

6

NÚMEROS COMPLEJOS

Página 146

PARA EMPEZAR, REFLEXIONA Y RESUELVE

El paso de $\mathbb{Z}$ a $\mathbb{Q}$

- Imaginemos que solo se conocieran los números enteros, $\mathbb{Z}$.

Sin utilizar otro tipo de números, intenta resolver las siguientes ecuaciones:

a) $3x = 15$

b) $-2x = 18$

c) $11x = -341$

d) $4x = 34$

- a) $x = 5$

b) $x = -9$

c) $x = -31$

d) No se puede.

- Di cuáles de las siguientes ecuaciones se pueden resolver en $\mathbb{Z}$ y para cuáles es necesario el conjunto de los números enteros, $\mathbb{Q}$.

a) $-5x = 60$

b) $-7x = 22$

c) $2x + 1 = 15$

d) $6x - 2 = 10$

e) $-3x - 3 = 1$

f) $-x + 7 = 6$

- a) $x = -12$

b) $x = -\frac{22}{7}$

c) $x = 7$

d) $x = 2$

e) $x = -\frac{4}{3}$

f) $x = 1$

Para b) y e) necesitamos $\mathbb{Q}$.

Página 147

El paso de $\mathbb{Q}$ a $\mathbb{R}$

- Intenta resolver, sin salir de $\mathbb{Q}$, las siguientes ecuaciones:

a) $3x^2 - 12 = 0$

b) $x^2 - 6x + 8 = 0$

c) $2x^2 + x - 1 = 0$

d) $x^2 - 2 = 0$

- a) $x_1 = -2, x_2 = 2$

b) $x_1 = 2, x_2 = 4$

c) $x_1 = -1, x_2 = \frac{1}{2}$

d) $x^2 = 2 \rightarrow$ No se puede.

■ Resuelve, ahora, las siguiente ecuaciones:

a) $x^2 - 9 = 0$

b) $5x^2 - 15 = 0$

c) $x^2 - 3x - 4 = 0$

d) $2x^2 - 5x + 1 = 0$

e) $7x^2 - 7x = 0$

f) $2x^2 + 3x = 0$

¿Qué ecuaciones se pueden resolver en $\mathbb{Q}$?

¿Para qué ecuaciones es necesario el conjunto de los números reales, $\mathbb{R}$?

■ a) $x_1 = -3, x_2 = 3$

b) $x_1 = -\sqrt{3}, x_2 = \sqrt{3}$

c) $x_1 = -1, x_2 = 4$

d) $x_1 = \frac{5 - \sqrt{17}}{4}, x_2 = \frac{5 + \sqrt{17}}{4}$

e) $x_1 = 0, x_2 = 1$

f) $x_1 = -\frac{3}{2}, x_2 = 0$

Para b) y d), necesitamos $\mathbb{R}$.

$\mathbb{R}$ *aún no es suficiente*

■ Intenta resolver en $\mathbb{R}$ las siguientes ecuaciones:

a) $x^2 - 2 = 0$

b) $2x^2 - 5x + 1 = 0$

c) $5x^2 - x - 2 = 0$

d) $x^2 + 1 = 0$

e) $x^2 - 2x + 5 = 0$

f) $5x^2 + 10 = 0$

■ a) $x_1 = -\sqrt{2}, x_2 = \sqrt{2}$

b) $x_1 = \frac{5 - \sqrt{17}}{4}, x_2 = \frac{5 + \sqrt{17}}{4}$

c) $x_1 = \frac{1 - \sqrt{41}}{10}, x_2 = \frac{1 + \sqrt{41}}{10}$

d) $x^2 = -1 \rightarrow$ No se puede.

e) $x = \frac{2 \pm \sqrt{-16}}{2} \rightarrow$ No se puede.

f) $x^2 = -2 \rightarrow$ No se puede.

■ Resuelve las tres últimas ecuaciones d), e) y f) utilizando para las soluciones números reales y la expresión $\sqrt{-1}$.

■ d) $x = \pm \sqrt{-1}, x_1 = -\sqrt{-1}, x_2 = \sqrt{-1}$

e) $x_1 = 1 - 2\sqrt{-1}, x_2 = 1 + 2\sqrt{-1}$

f) $x_1 = -\sqrt{2}\sqrt{-1}, x_2 = \sqrt{2}\sqrt{-1}$

Página 149

1. Representa gráficamente los siguientes números complejos y di cuáles son reales, cuáles imaginarios y, de estos, cuáles son imaginarios puros:

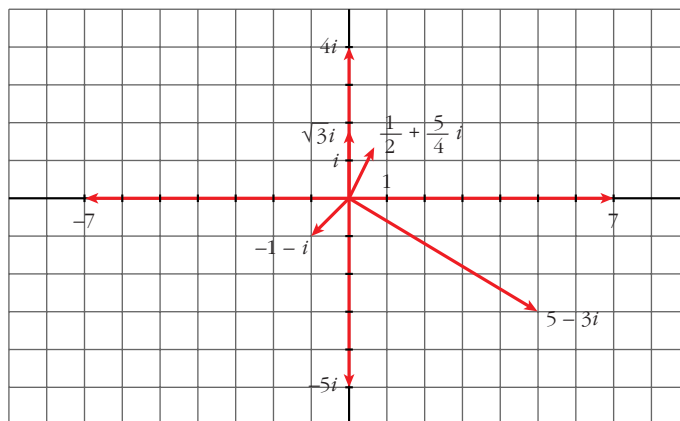
$5 - 3i; \quad \frac{1}{2} + \frac{5}{4}i; \quad -5i; \quad 7; \quad \sqrt{3}i; \quad 0; \quad -1 - i; \quad -7; \quad 4i$

- Reales: 7, 0 y -7

Imaginarios: $5 - 3i$, $\frac{1}{2} + \frac{5}{4}i$, $-5i$, $\sqrt{3}i$, $-1 - i$, $4i$

Imaginarios puros: $-5i$, $\sqrt{3}i$, $4i$

- Representación:



2. Obtén las soluciones de las siguientes ecuaciones y represéntalas:

a) $x^2 + 4 = 0$

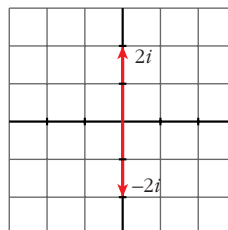
b) $x^2 + 6x + 10 = 0$

c) $3x^2 + 27 = 0$

d) $3x^2 - 27 = 0$

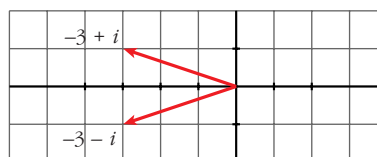
a) $x = \frac{\pm \sqrt{-16}}{2} = \frac{\pm 4i}{2} = \pm 2i$;

$x_1 = 2i$, $x_2 = -2i$



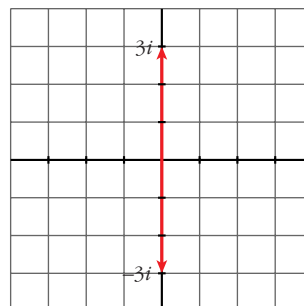
b) $x = \frac{-6 \pm \sqrt{36 - 40}}{2} = \frac{-6 \pm \sqrt{-4}}{2} =$

$= \frac{-6 \pm 2i}{2} = -3 \pm i$; $x_1 = -3 - i$, $x_2 = -3 + i$

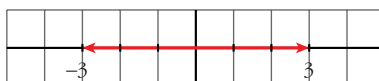


c) $x^2 = -9 \rightarrow x = \pm \sqrt{-9} = \pm 3i$

$x_1 = -3i$, $x_2 = 3i$



d) $x^2 = 9 \rightarrow x = \pm 3$
 $x_1 = -3, x_2 = 3$



3. Representa gráficamente el opuesto y el conjugado de:

a) $3 - 5i$

b) $5 + 2i$

c) $-1 - 2i$

d) $-2 + 3i$

e) 5

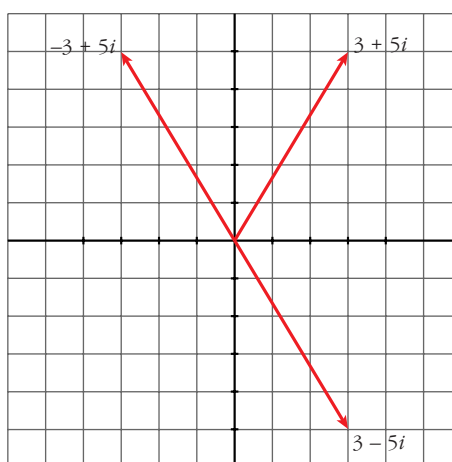
f) 0

g) $2i$

h) $-5i$

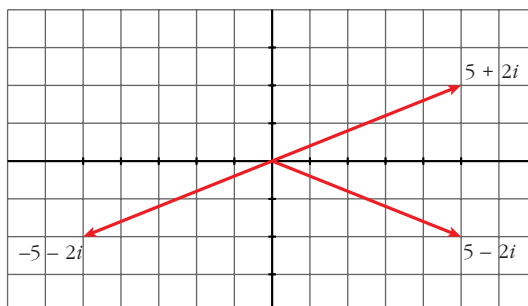
a) Opuesto: $-3 + 5i$

Conjugado: $3 + 5i$



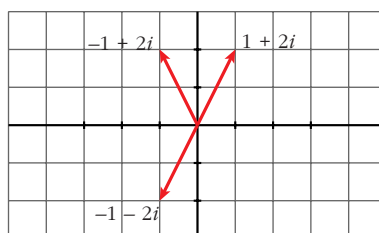
b) Opuesto: $-5 - 2i$

Conjugado: $5 - 2i$

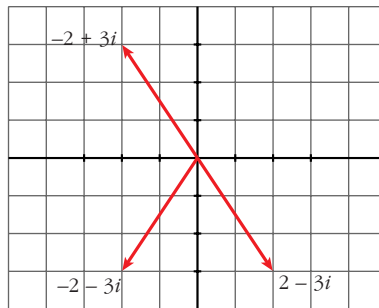


c) Opuesto: $1 + 2i$

Conjugado: $-1 + 2i$



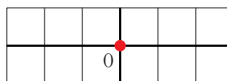
- d) Opuesto: $2 - 3i$
 Conjugado: $-2 - 3i$



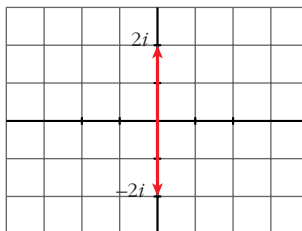
- e) Opuesto: -5
 Conjugado: 5



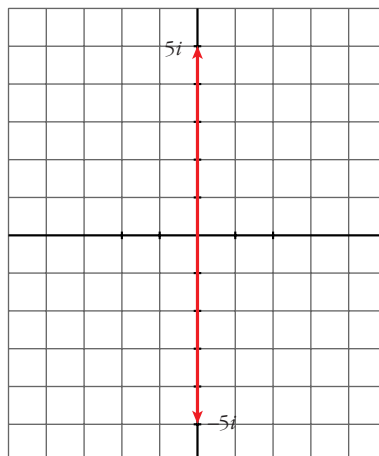
- f) Opuesto: 0
 Conjugado: 0



- g) Opuesto: $-2i$
 Conjugado: $-2i$



- h) Opuesto: $5i$
 Conjugado: $5i$



4. Sabemos que $i^2 = -1$. Calcula i^3 , i^4 , i^5 , i^6 , i^{20} , i^{21} , i^{22} , i^{23} . Da un criterio para simplificar potencias de i de exponente natural.

$$\begin{array}{llll} i^3 = -i & i^4 = 1 & i^5 = i & i^6 = -1 \\ i^{20} = 1 & i^{21} = i & i^{22} = -1 & i^{23} = -i \end{array}$$

CRITERIO: Dividimos el exponente entre 4 y lo escribimos como sigue:

$$i^n = i^{4c+r} = i^{4c} \cdot i^r = (i^4)^c \cdot i^r = 1^c \cdot i^r = 1 \cdot i^r = i^r$$

Por tanto, $i^n = i^r$, donde r es el resto de dividir n entre 4.

Página 151

1. Efectúa las siguientes operaciones y simplifica el resultado:

$$\begin{array}{ll} \text{a)} (6 - 5i) + (2 - i) - 2(-5 + 6i) & \text{b)} (2 - 3i) - (5 + 4i) + \frac{1}{2}(6 - 4i) \\ \text{c)} (3 + 2i)(4 - 2i) & \text{d)} (2 + 3i)(5 - 6i) \\ \text{e)} (-i + 1)(3 - 2i)(1 + 3i) & \text{f)} \frac{2 + 4i}{4 - 2i} \\ \text{g)} \frac{1 - 4i}{3 + i} & \text{h)} \frac{4 + 4i}{-3 + 5i} \\ \text{i)} \frac{5 + i}{-2 - i} & \text{j)} \frac{1 + 5i}{3 + 4i} \\ \text{k)} \frac{4 - 2i}{i} & \text{l)} 6 - 3\left(5 + \frac{2}{5}i\right) \\ \text{m)} \frac{(-3i)^2(1 - 2i)}{2 + 2i} \end{array}$$

$$\text{a)} (6 - 5i) + (2 - i) - 2(-5 + 6i) = 6 - 5i + 2 - i + 10 - 12i = 18 - 18i$$

$$\text{b)} (2 - 3i) - (5 + 4i) + \frac{1}{2}(6 - 4i) = 2 - 3i - 5 - 4i + 3 - 2i = -9i$$

$$\text{c)} (3 + 2i)(4 - 2i) = 12 - 6i + 8i - 4i^2 = 12 + 2i + 4 = 16 + 2i$$

$$\text{d)} (2 + 3i)(5 - 6i) = 10 - 12i + 15i - 18i^2 = 10 + 3i + 18 = 28 + 3i$$

$$\begin{aligned} \text{e)} (-i + 1)(3 - 2i)(1 + 3i) &= (-3i + 2i^2 + 3 - 2i)(1 + 3i) = (3 - 2 - 5i)(1 + 3i) = \\ &= (1 - 5i)(1 + 3i) = 1 + 3i - 5i - 15i^2 = 1 + 15 - 2i = 16 - 2i \end{aligned}$$

$$\text{f)} \frac{2 + 4i}{4 - 2i} = \frac{(2 + 4i)(4 + 2i)}{(4 - 2i)(4 + 2i)} = \frac{8 + 4i + 16i + 8i^2}{16 - 4i^2} = \frac{20i}{16 + 4} = \frac{20i}{20} = i$$

$$\begin{aligned} \text{g)} \frac{1 - 4i}{3 + i} &= \frac{(1 - 4i)(3 - i)}{(3 + i)(3 - i)} = \frac{3 - i - 12i + 4i^2}{9 - i^2} = \frac{3 - 13i - 4}{9 + 1} = \frac{-1 - 13i}{10} = \\ &= -\frac{1}{10} - \frac{13}{10}i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{h)} \quad \frac{4+4i}{-3+5i} &= \frac{(4+4i)(-3-5i)}{(-3+5i)(-3-5i)} = \frac{-12-20i-12i-20i^2}{9-25i^2} = \frac{-12-32i+20}{9+25} = \\ &= \frac{8-32i}{34} = \frac{8}{34} - \frac{32}{34}i = \frac{4}{17} - \frac{16}{17}i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{i)} \quad \frac{5+i}{-2-i} &= \frac{(5+i)(-2+i)}{(-2-i)(-2+i)} = \frac{-10+5i-2i+i^2}{4+1} = \frac{-10+3i-1}{5} = \frac{-11+3i}{5} = \\ &= \frac{-11}{5} + \frac{3}{5}i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{j)} \quad \frac{1+5i}{3+4i} &= \frac{(1+5i)(3-4i)}{(3+4i)(3-4i)} = \frac{3-4i+15i-20i^2}{9-16i^2} = \frac{3+11i+20}{9+16} = \\ &= \frac{23+11i}{25} = \frac{23}{25} + \frac{11}{25}i \end{aligned}$$

$$\text{k)} \quad \frac{4-2i}{i} = \frac{(4-2i)(-i)}{i(-i)} = \frac{-4i+2i^2}{1} = -4i-2 = -2-4i$$

$$\text{l)} \quad 6-3\left(5+\frac{2}{5}i\right) = 6-15+\frac{6}{5}i = -9+\frac{6}{5}i$$

$$\begin{aligned} \text{m)} \quad \frac{(-3i)^2(1-2i)}{(2+2i)} &= \frac{9i^2(1-2i)}{(2+2i)} = \frac{-9(1-2i)}{(2+2i)} = \frac{-9+18i}{(2+2i)} = \\ &= \frac{(-9+18i)(2-2i)}{(2+2i)(2-2i)} = \frac{-18+18i+36i-36i^2}{4-4i^2} = \frac{-18+54i+36}{4+4} = \\ &= \frac{18+54i}{8} = \frac{18}{8} + \frac{54}{8}i = \frac{9}{4} + \frac{27}{4}i \end{aligned}$$

