

# Números Complejos

## Conjugado, opuesto, representaciones gráficas. Tipos de complejos

1. Clasificar los siguientes números complejos en reales e imaginarios. Para cada uno, cuál es la parte real y cuál la imaginaria. a)  $(3i)$ ; b)  $1/3-5/2 i$ ; c)  $6/5$ ; d)  $-3i$ ; e)  $5i$ ; f)  $0$ ; g)  $i$ ; h)  $(1/3)-i$ .
2. Escribir tres números complejos imaginarios puros, tres números imaginarios y tres números reales.
3. Representar gráficamente los números complejos:  
a)  $(3+4i)$ ; b)  $-4$ ; c)  $-2i$ ; d)  $(-2+3i)$ ; e)  $(1+3i)$ ; f)  $(6-i)$ ; g)  $-2$ ; h)  $3i$ ; g)  $(-1+i)$ .
4. Representar gráficamente el opuesto y el conjugado de:  
a)  $-3+5i$ ; b)  $3-2i$ ; c)  $1-2i$ ; d)  $-2+i$ ; e)  $6$ ; f)  $5i$ ; g)  $3$ ; h)  $-4i$ .
5. Indicar cuáles de los siguientes números son reales, imaginarios o complejos:  
a)  $-9$ ; b)  $-3i$ ; c)  $-3i+1$ ; d)  $\sqrt{3}+(1/2)i$ ; e)  $(1/3)i$ ; f)  $\sqrt{2}$ ; g)  $-2i$ ; h)  $(1+3i)$ . Sol: R, I, C, C, I, R, I, C
6. Representar gráficamente los afijos de todos los números complejos  $z$  tales que al sumarlos con su respectivo conjugado, se obtenga dos; es decir:  $z+\bar{z}=2$ . Sol: recta  $x=1$
7. Representar gráficamente los números complejos  $z$  tales que  $z-\bar{z}=2$ . ¿Qué debe verificar  $z$ ?  
Sol: es imposible
8. Representar gráficamente los opuestos y los conjugados de a)  $-2-i$ ; b)  $1+i$ ; c)  $3i$ .
9. Escribir en forma trigonométrica y polar los complejos: a)  $4+3i$ ; b)  $-1+i$ ; c)  $5-12i$ .  
Sol: a)  $5_{36,87^\circ}$ ; b)  $\sqrt{2}_{135^\circ}$ ; c)  $13_{292,6^\circ}$
10. Escribir en las formas binómica y trigonométrica los números complejos: a)  $3_{\pi/3}$ ; b)  $3_{135^\circ}$ ; c)  $1_{270^\circ}$ .  
Sol: a)  $3(\cos 60^\circ+i\text{sen} 60^\circ)=3/2+3\sqrt{3}/2 i$ ; b)  $3(\cos 135^\circ+i\text{sen} 135^\circ)=-3\sqrt{2}/2+3\sqrt{2}/2 i$ ; c)  $\cos 270^\circ+i\text{sen} 270^\circ=-i$
11. Calcular tres argumentos del número complejo  $1-i$ . Sol: a)  $315^\circ, 675^\circ, 1035^\circ$
12. ¿Cuáles son el módulo y el argumento del conjugado de un número complejo cualquiera  $r_\alpha$ ? Sol:  $r_{360-\alpha}$ .
13. Expresar en forma binómica y en forma polar el conjugado y el opuesto del número complejo:  $6_{30^\circ}$ .  
Sol: a)  $6_{330^\circ}, (3\sqrt{3}-3i)$ ; b)  $6_{210^\circ}, (-3\sqrt{3}-3i)$
14. Escribir en forma polar los números complejos: a)  $6-8i$ ; b)  $2+\sqrt{14}i$ ; c)  $-3+4i$ .  
Sol: a)  $10_{306,9^\circ}$ ; b)  $4_{69,3^\circ}$ ; c)  $5_{126,9^\circ}$
15. Escribir en forma binómica el complejo  $R=2(\cos 45^\circ+i\text{sen} 45^\circ)$ . Representarlo gráficamente. Sol: a)  $\sqrt{2}+\sqrt{2}i$
16. El módulo de un número complejo es 5 y su argumento  $60^\circ$ . Escribir el número en forma trigonométrica. Sol:  
 $5(\cos 240^\circ+i\text{sen} 240^\circ)$
17. ¿Qué argumento tiene el siguiente número complejo?:  $4(3-2i)+5(-2+i)$ . Sol:  $303,7^\circ$
18. Averiguar como debe ser un complejo  $r_\alpha$  para que sea: a) un número real  
b) un número imaginario puro. Sol: a)  $\alpha=0+k\pi$ ; b)  $\alpha=\pi/2+k\pi$
19. Escribir en forma polar: a)  $1+\sqrt{3}i$ ; b)  $-1+\sqrt{3}i$ ; c)  $1-\sqrt{3}i$ ; d)  $-1-\sqrt{3}i$ ; e)  $3\sqrt{3}+3i$ ; f)  $-3\sqrt{3}-3i$ .  
Sol: a)  $2_{60^\circ}$ ; b)  $2_{120^\circ}$ ; c)  $2_{300^\circ}$ ; d)  $2_{240^\circ}$ ; e)  $\sqrt{6}_{30^\circ}$ ; f)  $\sqrt{6}_{210^\circ}$
20. Escribir en forma binómica: a)  $2_{60^\circ}$ ; b)  $1_{(3\pi/2)}$ ; c)  $5_{450^\circ}$ ; d)  $2_{180^\circ}$ ; e)  $4_{750^\circ}$ ; f)  $6_{(\pi/3)}$ .  
Sol: a)  $(1+\sqrt{3}i)$ ; b)  $-i$ ; c)  $5i$ ; d)  $-2$ ; e)  $(2\sqrt{3}+2i)$ ; f)  $(3+3\sqrt{3}i)$
21. Escribir todos los números complejos cuyos afijos estén en la circunferencia de centro  $(1,2)$  y radio 5.  
Sol:  $(5\cos\alpha+1, (5\text{sen}\alpha+2)i)$
22. Escribir en forma polar y trigonométrica los números complejos: a)  $\sqrt{3}+3i$ ; b)  $1-i$ ; c)  $2-2i$ .  
Sol: a)  $\sqrt{12}_{60^\circ}, \sqrt{12}(\cos 60^\circ+i\text{sen} 60^\circ)$ ; b)  $\sqrt{2}_{225^\circ}, \sqrt{2}(\cos 225^\circ+i\text{sen} 225^\circ)$ ; c)  $2\sqrt{2}_{315^\circ}, 2\sqrt{2}(\cos 315^\circ+i\text{sen} 315^\circ)$
23. Escribir en forma binómica y trigonométrica los números complejos: a)  $6_{\pi/3}$ ; b)  $2_{45^\circ}$ ; c)  $2_{300^\circ}$ .  
Sol: a)  $6(\cos 60^\circ+i\text{sen} 60^\circ)=(3,3\sqrt{3}i)$ ; b)  $2(\cos 45^\circ+i\text{sen} 45^\circ)=(\sqrt{2}+\sqrt{2}i)$ ; c)  $2(\cos 300^\circ+i\text{sen} 300^\circ)=1-\sqrt{3}i$
24. Representar gráficamente los opuestos y los conjugados de: a)  $-3-i$ ; b)  $1+i$ ; c)  $+3i$ .
25. Escribir en forma binómica:  $6(\cos 30^\circ+i\text{sen} 30^\circ)$ . Sol:  $3\sqrt{3}-3i$
26. Hallar el módulo y el argumento de: a)  $(1+i)/(1-i)$ . b)  $(1+i)(2i)$ . Sol: a)  $1_{90^\circ}$ ; b)  $\sqrt{8}_{135^\circ}$

