{array}\right.\right\}=\sqrt[5]{2_{210^\circ}}$

$$\sqrt[5]{2_{210^\circ}}=\begin{cases}\sqrt[5]{2}\ _{\frac{210^\circ+360^\circ\cdot 0}{5}}=\sqrt[5]{2}_{42^\circ}\\ \sqrt[5]{2}\ _{\frac{210^\circ+360^\circ\cdot 1}{5}}=\sqrt[5]{2}_{114^\circ}\\ \sqrt[5]{2}\ _{\frac{210^\circ+360^\circ\cdot 2}{5}}=\sqrt[5]{2}_{186^\circ}\\ \sqrt[5]{2}\ _{\frac{210^\circ+360^\circ\cdot 3}{5}}=\sqrt[5]{2}_{258^\circ}\\ \sqrt[5]{2}\ _{\frac{210^\circ+360^\circ\cdot 4}{5}}=\sqrt[5]{2}_{330^\circ}\end{cases}$$



Cuestión 16.-

Hallar las raíces cuadradas de:

a) 4
b) −4
c) 4i
d) −4i

Solución.

a) $\sqrt{4}=\pm 2=\begin{cases}=2+0i\\=-2+0i\end{cases}$

b) $\sqrt{-4}=\sqrt{4\cdot(-1)}=\sqrt{4}\cdot\sqrt{-1}=\pm 2i=\begin{cases}=0+2i\\=0-2i\end{cases}$

c) $\sqrt{4i}=\sqrt{4_{90^\circ}}=\begin{cases}=\sqrt{4}_{\frac{90^\circ+360\cdot 0}{2}}=2_{45^\circ}=2\cdot(\cos 45^\circ+i\,\mathrm{sen}\,45^\circ)=\sqrt{2}+\sqrt{2}i\\=\sqrt{4}_{\frac{90^\circ+360\cdot 1}{2}}=2_{225^\circ}=2\cdot(\cos 225^\circ+i\,\mathrm{sen}\,225^\circ)=-\sqrt{2}-\sqrt{2}i\end{cases}$

d) $\sqrt{-4i}=\sqrt{4_{270^\circ}}=\begin{cases}=\sqrt{4}_{\frac{270^\circ+360^\circ\cdot 0}{2}}=2_{135^\circ}=2\cdot(\cos 135^\circ+i\,\mathrm{sen}\,135^\circ)=-\sqrt{2}+\sqrt{2}i\\=\sqrt{4}_{\frac{270^\circ+360^\circ\cdot 1}{2}}=2_{315^\circ}=2\cdot(\cos 315^\circ+i\,\mathrm{sen}\,315^\circ)=\sqrt{2}-\sqrt{2}i\end{cases}$

Cuestión 17.-

Para escribir un número complejo ¿qué argumento debes poner en los siguientes casos?

a) nº real positivo
b) nº real negativo
c) nº imaginario positivo
d) nº imaginario negativo

Solución.

a) $z=r_{0^\circ}$. El afijo está situado sobre el semieje real positivo.
b) $z=r_{180^\circ}$. El afijo está situado sobre el semieje real negativo.
c) $z=r_{90^\circ}$. El afijo está situado sobre el semieje imaginario positivo.
d) $z=r_{270^\circ}$. El afijo está situado sobre el semieje imaginario negativo.

Cuestión 18.-

Dado un complejo en forma polar ¿Qué transformación sufre si se multiplica por i?

Solución.

Teniendo en cuenta que la forma polar de número i es 1_{90°, al multiplicar un número complejo de la forma r_α por I, el argumento se desplaza 90º.

$$r_\alpha\cdot 1_{90^\circ}=(r\cdot 1)_{\alpha+90^\circ}=r_{\alpha+90^\circ}$$

Cuestión 19.-

Calcular en forma polar: $\left(1+\sqrt{3}\ i\right)^6\cdot(-1+i)^7$

Solución.