2. Obtén polinomios cuyas raíces sean:

a) $2 + \sqrt{3}i$ y $2 - \sqrt{3}i$

b) $-3i$ y $3i$

c) $1 + 2i$ y $3 - 4i$

(Observa que solo cuando las dos raíces son conjugadas, el polinomio tiene coeficientes reales).

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad [x - (2 + \sqrt{3}i)][x - (2 - \sqrt{3}i)] &= \\ &= [(x-2) - \sqrt{3}i][(x-2) + \sqrt{3}i] = (x-2)^2 - (\sqrt{3}i)^2 = \\ &= x^2 - 4x + 4 - 3i^2 = x^2 - 4x + 4 + 3 = x^2 - 4x + 7 \end{aligned}$$

$$\text{b)} \quad [x - (-3i)][x - 3i] = [x + 3i][x - 3i] = x^2 - 9i^2 = x^2 + 9$$

$$\begin{aligned} \text{c)} \quad [x - (1 + 2i)][x - (3 - 4i)] &= [(x-1) - 2i][(x-3) + 4i] = \\ &= (x-1)(x-3) + 4(x-1)i - 2(x-3)i - 8i^2 = \\ &= x^2 - 4x + 3 + (4x-4-2x+6)i + 8 = x^2 - 4x + 11 + (2x+2)i = \\ &= x^2 - 4x + 11 + 2ix + 2i = x^2 + (-4+2i)x + (11+2i) \end{aligned}$$

3. ¿Cuánto debe valer x , real, para que $(25 - xi)^2$ sea imaginario puro?

$$(25 - xi)^2 = 625 + x^2 i^2 - 50xi = (625 - x^2) - 50xi$$

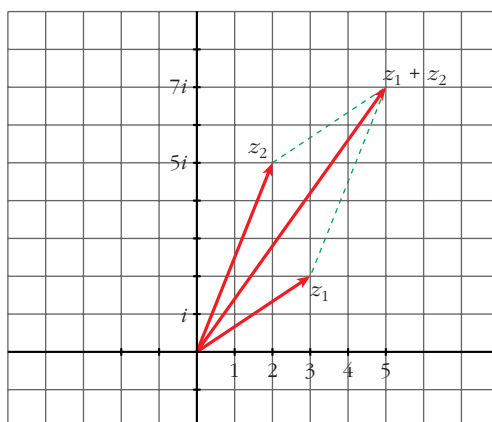
Para que sea imaginario puro:

$$625 - x^2 = 0 \rightarrow x^2 = 625 \rightarrow x = \pm\sqrt{625} = \pm 25$$

Hay dos soluciones: $x_1 = -25$, $x_2 = 25$

4. Representa gráficamente $z_1 = 3 + 2i$, $z_2 = 2 + 5i$, $z_1 + z_2$. Comprueba que $z_1 + z_2$ es una diagonal del paralelogramo de lados z_1 y z_2 .

$$z_1 + z_2 = 5 + 7i$$



Página 153

1. Escribe en forma polar los siguientes números complejos:

a) $1 + \sqrt{3}i$

b) $\sqrt{3} + i$

c) $-1 + i$

d) $5 - 12i$

e) $3i$

f) -5

a) $1 + \sqrt{3}i = 2_{60^\circ}$

b) $\sqrt{3} + i = 2_{30^\circ}$

c) $-1 + i = \sqrt{2}_{135^\circ}$

d) $5 - 12i = 13_{292^\circ 37'}$

e) $3i = 3_{90^\circ}$

f) $-5 = 5$

2. Escribe en forma binómica los siguientes números complejos:

a) $5_{(\pi/6) \text{ rad}}$

b) 2_{135°

c) 2_{495°

d) 3_{240°

e) 5_{180°

f) 4_{90°

$$a) 5_{(\pi/6)} = 5 \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \operatorname{sen} \frac{\pi}{6} \right) = 5 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i \frac{1}{2} \right) = \frac{5\sqrt{3}}{2} + \frac{5}{2}i$$

$$b) 2_{135^\circ} = 2(\cos 135^\circ + i \operatorname{sen} 135^\circ) = 2 \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = -\sqrt{2} + \sqrt{2}i$$

$$c) 2_{495^\circ} = 2_{135^\circ} = -\sqrt{2} + \sqrt{2} i$$

$$d) 3_{240^\circ} = 3(\cos 240^\circ + i \operatorname{sen} 240^\circ) = 3\left(-\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{3}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{2} i$$

$$e) 5_{180^\circ} = -5$$

$$f) 4_{90^\circ} = 4i$$

3. Expresa en forma polar el opuesto y el conjugado del número complejo $z = r_\alpha$.

$$\text{Opuesto: } -z = r_{180^\circ + \alpha}$$

$$\text{Conjugado: } \bar{z} = r_{360^\circ - \alpha}$$

4. Escribe en forma binómica y en forma polar el complejo:

$$z = 8(\cos 30^\circ + i \operatorname{sen} 30^\circ)$$

$$z = 8_{30^\circ} = 8(\cos 30^\circ + i \operatorname{sen} 30^\circ) = 8\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i \frac{1}{2}\right) = \frac{8\sqrt{3}}{2} + \frac{8}{2} i = 4\sqrt{3} + 4i$$

5. Sean los números complejos $z_1 = 4_{60^\circ}$ y $z_2 = 3_{210^\circ}$.

a) Expresa z_1 y z_2 en forma binómica.

b) Halla $z_1 \cdot z_2$ y z_2/z_1 , y pasa los resultados a forma polar.

c) Compara los módulos y los argumentos de $z_1 \cdot z_2$ y z_2/z_1 con los de z_1 y z_2 e intenta encontrar relaciones entre ellos.

$$a) z_1 = 4_{60^\circ} = 4(\cos 60^\circ + i \operatorname{sen} 60^\circ) = 4\left(\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2 + 2\sqrt{3}i$$

$$z_2 = 3_{210^\circ} = 3(\cos 210^\circ + i \operatorname{sen} 210^\circ) = 3\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - i \frac{1}{2}\right) = -\frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{2} i$$

$$b) z_1 \cdot z_2 = (2 + 2\sqrt{3}i)\left(-\frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{2}i\right) =$$

$$= -3\sqrt{3} - 3i - 9i - 3\sqrt{3}i^2 = -3\sqrt{3} - 12i + 3\sqrt{3} = -12i = 12_{270^\circ}$$

$$\begin{aligned} \frac{z_2}{z_1} &= \frac{\left(-\frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{2}i\right)}{(2 + 2\sqrt{3}i)} = \frac{\left(-\frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{2}i\right)(2 - 2\sqrt{3}i)}{(2 + 2\sqrt{3}i)(2 - 2\sqrt{3}i)} = \\ &= \frac{-3\sqrt{3} - 3i + 9i + 3\sqrt{3}i^2}{4 - 12i^2} = \frac{-3\sqrt{3} + 6i - 3\sqrt{3}}{4 + 12} = \frac{-6\sqrt{3} + 6i}{16} = \left(\frac{3}{4}\right)_{150^\circ} \end{aligned}$$

$$c) z_1 \cdot z_2 = 4_{60^\circ} \cdot 3_{210^\circ} = (4 \cdot 3)_{60^\circ + 210^\circ} = 12_{270^\circ}$$

$$\frac{z_2}{z_1} = \frac{3_{210^\circ}}{4_{60^\circ}} = \left(\frac{3}{4}\right)_{210^\circ - 60^\circ} = \left(\frac{3}{4}\right)_1$$

Página 155

1. Efectúa estas operaciones y da el resultado en forma polar y en forma binómica:

a) $1_{150^\circ} \cdot 5_{30^\circ}$

b) $6_{45^\circ} : 3_{15^\circ}$

c) $2_{10^\circ} \cdot 1_{40^\circ} \cdot 3_{70^\circ}$

d) $5_{(2\pi/3)\text{rad}} : 1_{60^\circ}$

e) $(1 - \sqrt{3}i)^5$

f) $(3 + 2i) + (-3 + 2i)$

a) $1_{150^\circ} \cdot 5_{30^\circ} = 5_{180^\circ} = -5$

b) $6_{45^\circ} : 3_{15^\circ} = 2_{30^\circ} = 2(\cos 30^\circ + i \sin 30^\circ) = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i \frac{1}{2}\right) = \sqrt{3} + i$

c) $2_{10^\circ} \cdot 1_{40^\circ} \cdot 3_{70^\circ} = 6_{120^\circ} = 6(\cos 120^\circ + i \sin 120^\circ) = 6\left(-\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -3 + 3\sqrt{3}i$

d) $5_{(2\pi/3)\text{rad}} : 1_{60^\circ} = 5_{120^\circ} : 1_{60^\circ} = 5_{60^\circ} = 5(\cos 60^\circ + i \sin 60^\circ) =$
 $= 5\left(\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{5}{2} + \frac{5\sqrt{3}}{2}i$

e) $(1 - \sqrt{3}i)^5 = (2_{300^\circ})^5 = 32_{1500^\circ} = 32_{60^\circ} = 32(\cos 60^\circ + i \sin 60^\circ) =$
 $= 32\left(\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 16 + 16\sqrt{3}i$

f) $4i = 4_{90^\circ}$

2. Compara los resultados en cada caso:

a) $(2_{30^\circ})^3$, $(2_{150^\circ})^3$, $(2_{270^\circ})^3$

b) $(2_{60^\circ})^4$, $(2_{150^\circ})^4$, $(2_{270^\circ})^4$, $(2_{330^\circ})^4$

a) $(2_{30^\circ})^3 = 2^3_{3 \cdot 30^\circ} = 8_{90^\circ}$

$(2_{150^\circ})^3 = 2^3_{3 \cdot 150^\circ} = 8_{450^\circ} = 8_{90^\circ}$

$(2_{270^\circ})^3 = 8_{3 \cdot 270^\circ} = 8_{810^\circ} = 8_{90^\circ}$

b) $(2_{60^\circ})^4 = 2^4_{4 \cdot 60^\circ} = 16_{240^\circ}$

$(2_{150^\circ})^4 = 16_{600^\circ} = 16_{240^\circ}$

$(2_{270^\circ})^4 = 16_{1080^\circ} = 16_{0^\circ}$

$(2_{330^\circ})^4 = 16_{1320^\circ} = 16_{240^\circ}$

3. Dados los complejos $z = 5_{45^\circ}$, $w = 2_{15^\circ}$, $t = 4i$, obtén en forma polar:

a) $z \cdot t$

b) $\frac{z}{w^2}$

c) $\frac{z^3}{w \cdot t^2}$

d) $\frac{z \cdot w^3}{t}$

$z = 5_{45^\circ}$

$w = 2_{15^\circ}$

$t = 4i = 4_{90^\circ}$

$$a) z \cdot w = 10_{60^\circ}$$

$$b) \frac{z}{w^2} = \frac{z}{4_{30^\circ}} = \frac{5_{45^\circ}}{4_{30^\circ}} = \left(\frac{5}{4}\right)_{15^\circ}$$

$$c) \frac{z^3}{w \cdot t^2} = \frac{125_{135^\circ}}{2_{15^\circ} \cdot 16_{180^\circ}} = \left(\frac{125}{32}\right)_{-60^\circ} = \left(\frac{125}{32}\right)_{300^\circ}$$

$$d) \frac{z \cdot w^3}{t} = \frac{5_{45^\circ} \cdot 8_{45^\circ}}{4_{90^\circ}} = 10_{0^\circ} = 10$$

4. Expresa $\cos 3\alpha$ y $\sin 3\alpha$ en función de $\sin \alpha$ y $\cos \alpha$ utilizando la fórmula de Moivre. Ten en cuenta que $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$.

$$\begin{aligned}(1_\alpha)^3 &= 1(\cos \alpha + i \sin \alpha)^3 = \\&= \cos^3 \alpha + i 3 \cos^2 \alpha \sin \alpha + 3i^2 \cos \alpha \sin^2 \alpha + i^3 \sin^3 \alpha = \\&= \cos^3 \alpha + 3 \cos^2 \alpha \sin \alpha i - 3 \cos \alpha \sin^2 \alpha - i \sin^3 \alpha = \\&= (\cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha \sin^2 \alpha) + (3 \cos^2 \alpha \sin \alpha - \sin^3 \alpha) i\end{aligned}$$

$$\text{Por otra parte: } (1_\alpha)^3 = 1_{3\alpha} = \cos 3\alpha + i \sin 3\alpha$$

$$\text{Por tanto: } \cos 3\alpha = \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha \sin^2 \alpha$$

$$\sin 3\alpha = 3 \cos^2 \alpha \sin \alpha - \sin^3 \alpha$$

Página 157

1. Halla las seis raíces sextas de 1. Representálas y exprésalas en forma binómica.

$$\sqrt[6]{1} = \sqrt[6]{1_{0^\circ}} = 1_{(360^\circ \cdot k)/6} = 1_{60^\circ \cdot k}; \quad k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$$