27. ¿Qué figura representan en el plano los puntos que tienen de coordenadas polares  $3_\alpha$ ,  $\alpha$  variable? ¿y los que tienen  $\rho_{90^\circ}$ ,  $\rho$  variable? Sol: a) circunferencia de centro (0,0) y radio 3; b) semieje OY positivo
28. Dado  $z = \rho_\alpha$ . Expresar en forma polar: a)  $-z$ , b)  $z^{-1}$ , c) el conjugado de  $z$ , d)  $z^3$ .

Sol: a)  $\rho_{180^\circ+\alpha}$ ; b)  $\left(\frac{1}{\rho}\right)_{-\alpha}$ ; c)  $\rho_{-\alpha}$ ; d)  $\rho^3_{3\alpha}$

### Sumas, restas, productos, divisiones, mixtos

- Efectuar las siguientes operaciones entre números complejos:  
a)  $(2+3i)+(4-i)$ ; b)  $(3+3i) - (6+2i)$ ; c)  $(3-2i) + (2+i) - 2(-2+i)$ ; d)  $(2-i)-(5+3i) + (1/2)(4-4i)$ .  
Sol: a)  $(6+2i)$ ; b)  $(-3+i)$ ; c)  $(9-3i)$ ; d)  $-1-6i$
- Multiplicar los siguientes números complejos:  
a)  $(1+2i)(3-2i)$ ; b)  $(2+i)(5-2i)$ ; c)  $(i+1)(3-2i)(2+2i)$ ; d)  $3(2-i)(2+3i)i$ . Sol: a)  $7+4i$ ; b)  $12+i$ ; c)  $8+12i$ ; d)  $-12+21i$
- Efectuar las siguientes divisiones de números complejos:  
a)  $(2+i)/(1-2i)$ ; b)  $(7-i)/(3+i)$ ; c)  $(5+5i)/(3-i)$ ; d)  $(3-i)/(2+i)$ ; e)  $(18-i)/(3+4i)$ . Sol: a)  $i$ ; b)  $2-i$ ; c)  $1+2i$ ; d)  $1-i$ ; e)  $2-3i$
- Efectuar las siguientes operaciones y simplificar:  
a)  $5-3[3+(2/3)i]$ ; b)  $[2i(-i+2)] / (1+i)$ ; c)  $[(-2i)^2(1+3i)]/(4+4i)$ ; d)  $[(1+3i)(1+2i)]/(1+i)$ . Sol: a)  $-4-2i$ ; b)  $3+i$ ; c)  $-2-i$ ; d)  $5i$
- Dado el número complejo  $z=2+2i$ , calcular y representar: a) su conjugado ( $\bar{z}$ ); b) la suma  $z + \bar{z}$ ; c) el producto  $z \cdot \bar{z}$ . Sol: a)  $2-2i$ ; b)  $4$ ; c)  $8$
- Calcular: a)  $(3+i)(2+i)-(1-i)(2-2i)$ ; b)  $(3-2i)+(1+2i)(6-2i)-(2-i)$ ; c)  $(3+2i)+(2-4i)6$ . Sol: a)  $(5+9i)$ ; b)  $11+9i$ ; c)  $15-22i$
- Efectuar los siguientes productos y expresa el resultado en forma polar y binómica:  
a)  $(\cos 30^\circ + i \sin 30^\circ)[2(\cos 15^\circ + i \sin 15^\circ)]$  b)  $[2(\cos 23^\circ + i \sin 23^\circ)][3(\cos 37^\circ + i \sin 37^\circ)]$ ;  
c)  $[5(\cos 33^\circ + i \sin 33^\circ)]^2_{57^\circ}$  d)  $(2+2i)(1-i)$ ; e)  $(3+4i)1_{180^\circ}$ .  
Sol: a)  $2_{45^\circ} = \sqrt{2} + \sqrt{2}i$ ; b)  $6_{60^\circ} = 3\sqrt{3} + 3i$ ; c)  $10_{90^\circ} = 10i$ ; d)  $4_0 = 4$ ; e)  $5_{233^\circ} = -3-4i$
- Efectuar las operaciones: a)  $1_{150^\circ}3_{30^\circ}$ ; b)  $6_{60^\circ} \cdot 2_{15^\circ}$ ; c)  $2_{20^\circ}1_{30^\circ}2_{70^\circ}$ ; d)  $6_{(2\pi/3)} \cdot 3_{90^\circ}$ ; e)  $(5_{\pi/9})^9$ ; f)  $(2+2i)^4$ .  