Lo primero es expresar los números complejos en polar, ya que las operaciones (producto y potencia) en esta forma son más sencillas.

$$1+\sqrt{3}i \in 1^{\circ}\text{ Cuadrante}: \left\{ \begin{array}{c} \text{Módulo}: r = \sqrt{1^2+\left(\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{4} = 2 \\ \text{Argumento}: \alpha = \text{arctg}\left|\dfrac{\sqrt{3}}{1}\right| = \text{arctg}\sqrt{3} = 60^{\circ} \end{array} \right\} = 2_{60^{\circ}}$$

$$-1+i \in 2^{\circ}\text{ Cuadrante}: \left\{ \begin{array}{c} \text{Módulo}: r = \sqrt{(-1)^2+1^2} = \sqrt{2} \\ \text{Argumento}: \alpha = 180 - \text{arctg}\left|\dfrac{1}{-1}\right| = 135^{\circ} \end{array} \right\} = \sqrt{2}_{135^{\circ}}$$

El orden de operación es primero las potencias y segundo el producto.

$$\left(1+\sqrt{3}\ i\right)^6 \cdot (-1+i)^7 = \left(2_{60^{\circ}}\right)^6 \cdot \left(\sqrt{2}_{135^{\circ}}\right)^7 = 2^6{}_{6\times 60^{\circ}} \cdot \left(\sqrt{2}\right)^7{}_{7\times 135^{\circ}} = 64_{360} \cdot \sqrt{2^7}_{945^{\circ}} =$$

$$64_{0^{\circ}} \cdot 2^3\sqrt{2}_{2\times 360^{\circ}+225^{\circ}} = 64_{0^{\circ}} \cdot 8\sqrt{2}_{225^{\circ}} = \left(64 \cdot 8\sqrt{2}\right)_{0^{\circ}+225^{\circ}} = 512\sqrt{2}_{225^{\circ}}$$

Cuestión 20.-

Calcular: $\dfrac{i^7 - i^{-7}}{2i}$

Solución.

Lo primero será operar las potencias de i teniendo en cuenta su periodicidad.

$$i^7 = i^{4+3} = i^4 \cdot i^3 = 1 \cdot (-i) = -i$$

$$i^{-7} = i^{-1\cdot(4+3)} = \left(i^4 \cdot i^3\right)^{-1} = (1\cdot(-i))^{-1} = (-i)^{-1} = \frac{1}{-i} = \frac{1\cdot i}{-i\cdot i} = \frac{i}{-i^2} = \frac{i}{-(-1)} = i$$

$$\frac{i^7 - i^{-7}}{2i} = \frac{-i-i}{2i} = \frac{-2i}{2i} = -1 = -1+0i$$

Cuestión 21.-

Dado el número complejo $z = \dfrac{1+i^7}{1+i}$ calcular la expresión trigonométrica del nº $\overline{z}$.

Solución.

Lo primero será operar las potencias de i teniendo en cuenta su periodicidad.

$$i^7 = i^{4+3} = i^4 \cdot i^3 = 1 \cdot (-i) = -i$$

$$z = \frac{1+i^7}{1+i} = \frac{1-i}{1+i}$$

Lo más sencillo es trabajar en forma polar.

$$1+i \in 1^{\circ}\text{ Cuadrante}: \left\{ \begin{array}{c} \text{Módulo}: r = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2} \\ \text{Argumento}: \alpha = \text{arctg}\left|\dfrac{1}{1}\right| = \text{arctg}\,1 = 45^{\circ} \end{array} \right\} = \sqrt{2}_{45^{\circ}}$$

$$1-i \in 4^o \text{ Cuadrante}: \left\{ \begin{array}{c} \text{Módulo}: r = \sqrt{1^2+(-1)^2} = \sqrt{2} \\ \text{Argumento}: \alpha = 360^o - \text{arctg}\left|\frac{-1}{1}\right| = 360^o - \text{arctg}\, 1 = 315 \end{array} \right\} = \sqrt{2}_{315^\circ}$$

$$z = \frac{1-i}{1+i} = \frac{\sqrt{2}_{45^\circ}}{\sqrt{2}_{315^\circ}} = \left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\right)_{45^\circ-315^\circ} = 1_{-270^\circ} = 1_{90^\circ}$$

$$\text{Si } z = 1_{90^\circ} \Rightarrow \bar{z} = 1_{-90^\circ} = 1_{270^\circ} = 1\cdot(\cos 270^o + i \,\text{sen}\, 270^o)$$

Cuestión 22.-

Sea $z = 10\sqrt{3} - 10\,i$. Calcular z^5 , $\sqrt[4]{z}$

Solución.