Las seis raíces son:

$$1_{0^\circ} = 1$$

$$1_{60^\circ} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

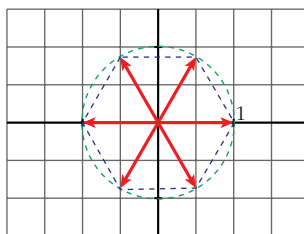
$$1_{120^\circ} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

$$1_{180^\circ} = -1$$

$$1_{240^\circ} = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

$$1_{300^\circ} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

Representación:



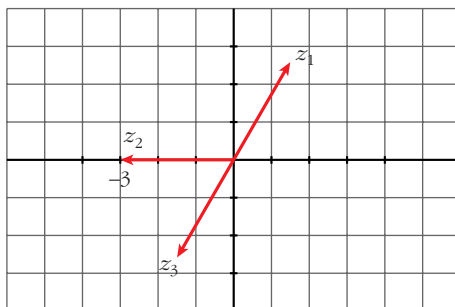
2. Resuelve la ecuación $z^3 + 27 = 0$. Representa sus soluciones.

$$z^3 + 27 = 0 \rightarrow z = \sqrt[3]{-27} = \sqrt[3]{27_{180^\circ}} = 3_{(180^\circ + 360^\circ n)/3} = 3_{60^\circ + 120^\circ n}; \quad n = 0, 1, 2$$

$$z_1 = 3_{60^\circ} = 3(\cos 60^\circ + i \operatorname{sen} 60^\circ) = 3\left(\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{3}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2}i$$

$$z_2 = 3_{180^\circ} = -3$$

$$z_3 = 3_{240^\circ} = 3(\cos 240^\circ + i \operatorname{sen} 240^\circ) = 3\left(-\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{3}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{2}i$$



3. Calcula:

a) $\sqrt[3]{-i}$

b) $\sqrt[4]{-8 + 8\sqrt{3}i}$

c) $\sqrt{-25}$

d) $\sqrt[3]{\frac{-2 + 2i}{1 + \sqrt{3}i}}$

a) $\sqrt[3]{-i} = \sqrt[3]{1_{270^\circ}} = 1_{(270^\circ + 360^\circ k)/3}; \quad k = 0, 1, 2$

Las tres raíces son:

$$1_{90^\circ} = i \quad 1_{210^\circ} = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i \quad 1_{330^\circ} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$$

b) $\sqrt[4]{-8 + 8\sqrt{3}i} = \sqrt[4]{16_{120^\circ}} = 2_{(120^\circ + 360^\circ k)/4} = 2_{30^\circ + 90^\circ k}; \quad k = 0, 1, 2, 3$

Las cuatro raíces son:

$$2_{30^\circ} = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i \frac{1}{2}\right) = \sqrt{3} + i$$

$$2_{120^\circ} = 2\left(-\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -1 + \sqrt{3}i$$

$$2_{210^\circ} = 2\left(-\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -1 - \sqrt{3}i$$

$$2_{300^\circ} = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - i \frac{1}{2}\right) = \sqrt{3} - i$$

$$c) \sqrt{-25} = \sqrt{25_{180^\circ}} = 5_{(180^\circ + 360^\circ k)/2} = 5_{90^\circ + 180^\circ k}; \quad k = 0, 1$$

Las dos raíces son: $5_{90^\circ} = 5i$; $5_{270^\circ} = -5i$

$$d) \sqrt[3]{\frac{-2 + 2i}{1 + \sqrt{3}i}} = \sqrt[3]{\frac{\sqrt{8}_{135^\circ}}{2_{60^\circ}}} = \sqrt[3]{\sqrt{2}_{75^\circ}} = \sqrt[6]{2}_{(75^\circ + 360^\circ k)/3} = \sqrt[6]{2}_{25^\circ + 120^\circ k}; \quad k = 0, 1, 2$$

Las tres raíces son: $\sqrt[6]{2}_{25^\circ}$; $\sqrt[6]{2}_{145^\circ}$; $\sqrt[6]{2}_{265^\circ}$

4. Resuelve las ecuaciones:

a) $x^4 + 1 = 0$

b) $x^6 + 64 = 0$

$$a) x^4 + 1 = 0 \rightarrow x = \sqrt[4]{-1} = \sqrt[4]{1_{180^\circ}} = 1_{(180^\circ + 360^\circ k)/2} = 1_{45^\circ + 90^\circ k}; \quad k = 0, 1, 2, 3$$

Las cuatro raíces son:

$$1_{45^\circ} = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i; \quad 1_{135^\circ} = -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i; \quad 1_{225^\circ} = -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i; \quad 1_{315^\circ} = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i$$

$$b) x^6 + 64 = 0 \rightarrow x = \sqrt[6]{-64} = \sqrt[6]{64_{180^\circ}} = 2_{(180^\circ + 360^\circ k)/6} = 2_{30^\circ + 60^\circ k}; \quad k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$$

Las seis raíces son:

$$2_{30^\circ} = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i \frac{1}{2}\right) = \sqrt{3} + i \quad 2_{90^\circ} = 2i$$

$$2_{150^\circ} = 2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + i \frac{1}{2}\right) = -\sqrt{3} + i \quad 2_{210^\circ} = 2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - i \frac{1}{2}\right) = -\sqrt{3} - i$$

$$2_{270^\circ} = -2i \quad 2_{330^\circ} = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - i \frac{1}{2}\right) = \sqrt{3} - i$$

5. Comprueba que si z y w son dos raíces sextas de 1, entonces también lo son los resultados de las siguientes operaciones:

$$z \cdot w, \quad z/w, \quad z^2, \quad z^3$$

$$z \text{ y } w \text{ raíces sextas de } 1 \rightarrow z^6 = 1, \quad w^6 = 1$$

$$(z \cdot w)^6 = z^6 \cdot w^6 = 1 \cdot 1 = 1 \rightarrow z \cdot w \text{ es raíz sexta de } 1$$

$$\left(\frac{z}{w}\right)^6 = \frac{z^6}{w^6} = \frac{1}{1} = 1 \rightarrow \frac{z}{w} \text{ es raíz sexta de } 1$$

$$z^2 = (z^2)^6 = z^{12} = (z^4)^3 = 1^3 = 1 \rightarrow z^2 \text{ es raíz sexta de } 1$$

$$z^3 = (z^3)^6 = z^{18} = z^{16} \cdot z^2 = (z^4)^4 \cdot z^2 = 1^4 \cdot 1^2 = 1 \cdot 1 = 1 \rightarrow z^3 \text{ es raíz sexta de } 1$$

6. El número $4 + 3i$ es la raíz cuarta de un cierto número complejo, z . Halla las otras tres raíces cuartas de z .

$$4 + 3i = 5_{36^\circ 52'}$$

Las otras tres raíces cuartas de z serán:

$$5_{36^\circ 52' + 90^\circ} = 5_{126^\circ 52'} = -3 + 4i$$

$$5_{36^\circ 52' + 180^\circ} = 5_{216^\circ 52'} = -4 - 3i$$

$$5_{36^\circ 52' + 270^\circ} = 5_{306^\circ 52'} = 3 - 4i$$

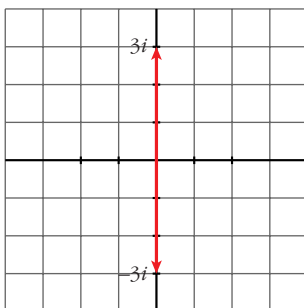
7. Calcula las siguientes raíces y representa gráficamente sus soluciones:

a) $\sqrt{-9}$ b) $\sqrt[3]{-27}$ c) $\sqrt[3]{2-2i}$ d) $\sqrt[3]{\frac{1-i}{1+i}}$ e) $\sqrt[5]{-\frac{32}{i}}$ f) $\sqrt[3]{8i}$

a) $\sqrt{-9} = \sqrt{9_{180^\circ}} = 3_{(180^\circ + 360^\circ k)/2} = 3_{90^\circ + 180^\circ k}; \quad k = 0, 1$

Las dos raíces son:

$$3_{90^\circ} = 3i; \quad 3_{270^\circ} = -3i$$



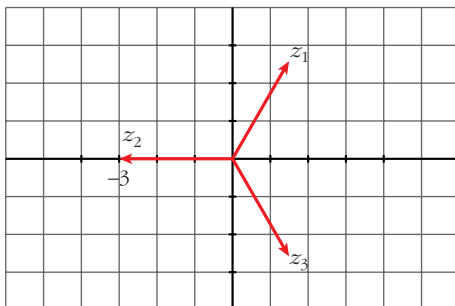
b) $\sqrt[3]{-27} = \sqrt[3]{27_{180^\circ}} = 3_{(180^\circ + 360^\circ k)/3} = 3_{60^\circ + 120^\circ k}; \quad k = 0, 1, 2$

Las tres raíces son:

$$z_1 = 3_{60^\circ} = 3(\cos 60^\circ + i \sin 60^\circ) = 3\left(\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{3}{2} + i \frac{3\sqrt{3}}{2} i$$

$$z_2 = 3_{180^\circ} = -3$$

$$z_3 = 3_{300^\circ} = 3(\cos 300^\circ + i \sin 300^\circ) = 3\left(\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{3}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{2} i$$



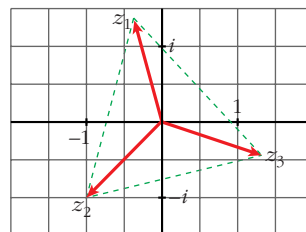
$$c) \sqrt[3]{2-2i} = \sqrt[3]{\sqrt{8_{315^\circ}}} = \sqrt{2}_{(315^\circ + 360^\circ k)/3} = \sqrt{2}_{105^\circ + 120^\circ k}; \quad k = 0, 1, 2$$

Las tres raíces son:

$$z_1 = \sqrt{2}_{105^\circ} = -0,37 + 1,37i$$

$$z_2 = \sqrt{2}_{225^\circ} = \sqrt{2} \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i \right) = -1 - i$$

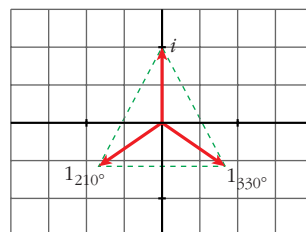
$$z_3 = \sqrt{2}_{345^\circ} = 1,37 - 0,37i$$



$$d) \sqrt[3]{\frac{1-i}{1+i}} = \sqrt[3]{\frac{\sqrt{2}_{315^\circ}}{\sqrt{2}_{45^\circ}}} = \sqrt[3]{1_{270^\circ}} = 1_{(270^\circ + 360^\circ k)/3} = 1_{90^\circ + 120^\circ k}; \quad k = 0, 1, 2$$

Las tres raíces son:

$$1_{90^\circ} = i; \quad 1_{210^\circ} = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i; \quad 1_{330^\circ} = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$$



$$e) \sqrt[5]{-\frac{32}{i}} = \sqrt[5]{-\frac{32(-i)}{i(-i)}} = \sqrt[5]{32i} = \sqrt[5]{32}_{90^\circ} = 2_{(90^\circ + 360^\circ k)/5} = 2_{18^\circ + 72^\circ k}; \quad k = 0, 1, 2, 3, 4$$

Las cinco raíces son:

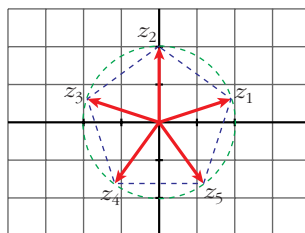
$$z_1 = 2_{18^\circ} = 1,9 + 0,6i$$

$$z_2 = 2_{90^\circ} = 2i$$

$$z_3 = 2_{162^\circ} = -1,9 + 0,6i$$

$$z_4 = 2_{234^\circ} = -1,2 - 1,6i$$

$$z_5 = 2_{306^\circ} = 1,2 - 1,6i$$



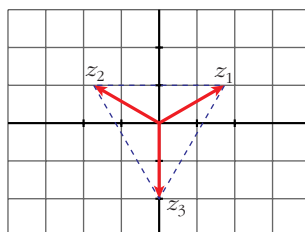
$$f) \sqrt[3]{8i} = \sqrt[3]{8}_{90^\circ} = 2_{(90^\circ + 360^\circ k)/3} = 2_{30^\circ + 120^\circ k}; \quad k = 0, 1, 2$$

Las tres son:

$$z_1 = 2_{30^\circ}$$

$$z_2 = 2_{150^\circ}$$

$$z_3 = 2_{270^\circ}$$



EJERCICIOS Y PROBLEMAS PROPUESTOS

PARA PRACTICAR

Números complejos en forma binómica

1 Calcula:

a) $(3 + 2i)(2 - i) - (1 - i)(2 - 3i)$ b) $3 + 2i(-1 + i) - (5 - 4i)$

c) $-2i - (4 - i)5i$ d) $(4 - 3i)(4 + 3i) - (4 - 3i)^2$

$$\begin{aligned} \text{a) } (3 + 2i)(2 - i) - (1 - i)(2 - 3i) &= 6 - 3i + 4i - 2i^2 - 2 + 3i + 2i - 3i^2 = \\ &= 6 - 3i + 4i + 2 - 2 + 3i + 2i + 3 = 9 + 6i \end{aligned}$$

$$\text{b) } 3 + 2i(-1 + i) - (5 - 4i) = 3 - 2i + 2i^2 - 5 + 4i = 3 - 2i - 2 - 5 + 4i = -4 + 2i$$

$$\text{c) } -2i - (4 - i)5i = -2i - 20i + 5i^2 = -22i - 5 = -5 - 22i$$

$$\begin{aligned} \text{d) } (4 - 3i)(4 + 3i) - (4 - 3i)^2 &= 16 - (3i)^2 - 16 - 9i^2 + 24i = \\ &= 16 + 9 - 16 + 9 + 24i = 18 + 24i \end{aligned}$$