Sol: a)  $3_{180^\circ}$ ; b)  $3_{45^\circ}$ ; c)  $4_{120^\circ}$ ; d)  $2_{30^\circ}$ ; e)  $59_{180^\circ}$ ; f)  $64_{180^\circ}$
- Efectuar las operaciones: a)  $2_{105^\circ}3_{85^\circ}$ ; b)  $4_{65^\circ} \cdot 2_{15^\circ}$ ; c)  $5_{22^\circ}2_{28^\circ}1_{30^\circ}$ ; d)  $4_{150^\circ} \cdot 2_{(\pi/2)}$ ; e)  $(2_{20^\circ})^3$ ; f)  $(3_{60^\circ})^4$ .  
Sol: a)  $6_{190^\circ}$ ; b)  $2_{50^\circ}$ ; c)  $10_{80^\circ}$ ; d)  $2_{60^\circ}$ ; e)  $8_{60^\circ}$ ; f)  $81_{240^\circ}$
- Calcular el inverso de los números complejos siguientes y representar gráficamente el resultado:  
a)  $2_{(\pi/2)}$  b)  $4i$  c)  $-3+i$ . Sol: a)  $(1/2)_{(-\pi/2)}$ ; b)  $-0,25i$ ; c)  $(-3/10)-(1/10)i$
- ¿Cómo es gráficamente el inverso de un número complejo?. ¿Cuál es su módulo?. ¿Y su argumento? Sol: a) perpendicular; b) módulo= $(1/r)$ , argumento= $-\alpha$
- Simplificar las expresiones: a)  $\frac{3_{45^\circ}2_{15^\circ}}{6_{30^\circ}}$ , b)  $\frac{2_{30^\circ}3_{60^\circ}}{3_{120^\circ}1_{300^\circ}}$ , c)  $\frac{2_{45^\circ}2_{15^\circ}}{4_{90^\circ}}$ . Sol: a)  $1_{30^\circ}$ ; b)  $2_{30^\circ}$ ; c)  $1_{330^\circ}$
- Efectuar algebraica y gráficamente las operaciones con números complejos:  
a)  $(3+2i)+(2-3i)$ ; b)  $(-3+2i)+(-2-i)$ ; c)  $(2-i)i$ ; d)  $(-2+i)i$ . Sol: a)  $(5-i)$ ; b)  $(-5+i)$ ; c)  $(1+2i)$ ; d)  $(-1-2i)$
- Calcular los siguientes productos:  
a)  $2(\cos 23^\circ + i \sin 23^\circ) \cdot 5(\cos 12^\circ + i \sin 12^\circ)$ . b)  $(1+i)(2_{30^\circ})$ . c)  $2(\cos 18^\circ + i \sin 18^\circ)(3_{22^\circ})$ .  
Sol: a)  $10(\cos 35^\circ + i \sin 35^\circ)$ ; b)  $(-1 + \sqrt{3}) + (1 + \sqrt{3})i$ ; c)  $6_{40^\circ}$
- Resolver las ecuaciones: a)  $x^3 - 27 = 0$  b)  $x^5 + 32 = 0$ . Sol: a)  $x=3$ ;  $x=3_{120^\circ}$ ;  $x=3_{240^\circ}$ ; b)  $2_{36^\circ+72^\circ k}$   $k=0,1,2,3,4$
- Dados  $z=(1,3)$ ,  $w=(2,1)$  Hallar  $z-w$ ;  $zw$ ;  $z^{-1}$ . Sol: a)  $-1+2i$ ; b)  $-1+7i$ ; c)  $(1/10)-(3/10)i$
- Dados  $z=-1+3i$ ,  $w=-2+i$ . Calcular y representar a)  $z+w$ ; b)  $zw$ ; c)  $z^2$ ; d)  $z + \bar{w}$ ; e)  $z/w$ .  
Sol: a)  $-3+4i$ ; b)  $-1-7i$ ; c)  $-8-6i$ ; d)  $-3+2i$ ; e)  $1-i$
- Efectuar las siguientes operaciones: a)  $6_{90^\circ} \sqrt{2}_{15^\circ}$ . b)  $8_{120^\circ}/4_{\pi/2}$ . Sol: a)  $6\sqrt{2}_{105^\circ}$ ; b)  $2_{30^\circ}$
- Hallar  $\frac{i^{32}i^{17}}{i^2i^3}$ . Sol: 1
- Hallar el módulo de los complejos: a)  $z=-2i(1+i)(-2-2i)(3)$ ; y b)  $w = \frac{(2-i) \cdot (-1+2i)}{(1-i) \cdot (1+i)}$ . Sol: a) 24; b) 5/2
- Representar gráficamente las sumas: a)  $(-i)+(3-i)$ ; b)  $(-2+i)+(3-2i)$ .