Lo primero es expresar el número complejo en polar, ya que las operaciones (potencia y radicación) en esta forma son más sencillas.

$$10\sqrt{3}-10i \in 4^o \text{ Cuadrante}: \left\{ \begin{array}{c} \text{Módulo}: r = \sqrt{\left(10\sqrt{3}\right)^2+(-10)^2} = \sqrt{400} = 20 \\ \text{Argumento}: \alpha = 360^o - \text{arctg}\left|\frac{-10}{10\sqrt{3}}\right| = 360^o - \text{arctg}\,\frac{1}{\sqrt{3}} = 330^o \end{array} \right\} = 20_{330^\circ}$$

$$z^5 = \left(20_{330^\circ}\right)^5 = 20^5{}_{5\times 330^\circ} = 32\times 10^5{}_{1650^\circ} = 32\times 10^5{}_{4\times 360^\circ+210^\circ} = 32\times 10^5{}_{210^\circ}$$

$$\sqrt[4]{z} = \sqrt[4]{20_{330^\circ}} = \left\{ \begin{array}{l} = \sqrt[4]{20}_{\frac{330^\circ+360^\circ\cdot 0}{4}} = \sqrt[4]{20}_{82'5^\circ} \\ = \sqrt[4]{20}_{\frac{330^\circ+360^\circ\cdot 1}{4}} = \sqrt[4]{20}_{172'5^\circ} \\ = \sqrt[4]{20}_{\frac{330^\circ+360^\circ\cdot 2}{4}} = \sqrt[4]{20}_{262'5^\circ} \\ = \sqrt[4]{20}_{\frac{330^\circ+360^\circ\cdot 3}{4}} = \sqrt[4]{20}_{352'5^\circ} \end{array} \right.$$

Cuestión 23.-

Calcular los valores de z que verifican: $(1+i)z^3 - 2i = 0$

Solución.

De la ecuación propuesta despejamos z.

$$(1+i)z^3 - 2i = 0 \qquad (1+i)z^3 = 2i \qquad z^3 = \frac{2i}{1+i} \qquad z = \sqrt[3]{\frac{2i}{1+i}}$$

Para calcular z la mejor forma es operar en forma polar.

$2i = 2_{90^\circ}$ Imaginario puro positivo

$$1+i \in 1^o \text{ Cuadrante}: \left\{ \begin{array}{c} \text{Módulo}: r = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2} \\ \text{Argumento}: \alpha = \text{arctg}\left|\frac{1}{1}\right| = \text{arctg}\, 1 = 45^o \end{array} \right\} = \sqrt{2}_{45^\circ}$$

Sustituimos y operamos, primero el cociente y luego la raíz.

$$z=\sqrt[3]{\frac{2i}{1+i}}=\sqrt[3]{\frac{2_{90^\circ}}{\sqrt{2}_{45^\circ}}}=\sqrt[3]{\left(\frac{2}{\sqrt{2}}\right)_{90^\circ-45^\circ}}=\sqrt[3]{\sqrt{2}_{45^\circ}}=\begin{cases}=\sqrt[3]{\sqrt{2}}\,\frac{34^\circ+360\cdot 0}{3}=\sqrt[6]{2}_{15^\circ}\\=\sqrt[3]{\sqrt{2}}\,\frac{34^\circ+360\cdot 1}{3}=\sqrt[6]{2}_{135^\circ}\\=\sqrt[3]{\sqrt{2}}\,\frac{34^\circ+360\cdot 2}{3}=\sqrt[6]{2}_{255^\circ}\end{cases}$$

Cuestión 24.-

Encontrar las ecuaciones de 2º grado cuyas raíces son: $\sqrt{2}_{45^\circ}$, $\sqrt{2}_{315^\circ}$

Solución.

Expresamos los números en forma binómico.

$$\sqrt{2}_{45^\circ}=\sqrt{2}(\cos 45^\circ+i\,\mathrm{sen}\,45^\circ)=\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)=1+i$$

$$\sqrt{2}_{315^\circ}=\sqrt{2}(\cos 315^\circ+i\,\mathrm{sen}\,315^\circ)=\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)=1-i$$

La ecuación de 2º grado será:

$$(x-(1+i))\cdot(x-(1-i))=0$$

Operando, simplificando y ordenando se obtiene la ecuación.

$$(x-(1+i))\cdot(x-(1-i))=x^2-x(1-i)-x(1+i)+(1+i)(1-i)=x^2-x+xi-x-xi+1^2-i^2=x^2-2x+2=0$$

$$x^2-2x+2=0$$