2 Calcula en forma binómica:

a) $\frac{(3 + 3i)(4 - 2i)}{2 - 2i}$

b) $\frac{-2 + 3i}{(4 + 2i)(-1 + i)}$

c) $\frac{2 + 5i}{3 - 2i}(1 - i)$

d) $\frac{1 + i}{2 - i} + \frac{-3 - 2i}{1 + 3i}$

$$\begin{aligned} \text{a) } \frac{(3 + 3i)(4 - 2i)}{2 - 2i} &= \frac{12 - 6i + 12i - 6i^2}{2 - 2i} = \frac{18 + 6i}{2 - 2i} = \frac{(18 + 6i)(2 + 2i)}{(2 - 2i)(2 + 2i)} = \\ &= \frac{36 + 36i + 12i - 12}{4 + 4} = \frac{24 + 48i}{8} = 3 + 6i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } \frac{-2 + 3i}{(4 + 2i)(-1 + i)} &= \frac{-2 + 3i}{-4 + 4i - 2i - 2} = \frac{-2 + 3i}{-6 + 2i} = \frac{(-2 + 3i)(-6 - 2i)}{(-6 + 2i)(-6 - 2i)} = \\ &= \frac{12 + 4i - 18i + 6}{36 + 4} = \frac{18 - 14i}{40} = \frac{9 - 7i}{20} = \frac{9}{20} - \frac{7}{20}i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c) } \frac{2 + 5i}{3 - 2i}(1 - i) &= \frac{2 - 2i + 5i + 5}{3 - 2i} = \frac{7 + 3i}{3 - 2i} = \frac{(7 + 3i)(3 + 2i)}{(3 - 2i)(3 + 2i)} = \\ &= \frac{21 + 14i + 9i - 6}{9 + 4} = \frac{15 + 23i}{13} = \frac{15}{13} + \frac{23}{13}i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{d) } \frac{1 + i}{2 - i} + \frac{-3 - 2i}{1 + 3i} &= \frac{(1 + i)(2 + i)}{(2 - i)(2 + i)} + \frac{(-3 - 2i)(1 - 3i)}{(1 + 3i)(1 - 3i)} = \\ &= \frac{2 + i + 2i - 1}{4 + 1} + \frac{-3 + 9i - 2i - 6}{1 + 9} = \frac{1 + 3i}{5} + \frac{-9 + 7i}{10} = \\ &= \frac{2 + 6i - 9 + 7i}{10} = \frac{-7 + 13i}{10} = \frac{-7}{10} + \frac{13}{10}i \end{aligned}$$

3 Estos números complejos son los resultados de las operaciones que los siguen. Opera y di cuál corresponde a cuál:

$$2i, 20, \frac{1}{5} - \frac{1}{5}i, -2, \frac{1}{5} - \frac{17}{5}i$$

a) $(1-i)(4-2i)(1+3i)$

b) $\frac{1+2i}{2-i}(2+i) + \frac{1-2i}{2+i}(2-i)$

c) $\frac{2-i}{3-i} - \frac{1}{5} \left(\frac{1+8i}{1+3i} \right)$

d) $\frac{(2+i)^2 + (1-i)^2}{1-(3/2)i}$

e) $\frac{2-2i}{i} + \frac{3-5i}{2-i}$

$$\begin{aligned} \text{a) } (1-i)(4-2i)(1+3i) &= (4-2i-4i-2)(1+3i) = \\ &= (2-6i)(1+3i) = 2+6i-6i+18 = 20 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } \frac{1+2i}{2-i}(2+i) + \frac{1-2i}{2+i}(2-i) &= \frac{(1+2i)(2+i)}{(2-i)} + \frac{(1-2i)(2-i)}{(2+i)} = \\ &= \frac{(1+2i)(2+i)^2 + (1-2i)(2-i)^2}{(2-i)(2+i)} = \\ &= \frac{(1+2i)(4-1+4i) + (1-2i)(4-1-4i)}{4+1} = \\ &= \frac{(1+2i)(3+4i) + (1-2i)(3-4i)}{5} = \frac{3+4i+6i-8+3-4i-6i-8}{5} = \\ &= \frac{-10}{5} = -2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c) } \frac{2-i}{3-i} - \frac{1}{5} \left(\frac{1+8i}{1+3i} \right) &= \frac{(2-i)(3+i)}{(3-i)(3+i)} - \frac{1}{5} \left[\frac{(1+8i)(1-3i)}{(1+3i)(1-3i)} \right] = \\ &= \frac{6+2i-3i+1}{9+1} - \frac{1}{5} \left[\frac{1-3i+8i+24}{1+9} \right] = \frac{7-i}{10} - \frac{1}{5} \left(\frac{25+5i}{10} \right) = \frac{7-i}{10} - \frac{5+i}{10} = \\ &= \frac{7-i-5-i}{10} = \frac{2-2i}{10} = \frac{1-i}{5} = \frac{1}{5} - \frac{1}{5}i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{d) } \frac{(2+i)^2 + (1-i)^2}{1-(3/2)i} &= \frac{4-1+4i+1-1-2i}{(2-3i)/2} = \frac{3+2i}{(2-3i)/2} = \frac{6+4i}{2-3i} = \\ &= \frac{(6+4i)(2+3i)}{(2-3i)(2+3i)} = \frac{12+18i+8i-12}{4+9} = \frac{26i}{13} = 2i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{e) } \frac{2-2i}{i} + \frac{3-5i}{2-i} &= \frac{(2-2i)(-i)}{i(-i)} + \frac{(3-5i)(2+i)}{(2-i)(2+i)} = \\ &= \frac{-2i-2}{1} + \frac{6+3i-10i+5}{4+1} = \frac{-2-2i}{1} + \frac{11-7i}{5} = \\ &= \frac{-10-10i+11-7i}{5} = \frac{1-17i}{5} = \frac{1}{5} - \frac{17}{5}i \end{aligned}$$

4 Calcula:

a) i^{37} b) i^{126} c) i^{87}

d) i^{64} e) i^{-216}

a) $i^{37} = i^1 = i$

b) $i^{126} = i^2 = -1$

c) $i^{87} = i^3 = -i$

d) $i^{64} = i^0 = 1$

e) $i^{-216} = \frac{1}{i^{216}} = \frac{1}{i^0} = \frac{1}{1} = 1$

5 Dado el número complejo $z = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$, prueba que:

a) $1 + z + z^2 = 0$

b) $\frac{1}{z} = z^2$

$$\begin{aligned} \text{a) } z^2 &= \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^2 = \frac{1}{4} + \frac{3}{4}i^2 - \frac{\sqrt{3}}{2}i = \frac{1}{4} - \frac{3}{4} - \frac{\sqrt{3}}{2}i = \\ &= -\frac{2}{4} - \frac{\sqrt{3}}{2}i = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \end{aligned}$$

$$1 + z + z^2 = 1 + \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) + \left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = 1 - \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i - \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i = 0$$

$$\text{b) } \frac{1}{z} = \frac{1}{-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i} = \frac{1}{\frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}} = \frac{2}{-1 + \sqrt{3}i} = \frac{2(-1 - \sqrt{3}i)}{(-1 + \sqrt{3}i)(-1 - \sqrt{3}i)} =$$

$$= \frac{2(-1 - \sqrt{3}i)}{1 + 3} = \frac{2(-1 - \sqrt{3}i)}{4} = \frac{-1 - \sqrt{3}i}{2} = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

$$z^2 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \quad (\text{lo habíamos calculado en a) }$$

Por tanto: $\frac{1}{z} = z^2$

6 Calcula m y n para que se verifique la igualdad:

$$(2 + mi) + (n + 5i) = 7 - 2i$$

$$(2 + mi) + (n + 5i) = 7 - 2i$$

$$(2 + n) + (m + 5)i = 7 - 2i \rightarrow \begin{cases} 2 + n = 7 \\ m + 5 = -2 \end{cases} \quad \begin{matrix} n = 5 \\ m = -7 \end{matrix}$$

- 7** Determina k para que el cociente $\frac{k+i}{1+i}$ sea igual a $2-i$.

$$\begin{aligned}\frac{k+i}{1+i} &= \frac{(k+i)(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \frac{k-ki+i+1}{1+1} = \frac{(k+1)+(1-k)i}{2} = \\ &= \left(\frac{k+1}{2}\right) + \left(\frac{1-k}{2}\right)i = 2-i \rightarrow \begin{cases} \frac{k+1}{2} = 2 \rightarrow k=3 \\ \frac{1-k}{2} = -1 \rightarrow k=3 \end{cases}\end{aligned}$$

Por tanto, $k=3$.

- 8** Calcula a y b de modo que se verifique $(a+bi)^2 = 3+4i$.

Desarrolla el cuadrado; iguala la parte real a 3, y la parte imaginaria a 4.

$$(a+bi)^2 = 3+4i$$

$$a^2 + bi^2 + 2abi = 3+4i$$

$$a^2 - b^2 + 2abi = 3+4i \rightarrow \begin{cases} a^2 - b^2 = 3 \\ 2ab = 4 \end{cases}$$

$$b = \frac{4}{2a} = \frac{2}{a}$$

$$a^2 - \left(\frac{2}{a}\right)^2 = 3 \rightarrow a^2 - \frac{4}{a^2} = 3 \rightarrow a^4 - 4 = 3a^2 \rightarrow a^4 - 3a^2 - 4 = 0$$

$$a^2 = \frac{3 \pm \sqrt{9+16}}{2} = \frac{3 \pm 5}{2} \begin{cases} a^2 = 4 \rightarrow a = \pm 2 \\ a^2 = -1 \text{ (no vale)} \end{cases}$$

$$a = -2 \rightarrow b = -1$$

$$a = 2 \rightarrow b = 1$$

- 9** Dados los complejos $2-ai$ y $3-bi$, halla a y b para que su producto sea igual a $8+4i$.

$$(2-ai)(3-bi) = 8+4i$$

$$6-2bi-3ai+abi^2 = 8+4i$$

$$6-2bi-3ai-ab = 8+4i$$

$$(6-ab) + (-2b-3a)i = 8+4i$$

$$\begin{cases} 6-ab = 8 \\ -2b-3a = 4 \end{cases}$$

$$b = \frac{4+3a}{-2}$$

$$6 - a\left(\frac{4 + 3a}{-2}\right) = 8 \rightarrow 6 + \frac{4a + 3a^2}{2} = 8$$

$$\frac{4a + 3a^2}{2} = 2 \rightarrow 4a + 3a^2 = 4 \rightarrow 3a^2 + 4a - 4 = 0$$

$$a = \frac{-4 \pm \sqrt{16 + 48}}{6} = \frac{-4 \pm 8}{6} \begin{cases} a = \frac{4}{6} = \frac{2}{3} \rightarrow b = -3 \\ a = \frac{-12}{6} = -2 \rightarrow b = 1 \end{cases}$$

- 10** Calcula el valor de a y b para que se verifique $a - 3i = \frac{2 + bi}{5 - 3i}$.

$$a - 3i = \frac{2 + bi}{5 - 3i}$$

$$(a - 3i)(5 - 3i) = 2 + bi$$

$$5a - 3ai - 15i - 9 = 2 + bi$$

$$(5a - 9) + (-3a - 15)i = 2 + bi$$

$$\begin{cases} 5a - 9 = 2 \\ -3a - 15 = b \end{cases} \begin{cases} a = 11/5 \\ b = -108/5 \end{cases}$$

- 11** Halla el valor de b para que el producto $(3 - 6i)(4 + bi)$ sea:

a) Un número imaginario puro.

b) Un número real.

$$(3 - 6i)(4 + bi) = 12 + 3bi - 24i + 6b = (12 + 6b) + (3b - 24)i$$

$$a) 12 + 6b = 0 \rightarrow b = -2$$

$$b) 3b - 24 = 0 \rightarrow b = 8$$

- 12** Determina a para que $(a - 2i)^2$ sea un número imaginario puro.

$$(a - 2i)^2 = a^2 + 4i^2 - 4ai = (a^2 - 4) - 4ai$$

Para que sea imaginario puro, ha de ser:

$$a^2 - 4 = 0 \rightarrow a = \pm 2 \rightarrow a_1 = -2, a_2 = 2$$

- 13** Calcula x para que el resultado del producto $(x + 2 + ix)(x - i)$ sea un número real.

🔵 *Efectúa el producto. Iguala la parte imaginaria a 0 y resuelve la ecuación.*

$$(x + 2 + ix)(x - i) = x^2 - xi + 2x - 2i + x^2i - xi^2 =$$

$$= x^2 - xi + 2x - 2i + ix^2 + x = (x^2 + 3x) + (x^2 - x - 2)i$$

Para que sea real, ha de ser:

$$x^2 - x - 2 = 0 \rightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 8}}{2} = \frac{1 \pm 3}{2} = \begin{cases} x_1 = -1 \\ x_2 = 2 \end{cases}$$

Números complejos en forma polar

14 Representa los siguientes números complejos, sus opuestos y sus conjugados, y exprésalos en forma polar:

a) $1 - i$

b) $-1 + i$

c) $\sqrt{3} + i$

d) $-\sqrt{3} - i$

e) -4

f) $2i$

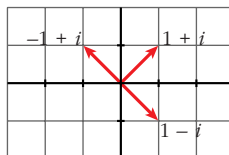
g) $-\frac{3}{4}i$

h) $2 + 2\sqrt{3}i$

a) $1 - i = \sqrt{2}_{315^\circ}$

Opuesto: $-1 + i = \sqrt{2}_{135^\circ}$

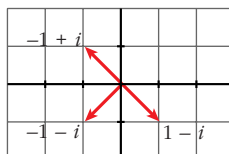
Conjugado: $1 + i = \sqrt{2}_{45^\circ}$



b) $-1 + i = \sqrt{2}_{135^\circ}$

Opuesto: $1 - i = \sqrt{2}_{315^\circ}$

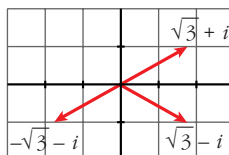
Conjugado: $-1 - i = \sqrt{2}_{225^\circ}$



c) $\sqrt{3} + i = 2_{30^\circ}$

Opuesto: $-\sqrt{3} - i = 2_{210^\circ}$

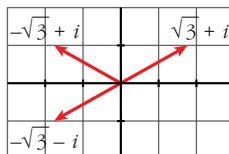
Conjugado: $\sqrt{3} - i = 2_{330^\circ}$



d) $-\sqrt{3} - i = 2_{210^\circ}$

Opuesto: $\sqrt{3} + i = 2_{30^\circ}$

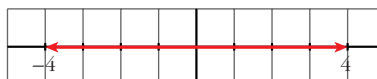
Conjugado: $-\sqrt{3} + i = 2_{150^\circ}$



e) $-4 = 4_{180^\circ}$

Opuesto: $4 = 4_0^\circ$

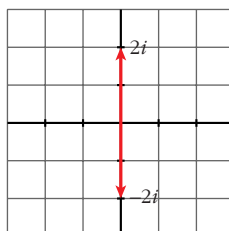
Conjugado: $-4 = 4$



f) $2i = 2_{90^\circ}$

Opuesto: $-2i = 2_{270^\circ}$

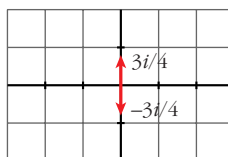
Conjugado: $-2i = 2_2$



$$g) -\frac{3}{4}i = \left(\frac{3}{4}\right)_{270^\circ}$$

$$\text{Opuesto: } \frac{3}{4}i = \left(\frac{3}{4}\right)_{90^\circ}$$

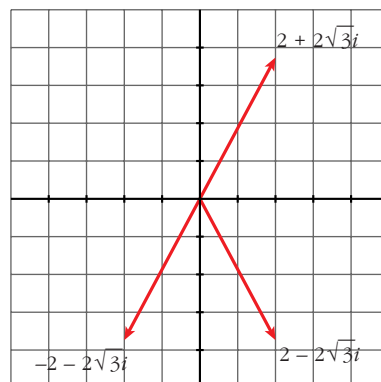
$$\text{Conjugado: } \frac{3}{4}i = \left(\frac{3}{4}\right)_{90^\circ}$$



$$h) 2 + 2\sqrt{3}i = \sqrt{14}_{60^\circ}$$

$$\text{Opuesto: } -2 - 2\sqrt{3}i = \sqrt{14}_{240^\circ}$$

$$\text{Conjugado: } 2 - 2\sqrt{3}i = \sqrt{14}_{300^\circ}$$



15 Escribe en forma binómica los siguientes números complejos:

a) 2_{45°

b) $3_{(\pi/6)}$

c) $\sqrt{2}_{180^\circ}$

d) 17_{0°

e) $1_{(\pi/2)}$

f) 5_{270°

g) 1_{150°

h) 4_{100°

$$a) 2_{45^\circ} = 2(\cos 45^\circ + i \sen 45^\circ) = 2\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2} + \sqrt{2}i$$

$$b) 3_{(\pi/6)} = 3\left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sen \frac{\pi}{6}\right) = 3\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i \frac{1}{2}\right) = \frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i$$

$$c) \sqrt{2}_{180^\circ} = \sqrt{2}(\cos 180^\circ + i \sen 180^\circ) = \sqrt{2}(-1 + i \cdot 0) = -\sqrt{2}$$

$$d) 17_{0^\circ} = 17$$

$$e) 1_{(\pi/2)} = \cos \frac{\pi}{2} + i \sen \frac{\pi}{2} = i$$

$$f) 5_{270^\circ} = -5i$$

$$g) 1_{150^\circ} = \cos 150^\circ + i \sen 150^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2} + i \frac{1}{2} = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$$

$$h) 4_{100^\circ} = 4(\cos 100^\circ + i \sen 100^\circ) = 4(-0,17 + i \cdot 0,98) = -0,69 + 3,94i$$