22. Representar gráficamente el número complejo  $3-2i$ . Aplicarle un giro de  $90^\circ$  alrededor del origen. ¿Cuál es el nuevo número complejo?. Multiplica ahora  $3-2i$  por  $i$ . Sol:  $2+3i$ ;  $12+5i$
23. Hallar el módulo de  $z = \frac{2-4i}{4+2i}$ . Sol:  $|z|=1$

## Ecuaciones

- Resolver las siguientes ecuaciones y determinar en qué campo numérico tienen solución:  
a)  $x^2+4=0$ ; b)  $x^2-9=0$ ; c)  $x^2+1=0$ . Sol: a)  $\pm 2i$ ; b)  $\pm 3$ ; c)  $\pm i$
- Resolver las ecuaciones: a)  $x^2-2x+5=0$ ; b)  $x^2-6x+13=0$ ; c)  $x^2-4x+5=0$ . Sol: a)  $1 \pm 2i$ ; b)  $3 \pm 2i$ ; c)  $2 \pm i$
- Encontrar los puntos de intersección de la circunferencia  $x^2+y^2=2$  y la recta  $y=x$ . ¿Son soluciones reales o imaginarias? Sol: reales:  $(1,1)$ ,  $(-1,-1)$
- Encontrar los puntos de intersección de la circunferencia  $x^2+y^2=1$  y la recta  $y=x-3$ . ¿Son soluciones reales o imaginarias? Sol: imaginarias  $x=3/2 \pm (\sqrt{7}/2)i$
- ¿A qué campo numérico pertenecen las soluciones de estas ecuaciones?  
a)  $x^2-3x+2=0$       b)  $x^2-2x+2=0$       c)  $2x^2-7x+3=0$       d)  $(x^2/2)+8=0$ .  
Sol: a) Real,  $x=2$ ,  $x=1$ ; b) Imaginaria  $x=1 \pm i$ ; c) Real,  $x=1/2$ ,  $x=3$ ; d) Imaginaria,  $x= \pm 4i$
- Calcular los puntos de intersección de la elipse  $(x^2/4)+(y^2/9)=1$  con la recta  $x=5$ . Sol:  $\pm 9/4 i$
- Resolver las ecuaciones siguientes indicando el campo numérico al que pertenecen las soluciones: a)  $x^2-4=0$       b)  $x^2-5=0$ ; c)  $x^2+1=0$ . Sol: a)  $\pm 2$ ; b)  $\pm \sqrt{5}$ ; c)  $\pm i$
- Resolver las ecuaciones: a)  $x^2-10x+29=0$       b)  $x^2-6x+10=0$       c)  $x^2-4x+13=0$ .  
Sol: a)  $5 \pm 2i$ ; b)  $3 \pm i$ ; c)  $2 \pm 3i$
- Representar gráficamente las raíces de las ecuaciones:  
a)  $x^2+4=0$       b)  $x^2+1=0$ ; c)  $x^2-9=0$       d)  $x^2+9=0$ . Sol: a)  $\pm 2i$ ; b)  $\pm i$ ; c)  $\pm 3$ ; d)  $\pm 3i$
- Escribir una ecuación de segundo grado cuyas raíces sean  $2+2i$  y  $2-2i$ .  
(Recuerda:  $x_1+x_2=(-b/a)$ ;  $x_1 \cdot x_2=(c/a)$ . Sol:  $x^2-4x+8=0$
- Resolver la ecuación  $x^3+27=0$ . Representa gráficamente todas sus soluciones.  
Sol:  $x=3_{180^\circ}$ ,  $x=3_{300^\circ}$ ,  $x=3_{60^\circ}$
- Resolver la ecuación de segundo grado  $x^2-2x+17=0$ . Tiene dos raíces complejas. ¿Cómo son entre sí?. ¿Se puede generalizar el resultado? Sol: a)  $1 \pm 4i$ ; b) conjugadas; c) sí
- Resolver las ecuaciones: a)  $x^3-8=0$ ;      b)  $x^5-32=0$ ;      c)  $x^4-81=0$ ;      d)  $x^3-1=0$ .  
Sol: a)  $x=2_{120^\circ}$   $k=0,1,2$ ; b)  $x=2_{72^\circ}$   $k=0,1,2,3,4$ ; c)  $x= \pm 3$ ;  $x= \pm 3i$ ; d)  $x=1$ ,  $x=1_{120^\circ}$ ,  $x=1_{240^\circ}$
- Resolver la ecuación  $x^2-4x+5=0$  y comprueba que, en efecto, las raíces obtenidas verifican dicha ecuación. Sol: a)  $2 \pm i$
- Resolver las ecuaciones  $x^6+64=0$  y  $x^4+81=0$ . Sol: a)  $x=2_{90^\circ+60^\circ}$   $k=0,1,2,3,4,5$ ; b)  $x=3_{45^\circ+90^\circ}$   $k=0,1,2,3$
- Escribir una ecuación de raíces  $1+3i$ ,  $1-3i$ . Sol:  $x^2-2x+10=0$
- Probar que  $3+i$  y  $3-i$  son raíces de la ecuación  $x^2-6x+10$ . Sol:  $[x-(3+i)][x-(3-i)]=x^2-6x+10$
- Resolver la ecuación: a)  $x^4+1=-35$ . Sol:  $x= \sqrt{3} \pm \sqrt{3} i$ ;  $x=-\sqrt{3} \pm \sqrt{3} i$