16 Calcula en forma polar:

a) $(-1 - i)^5$

b) $\sqrt[4]{1 - \sqrt{3}i}$

c) $\sqrt[6]{64}$

d) $\sqrt[3]{8i}$

e) $(-2\sqrt{3} + 2i)^6$

f) $(3 - 4i)^3$

a) $(-1 - i)^5 = (\sqrt{2}_{225^\circ})^5 = 4\sqrt{2}_{1125^\circ} = 4\sqrt{2}_{45^\circ} = 4\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right) = 4 + 4i$

b) $\sqrt[4]{1 - \sqrt{3}i} = \sqrt[4]{2_{300^\circ}} = \sqrt[4]{2_{(300^\circ + 360^\circ n)/4}} = \sqrt[4]{2_{75^\circ + 90^\circ n}}; n = 0, 1, 2, 3$

Las cuatro raíces son:

$$\sqrt[4]{2}_{75^\circ} \quad \sqrt[4]{2}_{165^\circ} \quad \sqrt[4]{2}_{255^\circ} \quad \sqrt[4]{2}_{345^\circ}$$

c) $\sqrt[4]{64} = \sqrt[4]{64_{0^\circ}} = \sqrt[4]{2^6_{(360^\circ k)/4}} = 2\sqrt{2}_{90^\circ k}; k = 0, 1, 2, 3$

Las cuatro raíces son:

$$2\sqrt{2}_{0^\circ} = 2\sqrt{2} \quad 2\sqrt{2}_{90^\circ} = 2\sqrt{2}i \quad 2\sqrt{2}_{180^\circ} = -2\sqrt{2} \quad 2\sqrt{2}_{270^\circ} = -2\sqrt{2}i$$

d) $\sqrt[3]{8i} = \sqrt[3]{8_{90^\circ}} = 2_{(90^\circ + 360^\circ k)/3} = 2_{30^\circ + 120^\circ k}; k = 0, 1, 2$

Las tres raíces son:

$$2_{30^\circ} = \sqrt{3} + i \quad 2_{150^\circ} = -\sqrt{3} + i \quad 2_{270^\circ} = -2i$$

e) $(-2\sqrt{3} + 2i)^6 = (4_{150^\circ})^6 = 4096_{900^\circ} = 4096_{180^\circ} = -4096$

f) $(3 - 4i)^3 = (5_{306^\circ})^3 = 125_{920^\circ} = 125_{200^\circ}$

Página 163

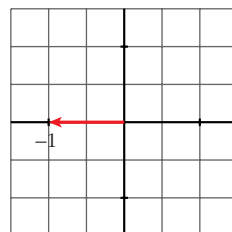
17 Calcula y representa gráficamente el resultado:

a) $\frac{i^7 - i^{-7}}{2i}$

b) $\left(\frac{1-i}{\sqrt{3}+i}\right)^3$

c) $\sqrt[3]{\frac{1+i}{2-i}}$

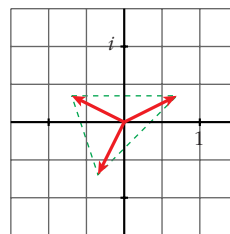
a) $\frac{i^7 - i^{-7}}{2i} = \frac{i^7 - 1/i^7}{2i} = \frac{i^{14} - i}{2i^8} = \frac{i^2 - 1}{2} = \frac{-1 - 1}{2} = \frac{-2}{2} = -1$



$$\sqrt[6]{\frac{2}{5}}_{23^{\circ} 51'} = 0,785 + 0,347i$$

$$\sqrt[6]{\frac{2}{5}}_{143^{\circ} 51'} = -0,693 + 0,56i$$

$$\sqrt[6]{\frac{2}{5}}_{263^{\circ} 51'} = -0,092 - 0,853i$$


$$\text{a) } \sqrt[3]{4 - 4\sqrt{3}i}$$

b) $\sqrt[4]{-16}$

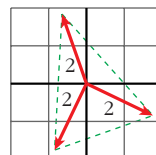
c) $\sqrt[3]{8i}$

$$\text{a) } \sqrt[3]{4 - 4\sqrt{3}i} = \sqrt[3]{8_{300^\circ}} = 2_{(300^\circ + 360^\circ k)/3} = 2_{100^\circ + 120^\circ k}; \quad k = 0, 1, 2$$

$$2_{100^\circ} = -0,35 + 1,97i$$

$$2_{220^\circ} = -1,53 - 1,26i$$

$$2_{340^\circ} = 1,88 - 0,68i$$



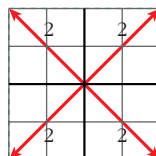
$$\text{b) } \sqrt[4]{-16} = \sqrt[4]{16_{180^\circ}} = 2_{(180^\circ + 360^\circ k)/4} = 2_{45^\circ + 90^\circ k}; \quad k = 0, 1, 2, 3$$

$$2_{45^\circ} = \sqrt{2} + \sqrt{2}i$$

$$2_{135^\circ} = -\sqrt{2} + \sqrt{2}i$$

$$2_{225^\circ} = -\sqrt{2} - \sqrt{2}i$$

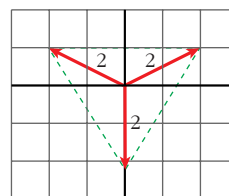
$$2_{315^\circ} = \sqrt{2} - \sqrt{2}i$$



$$c) \sqrt[3]{8i} = \sqrt[3]{8_{90^\circ}} = 2_{(90^\circ + 360^\circ k)/3} = 2_{30^\circ + 120^\circ k}; \quad k = 0, 1, 2$$

Las tres raíces son:

$$2_{30^\circ} = \sqrt{3} + i \quad 2_{150^\circ} = -\sqrt{3} + i \quad 2_{270^\circ} = -2i$$



19 Calcula pasando a forma polar:

a) $(1 + i\sqrt{3})^5$

b) $(-1 - i\sqrt{3})^6 (\sqrt{3} - i)$

c) $\sqrt[4]{-2 + 2\sqrt{3}i}$

d) $\frac{8}{(1-i)^5}$

e) $\sqrt[6]{-64}$

f) $\sqrt{-1-i}$

g) $\sqrt[3]{-i}$

h) $\frac{2-2i}{-3+3i}$

$$\begin{aligned} a) (1 + i\sqrt{3})^5 &= (2_{60^\circ})^5 = 32_{300^\circ} = 32(\cos 300^\circ + i \sen 300^\circ) = \\ &= 32\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = 16 - 16\sqrt{3}i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b) (-1 - i\sqrt{3})^6 (\sqrt{3} - i) &= (2_{240^\circ})^6 (2_{330^\circ}) = (64_{1440^\circ}) (2_{330^\circ}) = \\ &= (64_{0^\circ}) (2_{330^\circ}) = 128_{330^\circ} = 128(\cos 330^\circ + i \sen 330^\circ) = \\ &= 128\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i \frac{-1}{2}\right) = 64\sqrt{3} - 64i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c) \sqrt[4]{-2 + 2\sqrt{3}i} &= \sqrt[4]{4_{120^\circ}} = \sqrt[4]{4}_{(120^\circ + 360^\circ k)/4} = \sqrt[4]{2^2}_{30^\circ + 90^\circ k} = \\ &= \sqrt{2}_{30^\circ + 90^\circ k}; \quad k = 0, 1, 2, 3 \end{aligned}$$

Las cuatro raíces son:

$$\sqrt{2}_{30^\circ} = \frac{\sqrt{6}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i \quad \sqrt{2}_{120^\circ} = -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{6}}{2}i$$

$$\sqrt{2}_{210^\circ} = -\frac{\sqrt{6}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i \quad \sqrt{2}_{300^\circ} = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{6}}{2}i$$

$$\begin{aligned} d) \frac{8}{(1-i)^5} &= \frac{8_{0^\circ}}{(\sqrt{2}_{315^\circ})^5} = \frac{8_{0^\circ}}{4\sqrt{2}_{1575^\circ}} = \frac{8_{0^\circ}}{4\sqrt{2}_{135^\circ}} = \left(\frac{8}{4\sqrt{2}}\right)_{-135^\circ} = \left(\frac{2}{\sqrt{2}}\right)_{225^\circ} = \\ &= \sqrt{2}_{225^\circ} = \sqrt{2}(\cos 225^\circ + i \sen 225^\circ) = \sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i\right) = -1 - i \end{aligned}$$

$$e) \sqrt[6]{-64} = \sqrt[6]{64_{180^\circ}} = \sqrt[6]{2^6}_{(180^\circ + 360^\circ k)/6} = 2_{30^\circ + 60^\circ k}; \quad k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$$

Las seis raíces son:

$$\begin{aligned} 2_{30^\circ} &= \sqrt{3} + i & 2_{90^\circ} &= 2i & 2_{150^\circ} &= -\sqrt{3} + i \\ 2_{210^\circ} &= -\sqrt{3} - i & 2_{270^\circ} &= -2 & 2_{330^\circ} &= \sqrt{3} - i \end{aligned}$$

$$f) \sqrt{-1-i} = \sqrt{\sqrt{2}_{225^\circ}} = \sqrt[4]{2}_{(225^\circ + 360^\circ k)/2} = \sqrt[4]{2}_{112^\circ 30' + 180^\circ k}; \quad k = 0, 1$$

Las dos raíces son:

$$\sqrt[4]{2}_{112^\circ 30'} = -0,46 + 1,1i \quad \sqrt[4]{2}_{292^\circ 30'} = 0,46 - 1,1i$$

$$g) \sqrt[3]{-i} = \sqrt[3]{1_{270^\circ}} = 1_{(270^\circ + 360^\circ k)/3} = 1_{90^\circ + 120^\circ k}; \quad k = 0, 1, 2$$

Las tres raíces son:

$$1_{90^\circ} = i \quad 1_{210^\circ} = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i \quad 1_{330^\circ} = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$$

$$\begin{aligned} h) \sqrt{\frac{2-2i}{-3+3i}} &= \sqrt{\frac{2\sqrt{2}_{315^\circ}}{3\sqrt{2}_{135^\circ}}} = \left(\frac{2}{3}\right)_{180^\circ} = \left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right)_{(180^\circ + 360^\circ k)/2} = \\ &= \left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right)_{90^\circ + 180^\circ k}; \quad k = 0, 1 \end{aligned}$$

Las dos raíces son:

$$\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right)_{90^\circ} = \sqrt{\frac{2}{3}}i \quad \left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right)_{270^\circ} = -\sqrt{\frac{2}{3}}i$$

20 Calcula m para que el número complejo $3 - mi$ tenga el mismo módulo que $2\sqrt{5} + \sqrt{5}i$.

$$\left. \begin{aligned} |3 - mi| &= \sqrt{9 + m^2} \\ |2\sqrt{5} + \sqrt{5}i| &= 5 \end{aligned} \right\} \begin{aligned} \sqrt{9 + m^2} &= 5 \rightarrow 9 + m^2 = 25 \rightarrow m^2 = 16 \\ m &= \pm 4 \end{aligned}$$

Hay dos posibilidades: $m = -4$ y $m = 4$

21 Expresa en forma polar z , su opuesto $-z$, y su conjugado $\bar{z}$ en cada uno de estos casos:

$$a) z = 1 - \sqrt{3}i \quad b) z = -2 - 2i \quad c) z = -2\sqrt{3} + 2i$$

$$a) z = 1 - \sqrt{3}i = 2_{300^\circ}; \quad -z = -1 + \sqrt{3}i = 2_{120^\circ}; \quad \bar{z} = 1 + \sqrt{3}i = 2_{60^\circ}$$

$$b) z = -2 - 2i = 2\sqrt{2}_{225^\circ}; \quad -z = 2 + 2i = 2\sqrt{2}_{45^\circ}; \quad \bar{z} = -2 + 2i = 2\sqrt{2}_{135^\circ}$$

$$c) z = -2\sqrt{3} + 2i = 4_{150^\circ}; \quad -z = 2\sqrt{3} - 2i = 4_{330^\circ}; \quad \bar{z} = -2\sqrt{3} - 2i = 4_{210^\circ}$$

22 Representa los polígonos regulares que tienen por vértices los afijos de las siguientes raíces:

a) $\sqrt[5]{i}$

b) $\sqrt[6]{-1}$

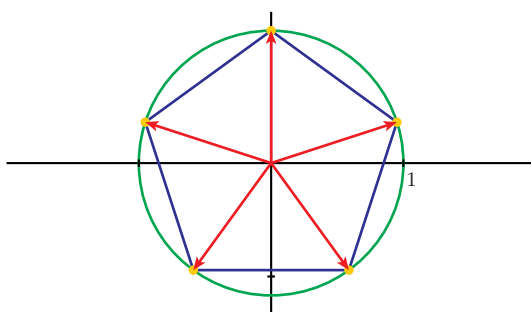
c) $\sqrt[4]{2\sqrt{3} + 2i}$

a) $\sqrt[5]{i} = \sqrt[5]{1_{90^\circ}} = 1_{(90^\circ + 360^\circ k)/5} = 1_{18^\circ + 72^\circ k}; \quad k = 0, 1, 2, 3, 4$

Las cinco raíces son:

$$1_{18^\circ} \quad 1_{90^\circ} \quad 1_{162^\circ} \quad 1_{234^\circ} \quad 1_{306^\circ}$$

Representación del polígono (pentágono):

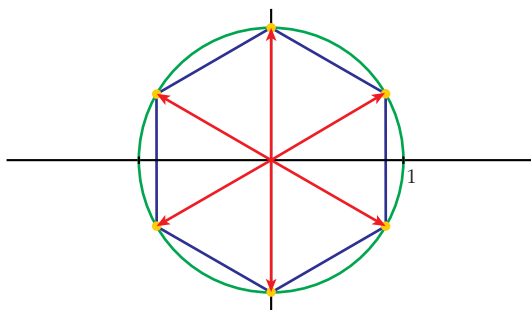


b) $\sqrt[6]{-1} = \sqrt[6]{1_{180^\circ}} = 1_{(180^\circ + 360^\circ k)/6} = 1_{30^\circ + 60^\circ k}; \quad k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$

Las seis raíces son:

$$1_{30^\circ} \quad 1_{90^\circ} \quad 1_{150^\circ} \quad 1_{210^\circ} \quad 1_{270^\circ} \quad 1_{330^\circ}$$

Representación del polígono (hexágono):

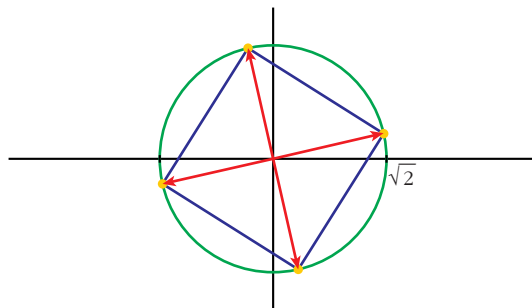


c) $\sqrt[4]{2\sqrt{3} + 2i} = \sqrt[4]{4_{30^\circ}} = \sqrt[4]{2^2_{(30^\circ + 360^\circ k)/4}} = \sqrt{2}_{7^\circ 30' + 90^\circ k}; \quad k = 0, 1, 2, 3$

Las cuatro raíces son:

$$\sqrt{2}_{7^\circ 30'} \quad \sqrt{2}_{97^\circ 30'} \quad \sqrt{2}_{187^\circ 30'} \quad \sqrt{2}_{277^\circ 30'}$$

Representación del polígono (cuadrado):



PARA RESOLVER

- 23** Halla dos números complejos tales que su cociente sea 3, la suma de sus argumentos $\frac{\pi}{3}$, y la suma de sus módulos 8.

• Llámalos r_α y s_β y escribe las ecuaciones que los relacionan:

$$\frac{r_\alpha}{s_\beta} = 3_{0^\circ} \text{ (} 0^\circ \text{ es el argumento del cociente, } \alpha - \beta = 0^\circ \text{); } r + s = 8 \text{ y } \alpha + \beta = \frac{\pi}{3}.$$

$$\frac{r}{s} = 3$$

$$r + s = 8$$

$$\alpha + \beta = \frac{\pi}{3}$$

$$\alpha - \beta = 0^\circ$$

Hallamos sus módulos:

$$\left. \begin{array}{l} \frac{r}{s} = 3 \\ r + s = 8 \end{array} \right\} \begin{array}{l} r = 3s \\ 3s + s = 8; \quad 4s = 8; \quad s = 2; \quad r = 6 \end{array}$$

Hallamos sus argumentos:

$$\left. \begin{array}{l} \alpha + \beta = \frac{\pi}{3} \\ \alpha - \beta = 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \alpha = \beta; \quad 2\beta = \frac{\pi}{3}; \quad \beta = \frac{\pi}{6}; \quad \alpha = \frac{\pi}{6} \end{array}$$

Los números serán: $6_{\pi/6}$ y 2_π

- 24** El producto de dos números complejos es $2i$ y el cubo de uno de ellos dividido por el otro es $1/2$. Hállalos.

$$\left. \begin{array}{l} z \cdot w = 2i \\ \frac{z^3}{w} = \frac{1}{2} \end{array} \right\} \begin{array}{l} 2z^3 = w; \quad z \cdot 2z^3 = 2i; \quad 2z^4 = 2i; \quad z^4 = i \end{array}$$

$$z = \sqrt[4]{i} = \sqrt[4]{1_{90^\circ}} = 1_{(90^\circ + 360^\circ k)/4} = 1_{22^\circ 30' + 90^\circ k}; \quad k = 0, 1, 2, 3$$

Hay cuatro soluciones:

$$z_1 = 1_{22^\circ 30'} \rightarrow w_1 = 2z_1^3 = 2 \cdot 1_{67^\circ 30'} = 2_{67^\circ 30'}$$

$$z_2 = 1_{112^\circ 30'} \rightarrow w_2 = 2_{337^\circ 30'}$$

$$z_3 = 1_{202^\circ 30'} \rightarrow w_3 = 2_{607^\circ 30'} = 2_{247^\circ 30'}$$

$$z_4 = 1_{292^\circ 30'} \rightarrow w_4 = 2_{877^\circ 30'} = 2_{157^\circ 30'}$$

25 El producto de dos números complejos es -8 y uno de ellos es el cuadrado del otro. Calcúalos.

$$\left. \begin{aligned} z \cdot w &= -8 \\ z &= w^2 \end{aligned} \right\} w^3 = -8$$

$$w = \sqrt[3]{-8} = \sqrt[3]{8_{180^\circ}} = 2_{(180^\circ + 360^\circ k)/3} = 2_{60^\circ + 120^\circ k}; \quad k = 0, 1, 2$$

Hay tres soluciones:

$$w_1 = 2_{60^\circ} \rightarrow z_1 = 4_{120^\circ}$$

$$w_2 = 2_{180^\circ} \rightarrow z_2 = 4_{0^\circ} = 4$$

$$w_3 = 2_{300^\circ} \rightarrow z_3 = 4_{600^\circ} = 4_{240^\circ}$$

26 De dos números complejos sabemos que:

- Tienen el mismo módulo.
- Sus argumentos suman $17\pi/6$.
- El primero es conjugado del cuadrado del segundo.

¿Cuáles son esos números?

Llamamos a los números: $z = r_\alpha$ y $w = s_\beta$

Tenemos que:

$$\left. \begin{aligned} r &= s \\ \alpha + \beta &= \frac{17\pi}{6} \\ r_\alpha &= \overline{(s_\beta)^2} \end{aligned} \right\} \left. \begin{aligned} r_\alpha &= \overline{s^2_{2\beta}} = s^2_{2\pi - 2\beta} = r^2_{2\pi - 2\beta} \rightarrow \begin{cases} \alpha = 2\pi - 2\beta \\ r = r^2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} r = 0 & (\text{no vale}) \\ r = 1 \end{cases} \end{aligned} \right\}$$

$$2\pi - 2\beta + \beta = \frac{17\pi}{6}; \quad \beta = -\frac{5\pi}{6} = \frac{7\pi}{6} \text{ rad} \rightarrow \alpha = \frac{11\pi}{6} \text{ rad}$$

Por tanto, los números son:

$$1_{11\pi/6} \quad \text{y} \quad 1_{-5\pi/6} = 1_{7\pi/6}$$

27 Calcula $\cos 75^\circ$ y $\sen 75^\circ$ mediante el producto $1_{30^\circ} \cdot 1_{45^\circ}$

$$1_{30^\circ} \cdot 1_{45^\circ} = 1_{75^\circ} = \cos 75^\circ + i \sen 75^\circ$$

$$\begin{aligned} 1_{30^\circ} \cdot 1_{45^\circ} &= (\cos 30^\circ + i \sen 30^\circ) (\cos 45^\circ + i \sen 45^\circ) = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \right) \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i \right) = \\ &= \frac{\sqrt{6}}{4} + \frac{\sqrt{6}}{4}i + \frac{\sqrt{2}}{4}i - \frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}i \end{aligned}$$

Por tanto:

$$\cos 75^\circ = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} \quad \sen 75^\circ = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$$

28 Halla las razones trigonométricas de 15° conociendo las de 45° y las de 30° mediante el cociente $1_{45^\circ} : 1_{30^\circ}$

$$1_{45^\circ} : 1_{30^\circ} = 1_{15^\circ} = \cos 15^\circ + i \sen 15^\circ$$

$$\begin{aligned} \frac{1_{45^\circ}}{1_{30^\circ}} &= \frac{\cos 45^\circ + i \sen 45^\circ}{\cos 30^\circ + i \sen 30^\circ} = \frac{\sqrt{2}/2 + i(\sqrt{2}/2)}{\sqrt{3}/2 + i(1/2)} = \frac{\sqrt{2} + i\sqrt{2}}{\sqrt{3} + i} = \\ &= \frac{(\sqrt{2} + i\sqrt{2})(\sqrt{3} - i)}{(\sqrt{3} + i)(\sqrt{3} - i)} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}i + \sqrt{6}i + \sqrt{2}}{3 + 1} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}i \end{aligned}$$

Por tanto:

$$\cos 15^\circ = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} \quad \sen 15^\circ = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$$

29 ¿Para qué valores de x es imaginario puro el cociente $\frac{x+2+xi}{x+i}$?

$$\begin{aligned} \frac{x+2+xi}{x+i} &= \frac{(x+2+xi)(x-i)}{(x+i)(x-i)} = \frac{x^2 - ix + 2x - 2i + x^2i + x}{x^2 + 1} = \\ &= \frac{(x^2 + 3x) + (x^2 - x - 2)i}{x^2 + 1} = \frac{x^2 + 3x}{x^2 + 1} + \frac{x^2 - x - 2}{x^2 + 1}i \end{aligned}$$

Para que sea imaginario puro, ha de ser:

$$\frac{x^2 + 3x}{x^2 + 1} = 0 \rightarrow x^2 + 3x = 0 \rightarrow x(x+3) = 0 \begin{cases} x = 0 \\ x = -3 \end{cases}$$

30 Halla, en función de x , el módulo de $z = \frac{1+xi}{1-xi}$.

Demuestra que $|z| = 1$ para cualquier valor de x .

$$|z| = \left| \frac{1+xi}{1-xi} \right| = \frac{\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x^2}} = 1$$

O bien:

$$z = \frac{1 + xi}{1 - xi} = \frac{(1 + xi) + (1 + xi)}{(1 - xi)(1 + xi)} = \frac{1 - x^2 + 2xi}{1 + x^2} = \frac{1 - x^2}{1 + x^2} + \frac{2x}{1 + x^2}i$$

$$|z| = \sqrt{\left(\frac{1 - x^2}{1 + x^2}\right)^2 + \left(\frac{2x}{1 + x^2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1 + x^4 - 2x^2 + 4x^2}{(1 + x^2)^2}} = \sqrt{\frac{x^4 + 2x^2 + 1}{(1 + x^2)^2}} =$$

$$= \sqrt{\frac{(1 + x^2)^2}{(1 + x^2)^2}} = \sqrt{1} = 1$$

- 31** Calcula x para que el número complejo que obtenemos al dividir $\frac{x + 2i}{4 - 3i}$ esté representado en la bisectriz del primer cuadrante.

🔵 El número complejo $a + bi$ se representa como el punto (a, b) , su afijo. Para que esté en la bisectriz del primer cuadrante, debe ser $a = b$.

$$\frac{x + 2i}{4 - 3i} = \frac{(x + 2i)(4 + 3i)}{(4 - 3i)(4 + 3i)} = \frac{4x + 3xi + 8i - 6}{16 + 9} = \frac{4x - 6}{25} + \frac{3x + 8}{25}i$$

Ha de ser:

$$\frac{4x - 6}{25} = \frac{3x + 8}{25} \rightarrow 4x - 6 = 3x + 8 \Rightarrow x = 14$$

- 32** La suma de dos números complejos conjugados es 8 y la suma de sus módulos es 10. ¿Cuáles son esos números?

$$\left. \begin{array}{l} z + \bar{z} = 8 \\ |z| + |\bar{z}| = 10 \end{array} \right\} \text{ Como } |z| = |\bar{z}| \Rightarrow |z| = 5$$

Si llamamos:

$$z = a + bi \rightarrow \bar{z} = a - bi$$

$$z + \bar{z} = a + bi + a - bi = 2a = 8 \rightarrow a = 4$$

$$|z| = |\bar{z}| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{16 + b^2} = 5 \rightarrow 16 + b^2 = 25 \rightarrow$$

$$\rightarrow b^2 = 9 \rightarrow b = \pm\sqrt{9} = \pm 3$$

Hay dos soluciones:

$$z_1 = 4 + 3i \rightarrow \bar{z}_1 = 4 - 3i$$

$$z_2 = 4 - 3i \rightarrow \bar{z}_2 = 4 + 3i$$

- 33** La suma de dos números complejos es $3 + i$. La parte real del primero es 2, y el cociente de este entre el segundo es un número real. Hállalos.

Llamamos $z = a + bi$ y $w = c + di$

Tenemos que:

$$\begin{cases} z + w = 3 + i \\ a = 2 \rightarrow c = 1 \end{cases} \begin{cases} a + c = 3 \\ b + d = 1 \rightarrow b = 1 - d \end{cases}$$

$$\frac{z}{w} = \frac{2+bi}{1+di} = \frac{(2+bi)(1-di)}{(1+di)(1-di)} = \frac{2-2di+bi+bd}{1+d^2} = \frac{2+bd}{1+d^2} + \frac{-2d+b}{1+d^2}i$$

Para que $\frac{z}{w}$ sea un número real, ha de ser:

$$\frac{-2d+b}{1+d^2} = 0 \rightarrow -2d+b=0 \rightarrow b=2d$$

$$2d = 1-d \rightarrow 3d=1 \rightarrow d = \frac{1}{3}, \quad b = \frac{2}{3}$$

Por tanto, los números son:

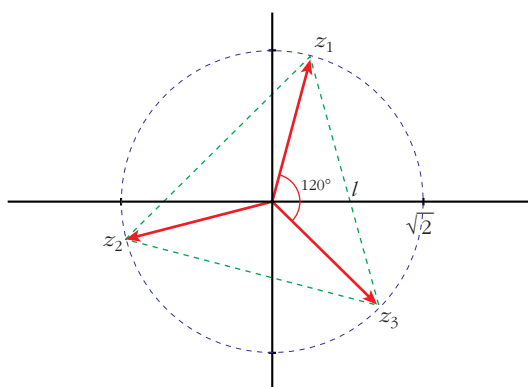
$$z = 2 + \frac{2}{3}i \quad \text{y} \quad w = 1 + \frac{1}{3}i$$

- 34 Representa gráficamente los resultados que obtengas al hallar $\sqrt[3]{-2-2i}$ y calcula el lado del triángulo formado al unir esos tres puntos.**

$$\sqrt[3]{-2-2i} = \sqrt[3]{\sqrt{8}_{225^\circ}} = \sqrt{2}_{(225^\circ + 360^\circ k)/3} = \sqrt{2}_{75^\circ + 120^\circ k}$$

Las tres raíces son:

$$z_1 = \sqrt{2}_{75^\circ} \quad z_2 = \sqrt{2}_{195^\circ} \quad z_3 = \sqrt{2}_{315^\circ}$$



Para hallar la longitud del lado, aplicamos el teorema del coseno:

$$l^2 = (\sqrt{2})^2 + (\sqrt{2})^2 - 2\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \cos 120^\circ = 2 + 2 - 4\left(-\frac{1}{2}\right) = 4 + 2 = 6$$

$$l = \sqrt{6}$$

- 35 Los afijos de las raíces cúbicas de $8i$ son los vértices de un triángulo equilátero. Compruébalo.**

¿Determinan el mismo triángulo los afijos de $\sqrt[3]{-8i}$, $\sqrt[3]{8}$ o $\sqrt[3]{-8}$?