## Potencias, raíces, mixtos

- Calcular las potencias: a)  $(2-3i)^3$ ; b)  $(3+i)^2$ ; c)  $i^{23}$ ; d)  $(2+2i)^4$ . Sol: a)  $-46-9i$ ; b)  $8+6i$ ; c)  $-i$ ; d)  $-64$
- Calcular: a)  $i^{27}$ ; b)  $i^{48}$ ; c)  $i^7$ ; d)  $i^{12}$ ; e)  $i^{33}$ ; f)  $i^{35}$ . Sol: a)  $-i$ ; b)  $1$ ; c)  $-i$ ; d)  $1$ ; e)  $i$ ; f)  $-i$
- Sabemos que  $z_1=3-2i$ , que  $z_2=4-3i$  y que  $z_3=-3i$ . Calcular:  
a)  $z_1+2z_2-z_3$       b)  $z_1(z_2+z_3)$       c)  $z_2^2$       d)  $2z_1-z_2+z_3$ . Sol: a)  $11-5i$ ; b)  $-26i$ ; c)  $7-24i$ ; d)  $2-4i$
- Calcular: a)  $(1+2i)^3$ ; b)  $(-3-i)^4$ ; c)  $(1-3i)^2$ . Sol: a)  $-11-2i$ ; b)  $28+96i$ ; c)  $-8-6i$
- Calcular: a)  $i^{210}$ ; b)  $i^{312}$ ; c)  $i^{326}$ ; d)  $i^{1121}$ . Sol: a)  $-1$ ; b)  $1$ ; c)  $-1$ ; d)  $i$
- Calcular: a)  $(1+i)^3$ ; b)  $(1-i)^3$ ; c)  $(-1+i)^3$ ; d)  $(-1-i)^3$ . Sol: a)  $-2+2i$ ; b)  $-2-2i$ ; c)  $2+2i$ ; d)  $2-2i$
- Calcular: a)  $1/i^3$       b)  $1/i^4$       c)  $i^{-1}$       d)  $i^{-2}$ . Sol: a)  $i$ ; b)  $1$ ; c)  $-i$ ; d)  $-1$

8. Dados los complejos:  $z_1=3^{45^\circ}$ ;  $z_2=2^{30^\circ}$  y  $z_3=-2i$ . Calcular:  
 a)  $z_1 z_3$       b)  $z_1 / (z_2)^2$       c)  $(z_1)^2 / [z_2(z_3)^3]$ .      Sol: a)  $6^{315^\circ}$ ; b)  $(3/4)^{-15^\circ}$ ; c)  $(9/16)^{330^\circ}$
9. Calcular, expresando el resultado en forma polar:  
 a)  $(1+i)^6$       b)  $[(-1/2)+(\sqrt{2}/2)i]^8$       c)  $(1-i)^4$ .  
 Sol: a)  $8^{270^\circ}$ ; b)  $1^{240^\circ}$ ; c)  $4^{180^\circ}$
10. Calcular las potencias: a)  $[2(\cos 45^\circ + i \sin 45^\circ)]^4$     b)  $(\sqrt{2}^{30^\circ})^6$     c)  $[\sqrt[4]{3}(\cos 10^\circ + i \sin 10^\circ)]^8$ .  
 Sol: a)  $16^{180^\circ}$ ; b)  $8^{180^\circ} = -8$ ; c)  $9^{80^\circ}$
11. Calcular las raíces quintas de la unidad. Hacerlo expresando 1 como complejo en forma polar.  
 Sol:  $1^{0^\circ}$ ;  $1^{72^\circ}$ ;  $1^{144^\circ}$ ;  $1^{216^\circ}$ ;  $1^{288^\circ}$
12. Calcular: a)  $\sqrt{-i}$ ; b)  $\sqrt[3]{1+i}$ ; c)  $\sqrt{-16}$       Sol: a)  $1^{135^\circ}$ ;  $1^{315^\circ}$ ; b)  $\sqrt[3]{2}^{15^\circ}$ ;  $\sqrt[3]{2}^{135^\circ}$ ;  $\sqrt[3]{2}^{255^\circ}$ ; c)  $4^{90^\circ}$ ,  $4^{270^\circ}$
13. Calcular  $\sqrt[3]{\frac{1-i}{1-\sqrt{3}i}}$       Sol:  $1/\sqrt[3]{2}^{5^\circ+120^\circ k}$      $k=0,1,2$
14. Calcular las raíces siguientes y representar gráficamente las soluciones: a)  $\sqrt{-4}$ ; b)  $\sqrt[3]{-27}$ ; c)  $\sqrt[3]{\frac{1+i}{1-i}}$ ; d)  $\sqrt[3]{\frac{-27}{i}}$       Sol: a)  $2^{90^\circ}$ ,  $2^{270^\circ}$ ; b)  $3^{60^\circ}$ ,  $3^{180^\circ}$ ,  $3^{300^\circ}$ ; c)  $1^{30^\circ}$ ,  $1^{150^\circ}$ ,  $1^{270^\circ}$ ; d)  $3^{30^\circ}$ ,  $3^{150^\circ}$ ,  $3^{270^\circ}$
15. Calcular las raíces: a)  $\sqrt[4]{4(\cos 60^\circ + i \sin 60^\circ)}$ ; b)  $\sqrt[3]{27(\cos 180^\circ + i \sin 180^\circ)}$ ; c)  $\sqrt[4]{81(\cos 120^\circ + i \sin 120^\circ)}$ ; d)  $\sqrt[6]{i}$       Sol: a)  $2^{30^\circ}$ ,  $2^{210^\circ}$ ; b)  $3^{60^\circ}$ ,  $3^{180^\circ}$ ,  $3^{300^\circ}$ ; c)  $3^{40^\circ+90^\circ k}$      $k=0,1,2,3$ ; d)  $1^{15^\circ+60^\circ k}$      $k=0,1,2,3,4,5$
16. ¿De qué número es  $(2+3i)$  raíz cúbica?      Sol:  $-46+9i$
17. a) Operar la expresión  $(1+3i)^2(3-4i)$   
 b) calcular las raíces cúbicas del resultado.      Sol: a)  $50i$ ; b)  $\sqrt[3]{50}^{30^\circ+120^\circ k}$      $k=0,1,2$
18. Calcular el valor de  $(i^4 - i^3)/8i$  y encontrar sus raíces cúbicas.      Sol:  $(1/2)^{105^\circ+120^\circ k}$      $k=0,1,2$
19. Calcular: a)  $(1+i)^8$ ; b)  $(-1+i)^6$ ; c)  $(1+\sqrt{3}i)^2$ ; d)  $(-2-2i)^4$ .      Sol: a)  $16_0$ ; b)  $8_{90}$ ; c)  $10_{120}$ ; d)  $64_{180}$
20. Calcular  $(i^4+i^5)/\sqrt{2}i$ . Escribir el resultado en forma polar.      Sol:  $1^{315^\circ}$
21. a) Si una raíz cúbica de un número es  $2i$ , calcular las otras dos raíces y ese número.  
 b) Calcular  $(\cos 10^\circ + i \sin 10^\circ)^8$       Sol: a)  $2^{210^\circ}$ ,  $2^{330^\circ}$ ;  $-8i=8^{270^\circ}$ ; b)  $1^{80^\circ}$
22. Hallar las raíces cúbicas de los complejos: a)  $2+2i$ ; b)  $1+\sqrt{3}i$ ; c)  $-2+2\sqrt{3}i$ .  
 Sol: a)  $\sqrt{2}^{15^\circ}$ ;  $\sqrt{2}^{135^\circ}$ ;  $\sqrt{2}^{255^\circ}$ ; b)  $\sqrt[3]{2}^{20^\circ+120^\circ k}$      $k=0,1,2,3,4,5$ ; c)  $\sqrt[3]{2}^{40^\circ+120^\circ k}$      $k=0,1,2$
23. Calcular:  $z = \sqrt[3]{\frac{8}{2-2i}}$       Sol:  $\sqrt{2}^{15^\circ+120^\circ k}$      $k=0,1,2$
24. Hallar las raíces cúbicas de a)  $-1$  y b)  $-i$ .      Sol: a)  $1^{60^\circ}$ ,  $1^{180^\circ}$ ,  $1^{300^\circ}$ ; b)  $1^{90^\circ}$ ,  $1^{210^\circ}$ ,  $1^{330^\circ}$
25. Calcular las tres raíces de  $\sqrt[3]{\frac{3+3i}{-3+3i}}$  en forma polar:      Sol:  $1^{90^\circ}$ ;  $1^{210^\circ}$ ;  $1^{330^\circ}$
26. a) Calcular:  $i^{14}$ ,  $i^{18}$ ,  $i^{33}$   
 b) Si  $z_1 = 2-2i$ ;  $z_2 = 1+3i$ ; y  $z_3 = 2i$ . Hallar:  $2z_1 - z_2 + 2z_3$ ;  $z_1 \cdot (z_2 - z_3)$ ;  $(z_1)^2$ .  
 c) Hallar:  $(1+2i)^3$   
 d) Hallar  $x$  para que se verifique que  $(x-i)/(2+i) = 1-i$ .      Sol: a)  $-1$ ,  $-1$ ,  $i$ ; b)  $3-3i$ ,  $4$ ,  $-8i$ ; c)  $-11-2i$ ; d)  $x=3$
27. Calcular  $\sqrt[3]{-27i}$ .      Sol:  $3^{90^\circ}$ ,  $3^{210^\circ}$ ,  $3^{330^\circ}$
28. Calcular las siguientes potencias: a)  $[2(\cos 25^\circ + i \sin 25^\circ)]^4$ . b)  $(\sqrt{3}^{30^\circ})^8$ .      Sol: a)  $16^{100^\circ}$ ; b)  $81^{240^\circ}$
29. Hallar el módulo de:  $5 \cdot (i^2+i^{-3})/(i^2-3i)$ .      Sol:  $z=-1-2i$ ;  $|z| = \sqrt{5}$
30. Calcular  $(-2+2i)^{64}$       Sol:  $8^{32}{}_{8640^\circ} = 8^{32}$
31. Calcular el valor de  $(i^3-i^{-3})/(2i)$  y hallar sus raíces cúbicas.      Sol: a)  $-1$ ; b)  $1^{60^\circ}$ ,  $1^{180^\circ}$ ,  $1^{300^\circ}$
32. a) Calcular el valor de la fracción  $(z^3+z)/(z^2+2)$  para  $z=1+i$   
 b) Dar el valor de la misma fracción para  $\bar{z}=1-i$ .      Sol: a)  $1/2+i$ ; b)  $1/2-i$