Representa gráficamente esos cuatro triángulos que has obtenido.

$$\bullet \sqrt[3]{8i} = \sqrt[3]{8}_{90^\circ} = 2_{(90^\circ + 360^\circ k)/3} = 2_{30^\circ + 120^\circ k}; \quad k = 0, 1, 2$$

Las tres raíces son:

$$z_1 = 2_{30^\circ} \quad z_2 = 2_{150^\circ} \quad z_3 = 2_{270^\circ}$$

Al tener el mismo módulo y formar entre ellos un ángulo de 120° , el triángulo que determinan es equilátero.

- $\sqrt[3]{-8i} = \sqrt[3]{8_{270^\circ}} = 2_{(270^\circ + 360^\circ k)/3} = 2_{90^\circ + 120^\circ k}; \quad k = 0, 1, 2$

Las tres raíces son:

$$z_1 = 2_{90^\circ} \quad z_2 = 2_{210^\circ} \quad z_3 = 2_{330^\circ}$$

- $\sqrt[3]{8} = \sqrt[3]{8_{0^\circ}} = 2_{360^\circ k/3} = 2_{120^\circ k}; \quad k = 0, 1, 2$

Las tres raíces son:

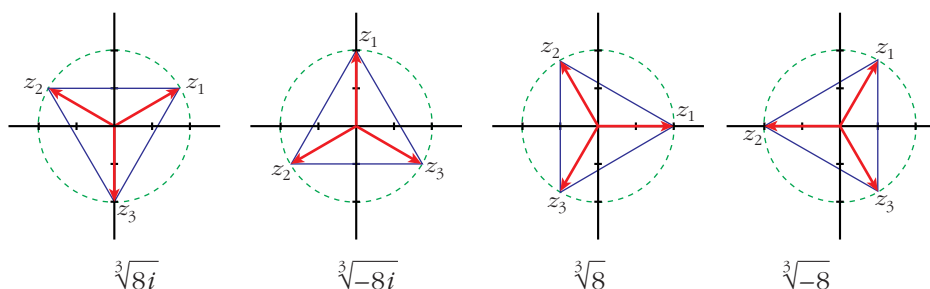
$$z_1 = 2_{0^\circ} \quad z_2 = 2_{120^\circ} \quad z_3 = 2_{240^\circ}$$

- $\sqrt[3]{-8} = \sqrt[3]{8_{180^\circ}} = 2_{(180^\circ + 360^\circ k)/3} = 2_{60^\circ + 120^\circ k}; \quad k = 0, 1, 2$

Las tres raíces son:

$$z_1 = 2_{60^\circ} \quad z_2 = 2_{180^\circ} \quad z_3 = 2_{300^\circ}$$

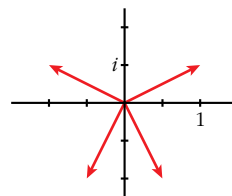
• Representación:



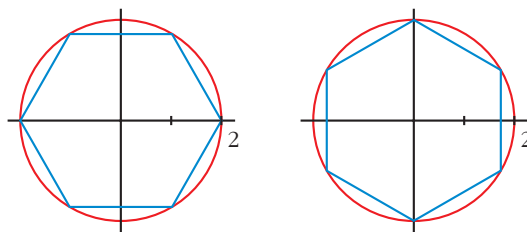
Página 164

36 ¿Pueden ser $z_1 = 2 + i$, $z_2 = -2 + i$, $z_3 = -1 - 2i$ y $z_4 = 1 - 2i$, las raíces de un número complejo? Justifica tu respuesta.

No. Si fueran las cuatro raíces cuartas de un número complejo, formarían entre ellas un ángulo de 90° ; y ni siquiera forman el mismo ángulo, como vemos en la representación gráfica:



37 Halla los números complejos que corresponden a los vértices de estos hexágonos:



1^{er} hexágono:

$$\begin{array}{lll} z_1 = 2_{0^\circ} = 2 & z_2 = 2_{60^\circ} = 1 + \sqrt{3}i & z_3 = 2_{120^\circ} = -1 + \sqrt{3}i \\ z_4 = 2_{180^\circ} = -2 & z_5 = 2_{240^\circ} = -1 - \sqrt{3}i & z_6 = 2_{300^\circ} = 1 - \sqrt{3}i \end{array}$$

2^o hexágono:

$$\begin{array}{lll} z_1 = 2_{30^\circ} = \sqrt{3} + i & z_2 = 2_{90^\circ} = 2i & z_3 = 2_{150^\circ} = -\sqrt{3} + i \\ z_4 = 2_{210^\circ} = -\sqrt{3} - i & z_5 = 2_{270^\circ} = -2i & z_6 = 2_{330^\circ} = \sqrt{3} - i \end{array}$$

- 38** ¿Pueden ser las raíces de un número complejo z , los números 2_{28° , 2_{100° , 2_{172° , 2_{244° y 2_{316° ?

Como todos tienen el mismo módulo, sólo tienes que comprobar que los ángulos entre cada dos de ellas son $\frac{360^\circ}{5} = 72^\circ$. Para hallar z , eleva una de ellas a la quinta potencia.

$$\begin{array}{ll} 28^\circ + 72^\circ = 100^\circ & 100^\circ + 72^\circ = 172^\circ \\ 172^\circ + 72^\circ = 244^\circ & 244^\circ + 72^\circ = 316^\circ \end{array}$$

Sí son las raíces quintas de un número complejo. Lo hallamos elevando a la quinta cualquiera de ellas:

$$z = (2_{28^\circ})^5 = 32_{140^\circ}$$

- 39** El complejo 3_{40° es vértice de un pentágono regular. Halla los otros vértices y el número complejo cuyas raíces quintas son esos vértices.

Para obtener los otros vértices puedes multiplicar cada uno por 1_{72° .

Los otros vértices serán:

$$3_{112^\circ} \quad 3_{184^\circ} \quad 3_{256^\circ} \quad 3_{328^\circ}$$

El número será:

$$z = (3_{40^\circ})^5 = 243$$

- 40** Una de las raíces cúbicas de un número complejo z es $1 + i$. Halla z y las otras raíces cúbicas.

Ten en cuenta que si $\sqrt[3]{z} = 1 + i \rightarrow z = (1 + i)^3$.

$$1 + i = \sqrt{2}_{45^\circ}$$

Las otras raíces cúbicas son:

$$\sqrt{2}_{45^\circ + 120^\circ} = \sqrt{2}_{165^\circ} \quad \sqrt{2}_{165^\circ + 120^\circ} = \sqrt{2}_{285^\circ}$$

Hallamos z :

$$\begin{aligned} z &= (1 + i)^3 = (\sqrt{2}_{45^\circ})^3 = \sqrt{8}_{135^\circ} = \sqrt{8} (\cos 135^\circ + i \sin 135^\circ) = \\ &= \sqrt{8} \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = -2 + 2i \end{aligned}$$

Ecuaciones en $\mathbb{C}$

41 Resuelve las siguientes ecuaciones y expresa las soluciones en forma binómica:

a) $x^2 + 4 = 0$

b) $x^2 + x + 4 = 0$

c) $x^2 + 3x + 7 = 0$

d) $x^2 - x + 1 = 0$

a) $x^2 + 4 = 0 \rightarrow x^2 = -4 \rightarrow x = \pm \sqrt{-4} = \pm 2i$

$x_1 = -2i, x_2 = 2i$

b) $x^2 + x + 4 = 0 \rightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 16}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{-15}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{15}i}{2}$

$x_1 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{15}}{2}i, x_2 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{15}}{2}i$

c) $x^2 + 3x + 7 = 0 \rightarrow x = \frac{-3 \pm \sqrt{9 - 28}}{2} = \frac{-3 \pm \sqrt{-19}}{2} = \frac{-3 \pm \sqrt{19}i}{2}$

$x_1 = -\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{19}}{2}i, x_2 = -\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{19}}{2}i$

d) $x^2 - x + 1 = 0 \rightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{-3}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{3}i}{2}$

$x_1 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i, x_2 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$

42 Resuelve las ecuaciones:

a) $x^5 + 32 = 0$

b) $ix^3 - 27 = 0$

a) $x^5 + 32 = 0 \rightarrow x^5 = -32$

$x = \sqrt[5]{-32} = \sqrt[5]{32_{180^\circ}} = 2_{(180^\circ + 360^\circ k)/5} = 2_{36^\circ + 72^\circ k}; k = 0, 1, 2, 3, 4$

Las cinco raíces son:

$2_{36^\circ} \quad 2_{108^\circ} \quad 2_{180^\circ} \quad 2_{252^\circ} \quad 2_{324^\circ}$

b) $ix^3 - 27 = 0 \rightarrow x^3 + 27i = 0 \rightarrow x^3 = -27i$

$x = \sqrt[3]{-27i} = \sqrt[3]{27_{270^\circ}} = 3_{(270^\circ + 360^\circ k)/3} = 3_{90^\circ + 120^\circ k}; k = 0, 1, 2$

Las tres raíces son:

$3_{90^\circ} \quad 3_{210^\circ} \quad 3_{330^\circ}$

43 Resuelve las siguientes ecuaciones en $\mathbb{C}$:

a) $z^2 + 4 = 0$

b) $z^2 - 2z + 5 = 0$

c) $2z^2 + 10 = 0$

a) $z^2 + 4 = 0 \rightarrow z^2 = -4 \rightarrow z = \pm \sqrt{-4} = \pm 2i$

$z_1 = -2i, z_2 = 2i$

$$b) z^2 - 2z + 5 = 0 \rightarrow z = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 20}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{-16}}{2} = \frac{2 \pm 4i}{2} = 1 \pm 2i$$

$$z_1 = 1 - 2i, \quad z_2 = 1 + 2i$$

$$c) 2z^2 + 10 = 0 \rightarrow 2z^2 = -10 \rightarrow z^2 = -5 \rightarrow z = \pm \sqrt{5} i$$

$$z_1 = -\sqrt{5} i, \quad z_2 = \sqrt{5} i$$

44 Obtén las cuatro soluciones de las siguientes ecuaciones:

a) $z^4 - 1 = 0$

b) $z^4 + 16 = 0$

c) $z^4 - 8z = 0$

En a) y b) despeja z y halla las cuatro raíces. En c) haz $z(z^3 - 8) = 0$ e iguala a 0 cada factor.

$$a) z^4 - 1 = 0 \rightarrow z^4 = 1 \rightarrow z = \sqrt[4]{1} = \sqrt[4]{1_{0^\circ}} = 1_{360^\circ k/4} = 1_{90^\circ k}; \quad k = 0, 1, 2, 3$$

Las cuatro raíces son:

$$1_{0^\circ} = 1 \quad 1_{90^\circ} = i \quad 1_{180^\circ} = -1 \quad 1_{270^\circ} = -i$$

$$b) z^4 + 16 = 0 \rightarrow z^4 = -16 \rightarrow z = \sqrt[4]{-16} = \sqrt[4]{16_{180^\circ}} = 2_{(180^\circ + 360^\circ k)/4} = 2_{45^\circ + 90^\circ k}; \quad k = 0, 1, 2, 3$$

Las cuatro raíces son:

$$2_{45^\circ} = \sqrt{2} + \sqrt{2}i \quad 2_{135^\circ} = -\sqrt{2} + \sqrt{2}i$$

$$2_{225^\circ} = -\sqrt{2} - \sqrt{2}i \quad 2_{315^\circ} = \sqrt{2} - \sqrt{2}i$$

$$c) z^4 - 8z = 0 \rightarrow z(z^3 - 8) = 0 \begin{cases} z = 0 \\ z = \sqrt[3]{8} \end{cases}$$

$$\sqrt[3]{8} = \sqrt[3]{8_{0^\circ}} = 2_{(360^\circ k)/3} = 2_{120^\circ k}; \quad k = 0, 1, 2$$

Las soluciones de la ecuación son:

$$0 \quad 2_{0^\circ} = 2 \quad 2_{120^\circ} = -1 + \sqrt{3}i \quad 2_{240^\circ} = -1 - \sqrt{3}i$$

45 Resuelve estas ecuaciones y expresa las soluciones en forma binómica:

a) $z^3 + 8i = 0$

b) $iz^4 + 4 = 0$

$$a) z^3 + 8i = 0 \rightarrow z = \sqrt[3]{-8i} = \sqrt[3]{8_{270^\circ}} = 2_{(270^\circ + 360^\circ k)/3} = 2_{90^\circ + 120^\circ k}; \quad k = 0, 1, 2$$

Las tres raíces son:

$$2_{90^\circ} = 2i \quad 2_{210^\circ} = -\sqrt{3} - i \quad 2_{330^\circ} = \sqrt{3} - i$$

$$b) iz^4 + 4 = 0 \rightarrow z^4 - 4i = 0 \rightarrow z^4 = 4i$$

$$z = \sqrt[4]{4i} = \sqrt[4]{4_{90^\circ}} = \sqrt{2}_{(90^\circ + 360^\circ k)/4} = \sqrt{2}_{22^\circ 30' + 90^\circ k}; \quad k = 0, 1, 2, 3$$

Las cuatro raíces son:

$$\sqrt{2}_{22^\circ 30'} = 1,3 + 0,5i$$

$$\sqrt{2}_{112^\circ 30'} = -0,5 + 1,3i$$

$$\sqrt{2}_{202^\circ 30'} = -1,3 - 0,5i$$

$$\sqrt{2}_{292^\circ 30'} = 0,5 - 1,3i$$

- 46** Escribe una ecuación de segundo grado que tenga por soluciones:

$$1 + i \text{ y } 2 - 3i$$

☛ Ten en cuenta que si z_1 y z_2 son soluciones de una ecuación de segundo grado, esta será de la forma $(z - z_1)(z - z_2) = 0$.

La ecuación pedida será $[z - (1 + i)][z - (2 - 3i)] = 0$. Multiplica y exprésala en forma polinómica.

$$\begin{aligned} [z - (1 + i)][z - (2 - 3i)] &= z^2 - (2 - 3i)z - (1 + i)z + (1 + i)(2 - 3i) = \\ &= z^2 - (2 - 3i + 1 + i)z + (2 - 3i + 2i - 3i^2) = \\ &= z^2 - (3 - 2i)z + (5 - i) = 0 \end{aligned}$$

- 47** Escribe una ecuación de segundo grado cuyas soluciones sean $2 - 3i$ y $2 + 3i$.

$$\begin{aligned} [z - (2 - 3i)][z - (2 + 3i)] &= [(z - 2) + 3i][(z - 2) - 3i] = \\ &= (z - 2)^2 - (3i)^2 = z^2 - 4z + 4 - 9i^2 = \\ &= z^2 - 4z + 13 = 0 \end{aligned}$$

Interpolación gráfica de igualdades entre complejos

- 48** Representa los números complejos z tales que $z + \bar{z} = -3$.