18. Resolver las ecuaciones siguientes en el campo complejo. En todos los casos  $z$  es un número complejo; despejar y calcular su valor:
- a)  $(2-2i)z=10-2i$ ;                      b)  $\frac{z}{3+i}=2-i$ ;  
 c)  $\frac{z}{3+4i} + \frac{2z+5i}{1-2i} = 2+2i$                       d)  $\frac{z}{-z} + \frac{2z-2i}{1-i} = 3-2i$                       Sol: a)  $3+2i$ ; b)  $7-i$ ; c)  $4-3i$ ; d)  $1-2i$
19. Despejar  $z$  y calcular su valor en las ecuaciones siguientes: a)  $[z/(1+i)]+(2-3i)=(4-4i)$ ;  
 b)  $(3+i)/z=(1+2i)$ ;    c)  $(2+2i)z=(10+2i)$ .                      Sol: a)  $3+i$ ; b)  $1-i$ ; c)  $3-2i$
20. Resolver los sistemas de ecuaciones siguientes, en los que  $\alpha$  y  $\beta$  son números complejos:
- a)  $\begin{cases} \alpha i + (2+i)\beta = -3+7i \\ (2-i)\alpha + (2+i)\beta = 5+3i \end{cases}$                       b)  $\begin{cases} \alpha(1+i) + (1+i)\beta = 5+5i \\ (2+i)\alpha + i\beta = 2+2i \end{cases}$   
 c)  $\begin{cases} (1+i)\alpha + (2+i)\beta = 9+2i \\ 2\alpha - i\beta = 5-4i \end{cases}$                       Sol: a)  $\alpha = 3+i$ ;  $\beta = 2i$ ; b)  $\alpha = 1-i$ ;  $\beta = 3+i$ ; c)  $\alpha = 3-i$ ;  $\beta = 2-i$
21. Calcular  $z$  en las ecuaciones siguientes: a)  $\frac{z}{1-2i} + 1-i = 2+i$ ; b)  $\frac{z}{2+i} + \frac{z-i}{2-i} = 3-2i$   
 Sol: a)  $5$ ; b)  $7/2-2i$
22. Resolver el sistema ( $x$  e  $y$  son números complejos):  $\begin{cases} (2+i)x + (1+i)y = 2+3i \\ (2-i)x - iy = 0 \end{cases}$                       Sol:  $x=i$ ;  $y=2-i$
23. Hallar el número complejo  $z$  que cumpla:  $[z/(2-i)]+[(2z-5)/(2-i)]=1+2i$ .                      Sol:  $z=3+i$
24. Hallar  $z$  tal que  $z^3$  sea igual al conjugado de  $z$ .                      Sol:  $z=i$ ,  $z=1$ ,  $z=-1$ ,  $z=0$
25. Resolver la ecuación  $(1-i)z^2-7=i$ .                      Sol:  $z=2+i$  y  $z=-2-i$

### **Problemas y método de Moivre**

- Si el producto de dos números complejos es  $-18$  y dividiendo uno de ellos entre el otro, obtenemos de resultado  $2i$ . ¿Cuánto valen el módulo y el argumento de cada uno?  
 Sol:  $3_{45^\circ}$  y  $6_{135^\circ}$
- El cociente de dos números complejos es  $1/2$  y el dividendo es el cuadrado del divisor. Calcular sus módulos y sus argumentos.                      Sol:  $(1/2)_{0^\circ}$ ;  $(1/4)_{0^\circ}$
- Aplicar un giro de  $90^\circ$  sobre el punto  $A(3,1)$ . Determinar, utilizando el cálculo de números complejos, las coordenadas del punto que obtienes.                      Sol: a)  $(-1,3)$
- La suma de dos números complejos conjugados es  $6$  y la suma de sus módulos  $10$ . ¿De qué números complejos se trata?                      Sol:  $(3+4i)$ ,  $(3-4i)$
- La resta de dos números complejos es  $2+6i$ , y el cuadrado del segundo dividido por el primero es  $2$ . Hallarlos.                      Sol:  $4+2i$ ,  $6+8i$ ;  $4i$ ,  $-2-2i$
- Hallar dos números complejos sabiendo que: su diferencia es real, su suma tiene de parte real  $8$  y su producto vale  $11-16i$ .                      Sol:  $(3-2i)$ ;  $2i$
- El producto de dos números complejos es  $-27$ . Hallarlos sabiendo que uno de ellos es el cuadrado del otro.                      Sol:  $3_{60^\circ}$ ,  $9_{120^\circ}$ .
- La suma de dos números complejos es  $-5+5i$ ; la parte real de uno de ellos es  $1$ . Determinar dichos números sabiendo que su cociente es imaginario puro.                      Sol:  $(1+3i)$  y  $(-6+2i)$  ó  $(1+2i)$  y  $(-6+3i)$
- La suma de dos complejos es  $5-i$  y su producto es  $8+i$ . Hallar los números.                      Sol:  $3-2i$ ,  $2+i$
- La suma de dos complejos conjugados es  $8$  y la suma de sus módulos  $10$  ¿Cuáles son los números complejos?                      Sol:  $(4+3i)$ ,  $(4-3i)$
- El producto de dos números complejos es  $-2$  y el cubo de unos de ellos dividido por el otro es  $1/2$ . Calcular módulos y argumentos.                      Sol:  $1_{45^\circ}$ ,  $2_{135^\circ}$ ;  $1_{135^\circ}$ ,  $2_{45^\circ}$ ;  $1_{225^\circ}$ ,  $2_{315^\circ}$ ;  $1_{315^\circ}$ ,  $2_{225^\circ}$

12. Hallar  $z$  tal que: a) el conjugado de  $z$  sea igual a  $-z$ . b) el conjugado de  $z$  sea igual a  $z^{-1}$ . c) la suma del conjugado de  $z$  más  $z$  sea igual a 2. d)  $z$  menos el conjugado de  $z$  sea igual a  $2i$ .  
Sol: a)  $z=ki$ ; b)  $a+bi/a^2+b^2=1$ ; c)  $1+ki$ ; d)  $k+i$
13. El complejo de argumento  $70^\circ$  y módulo 8 es el producto de dos complejos, uno de ellos tiene de argumento  $40^\circ$  y módulo 2. Escribir en forma binómica el otro complejo. Sol:  $8_{30^\circ} = 4\sqrt{3} + 4i$
14. Determinar el número complejo sabiendo que si después de multiplicarlo por  $(1-i)$  se le suma al resultado  $(-3+5i)$  y se divide lo obtenido por  $2+3i$  se vuelve al complejo de partida. Sol:  $1+i$

### Figuras geométricas

15. Sabiendo que los puntos P, Q y R son los afijos de las raíces cúbicas de un número complejo, siendo las coordenadas polares de P  $3_{30^\circ}$ . Hallar las coordenadas polares y cartesianas de Q y R y el número complejo. Sol:  $Q=3_{150^\circ}=-3\sqrt{3}/2+3/2i$ ;  $R=3_{270^\circ}=-3i$ ;  $27i$
16. Hallar las coordenadas de los vértices de un hexágono regular, de centro el origen sabiendo que uno de los vértices es el afijo del número complejo  $2_{\pi/2}$ . Sol:  $2_{150^\circ}$ ,  $2_{210^\circ}$ ,  $2_{270^\circ}$ ,  $2_{330^\circ}$ ,  $2_{30^\circ}$
17. Hallar las coordenadas de los vértices de un cuadrado (de centro el origen de coordenadas) sabiendo que uno de sus vértices es el afijo del número complejo  $1_{120^\circ}$ . Sol:  $1_{30^\circ}$ ,  $1_{210^\circ}$ ,  $1_{300^\circ}$
18. Hallar las coordenadas polares y cartesianas de los vértices de un hexágono regular de radio 3 u, sabiendo que un vértice está situado en el eje OX. Sol:  $3_{0^\circ}$ ,  $3_{60^\circ}$ ,  $3_{120^\circ}$ ,  $3_{180^\circ}$ ,  $3_{240^\circ}$ ,  $3_{300^\circ}$
19. Los afijos de las raíces de un complejo son vértices de un octógono regular inscrito en una circunferencia de radio 2 u; el argumento de una de las raíces es  $45^\circ$ . Hallar el número complejo y las restantes raíces. Sol:  $256$ ;  $2_{45^\circ}$ ,  $2_{90^\circ}$ ,  $2_{135^\circ}$ ,  $2_{180^\circ}$ ,  $2_{225^\circ}$ ,  $2_{270^\circ}$ ,  $2_{315^\circ}$ ,  $2_{360^\circ}$
20. Hallar las coordenadas de los vértices de un cuadrado, inscrito en una circunferencia de centro el origen de coordenadas, sabiendo que uno de los vértices es el afijo del complejo  $1+2i$ . Sol:  $2+i$ ,  $-2+i$ ,  $-1-2i$

### Método de Moivre

21. Expresa en función de  $\cos \alpha$  y  $\sin \alpha$  y utilizando la fórmula de Moivre:  
a)  $\cos 2\alpha$  y  $\sin 2\alpha$ ;      b)  $\cos 3\alpha$  y  $\sin 3\alpha$ .  
Sol: a)  $\sin 2\alpha = 2\sin \alpha \cos \alpha$ ;  $\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$ ;      b)  $\sin 3\alpha = 3\cos^2 \alpha \sin \alpha - \sin^3 \alpha$ ;  $\cos 3\alpha = \cos^3 \alpha - 3\cos \alpha \sin^2 \alpha$
22. Encuentra las fórmulas para calcular  $\sin 4\alpha$  y  $\cos 4\alpha$  en función de  $\sin \alpha$  y  $\cos \alpha$ .  
Sol:  $\sin 4\alpha = 4\sin \alpha \cos^3 \alpha - 4\cos \alpha \sin^3 \alpha$ ;  $\cos 4\alpha = \cos^4 \alpha + \sin^4 \alpha - 6\cos^2 \alpha \sin^2 \alpha$
23. Hallar  $\sin^3 5a$  y  $\cos^2 5a$  sabiendo que  $\sin a = 1/2$  y  $a$  pertenece al primer cuadrante.  
Sol:  $\sin^3 5a = 1/8$ ;  $\cos^2 5a = 3/4$
24. Si  $\sin x = 1/3$  y  $0 < x < \pi/2$ . Hallar  $\sin 6x$  y  $\cos 6x$ . Sol:  $\sin 6x = 460\sqrt{2}/729$ ;  $\cos 6x = -329/729$