☛ Escribe z en forma binómica, súmale su conjugado y representa la condición que obtienes.

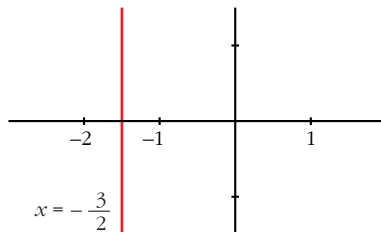
Llamamos $z = x + iy$

Entonces: $\bar{z} = x - iy$

Así:

$$z + \bar{z} = x + iy + x - iy = 2x = -3 \rightarrow x = -\frac{3}{2}$$

Representación:



- 49** Representa los números complejos que verifican:

a) $\bar{z} = -z$

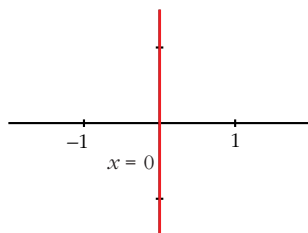
b) $|z + \bar{z}| = 3$

c) $|z - \bar{z}| = 4$

a) $z = x + iy \rightarrow \bar{z} = x - iy$

$\bar{z} = -z \rightarrow x - iy = -x - iy \rightarrow 2x = 0 \rightarrow x = 0$ (es el eje imaginario)

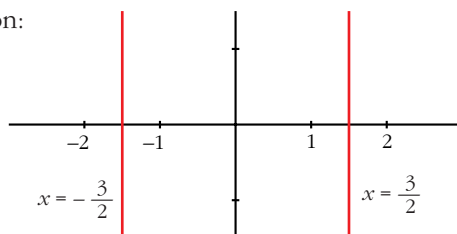
Representación:



$$\text{b) } z + \bar{z} = x + iy + x - iy = 2x$$

$$|z + \bar{z}| = |2x| = 3 \begin{cases} 2x = 3 \rightarrow x = 3/2 \\ 2x = -3 \rightarrow x = -3/2 \end{cases}$$

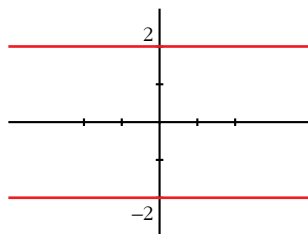
Representación:



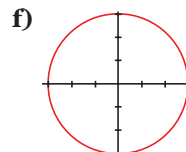
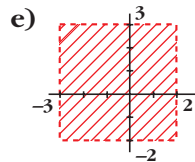
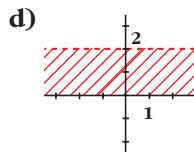
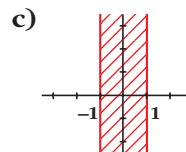
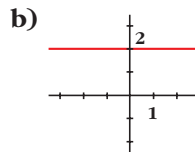
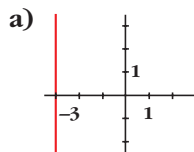
$$\text{c) } z - \bar{z} = x + iy - (x - iy) = 2yi$$

$$|z - \bar{z}| = |2yi| = |2y| = 4 \quad \begin{cases} 2y = 4 \rightarrow y = 2 \\ 2y = -4 \rightarrow y = -2 \end{cases}$$

Representación:



50 Escribe las condiciones que deben cumplir los números complejos cuya representación gráfica es la siguiente:



☛ En a), b) y f) es una igualdad.

En c) y d), una desigualdad.

En e), dos desigualdades.

a) $\operatorname{Re} z = -3$

b) $\operatorname{Im} z = 2$

c) $-1 \leq \operatorname{Re} z \leq 1$

d) $0 \leq \operatorname{Im} z < 2$

e) $\begin{cases} -3 < \operatorname{Re} z < 2 \\ -2 < \operatorname{Im} z < 3 \end{cases}$

f) $|z| = 3$

Página 165

CUESTIONES TEÓRICAS

51 ¿Se puede decir que un número complejo es real si su argumento es 0?

No, también son reales los números con argumento 180° (los negativos).

52 Prueba que $|z| = \sqrt{z \cdot \bar{z}}$

Si $z = x + iy$, entonces $\bar{z} = x - iy$.

Así:

$$z \cdot \bar{z} = (x + iy)(x - iy) = x^2 - (iy)^2 = x^2 - i^2 y^2 = x^2 + y^2$$

Por tanto:

$$\sqrt{z \cdot \bar{z}} = \sqrt{x^2 + y^2} = |z|$$

53 Si $z = r_\alpha$, ¿qué relación tienen con z los números $r_{\alpha + 180^\circ}$ y $r_{360^\circ - \alpha}$?

$$r_{\alpha + 180^\circ} = -z \text{ (opuesto de } z)$$

$$r_{360^\circ - \alpha} = \bar{z} \text{ (conjugado de } z)$$

54 Comprueba que:

a) $\overline{z + w} = \bar{z} + \bar{w}$

b) $\overline{z \cdot w} = \bar{z} \cdot \bar{w}$

c) $\overline{kz} = k\bar{z}$, con $k \in \mathbb{R}$

$$z = a + bi = r_\alpha \rightarrow \bar{z} = a - bi = r_{360^\circ - \alpha}$$

$$w = c + di = r'_\beta \rightarrow \bar{w} = c - di = r'_{360^\circ - \beta}$$

$$a) z + w = (a + c) + (b + d)i \rightarrow \overline{z + w} = (a + c) - (b + d)i$$

$$\bar{z} + \bar{w} = a - bi + c - di = (a + c) - (b + d)i = \overline{z + w}$$

$$b) z \cdot w = (r \cdot r')_{\alpha + \beta} \rightarrow \overline{z \cdot w} = (r \cdot r')_{360^\circ - (\alpha + \beta)}$$

$$\bar{z} \cdot \bar{w} = (r \cdot r')_{360^\circ - \alpha + 360^\circ - \beta} = (r \cdot r')_{360^\circ - (\alpha + \beta)} = \overline{z \cdot w}$$

$$c) kz = ka + kbi \rightarrow \overline{kz} = ka - kbi$$

$$k\bar{z} = ka - kbi = \overline{kz}$$

55 Demuestra que $\left| \frac{1}{z} \right| = \frac{1}{|z|}$.

$$\frac{1}{z} = \frac{1_{0^\circ}}{r_\alpha} = \left(\frac{1}{r} \right)_{-\alpha} = \left(\frac{1}{r} \right)_{360^\circ - \alpha} \rightarrow \left| \frac{1}{z} \right| = \frac{1}{r} = \frac{1}{|z|}$$

56 El producto de dos números complejos imaginarios, ¿puede ser real? Acláralo con un ejemplo.

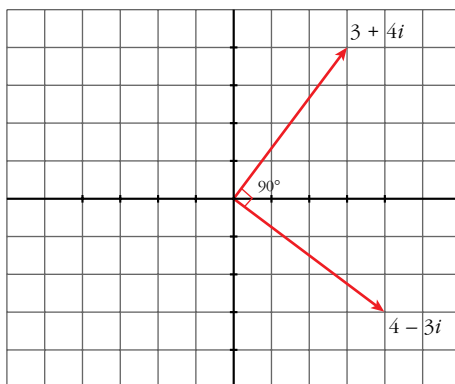
Sí. Por ejemplo:

$$z = i, w = i$$

$$z \cdot w = i \cdot i = i^2 = -1 \in \mathbb{R}$$

57 Representa el número complejo $z = 4 - 3i$. Multiplícalo por i y comprueba que el resultado que obtienes es el mismo que si aplicas a z un giro de 90° .

$$iz = 4i - 3i^2 = 3 + 4i$$



58 Halla el número complejo z que se obtiene al transformar el complejo $2 + 3i$ mediante un giro de 30° con centro en el origen.

$$2 + 3i = \sqrt{13}_{56^\circ 18'}$$

$$z = \sqrt{13}_{56^\circ 18'} \cdot 1_{30^\circ} = \sqrt{13}_{86^\circ 18'} = 0,23 + 3,60i$$

59 ¿Qué relación existe entre el argumento de un complejo y el de su opuesto?

Se diferencian en 180° . Si el argumento del número es α , el de su opuesto es:

$$180^\circ + \alpha$$

60 ¿Qué condición debe cumplir un número complejo $z = a + bi$ para que $\bar{z} = \frac{1}{z}$?

➡ Halla $\frac{1}{z}$, e iguala a $a - bi$.

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{a + bi} = \frac{a - bi}{(a + bi)(a - bi)} = \frac{a - bi}{a^2 + b^2} = a - bi$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{a}{a^2 + b^2} &= a \\ \frac{-b}{a^2 + b^2} &= -b \end{aligned} \right\} \begin{aligned} \frac{a}{a} &= a^2 + b^2 \rightarrow a^2 + b^2 = 1 \text{ (módulo 1)} \\ \text{Ha de tener módulo 1} \end{aligned}$$

PARA PROFUNDIZAR

- 61** La suma de dos números complejos, $z = a + bi$, $w = c + di$, dividida por su diferencia, es un número imaginario puro.

Prueba que los dos números z y w han de tener el mismo módulo.

☛ Haz $\frac{(a+c) + (b+d)i}{(a-c) + (b-d)i}$, calcula la parte real de ese cociente e iguala a 0.

$$\left. \begin{aligned} z &= a + bi \\ w &= c + di \end{aligned} \right\} \begin{aligned} z + w &= (a + c) + (b + d)i \\ z - w &= (a - c) + (b - d)i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{z + w}{z - w} &= \frac{(a + c) + (b + d)i}{(a - c) + (b - d)i} = \frac{[(a + c) + (b + d)i] [(a - c) - (b - d)i]}{[(a - c) + (b - d)i] [(a - c) - (b - d)i]} = \\ &= \frac{(a^2 - c^2) + (a + c) + (b - d)i + (b + d) + (a - c)i - (b^2 - d^2)i^2}{(a - c)^2 + (b - d)^2} = \\ &= \frac{(a^2 - c^2 + b^2 - d^2) + [(a + c)(b - d) + (b + d)(a - c)]i}{(a - c)^2 + (b - d)^2} \end{aligned}$$

Para que sea imaginario puro, su parte real ha de ser 0:

$$\frac{a^2 - c^2 + b^2 - d^2}{(a - c)^2 + (b - d)^2} = 0 \rightarrow a^2 - c^2 + b^2 - d^2 = 0$$

$$a^2 + b^2 = c^2 + d^2 \rightarrow \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{c^2 + d^2} \rightarrow |z| = |w|$$

- 62** Sea $z \neq 0$ un complejo y $w = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$. Prueba que los afijos de z , zw y zw^2 son los vértices de un triángulo equilátero.

☛ Expresa w en forma polar y recuerda el significado de la multiplicación por 1_α

$$z = r_\alpha, \quad w = 1_{120^\circ}$$

$$z \cdot w = r_\alpha \cdot 1_{120^\circ} = r_{\alpha + 120^\circ}$$

$$z \cdot w^2 = r_\alpha \cdot (1_{120^\circ})^2 = r_\alpha \cdot 1_{240^\circ} = r_{\alpha + 240^\circ}$$

Como los tres tienen el mismo módulo y forman entre sí 120° , sus afijos son los vértices de un triángulo equilátero.

- 63** Un pentágono regular con centro en el origen de coordenadas tiene uno de sus vértices en el punto $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$.

Halla los otros vértices y la longitud de su lado.

El punto $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$ corresponde al afijo del número complejo $z = \sqrt{2} + \sqrt{2}i = 2_{45^\circ}$.

Para hallar los otros vértices, multiplicamos z por 1_{72° :

$$z_2 = 2_{117^\circ} = -0,91 + 1,78i$$

$$z_3 = 2_{189^\circ} = -1,97 - 0,31i$$

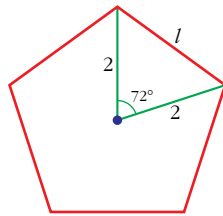
$$z_4 = 2_{261^\circ} = -0,31 - 1,97i$$

$$z_5 = 2_{333^\circ} = 1,78 - 0,91i$$

Los otros tres vértices serán:

$$(-0,91; 1,78) \quad (-1,97; -0,31) \quad (-0,31; -1,97) \quad (1,78; -0,91)$$

Hallamos la longitud del lado aplicando el teorema del coseno:



$$l^2 = 2^2 + 2^2 - 2 \cdot 2 \cdot \cos 72^\circ$$

$$l^2 = 4 + 4 - 4 \cdot 0,31$$

$$l^2 = 8 - 1,24$$

$$l^2 = 6,76$$

$$l = 2,6 \text{ unidades}$$

- 64** Si el producto de dos números complejos es -8 y dividiendo el cubo de uno de ellos entre el otro obtenemos de resultado 2 , ¿cuánto valen el módulo y el argumento de cada uno?

$$\left. \begin{array}{l} z = r_\alpha \\ w = r'_\beta \\ -8 = 8_{180^\circ} \\ 2 = 2_{0^\circ} \end{array} \right\} r_\alpha \cdot r'_\beta = (r \cdot r')_{\alpha + \beta} = 8_{180^\circ} \rightarrow \begin{cases} r \cdot r' = 8 \\ \alpha + \beta = 180^\circ \end{cases}$$

$$\frac{(r_\alpha)^3}{r'_\beta} = \frac{r^3_{3\alpha}}{r'_\beta} = \left(\frac{r^3}{r'} \right)_{3\alpha - \beta} = 2_{0^\circ} \rightarrow \begin{cases} \frac{r^3}{r'} = 2 \\ 3\alpha - \beta = 0^\circ \end{cases}$$

Así:

$$\left. \begin{array}{l} r \cdot r' = 8 \\ r^3 = 2r' \end{array} \right\} \begin{array}{l} r' = \frac{8}{r} \\ r' = \frac{r^3}{2} \end{array} \rightarrow \frac{8}{r} = \frac{r^3}{2} \rightarrow 16 = r^4 \rightarrow \begin{cases} r = 2 \\ r' = 4 \end{cases}$$

$$\left. \begin{array}{l} \alpha + \beta = 180^\circ \\ 3\alpha = \beta \end{array} \right\} \alpha + 3\alpha = 180^\circ \rightarrow 4\alpha = 180^\circ \rightarrow \begin{cases} \alpha = 45^\circ \\ \beta = 135^\circ \end{cases}$$

Por tanto: $z = 2_{45^\circ}$, $w = 4_{135^\circ}$

- 65** Calcula el inverso de los números complejos siguientes y representa gráficamente el resultado:

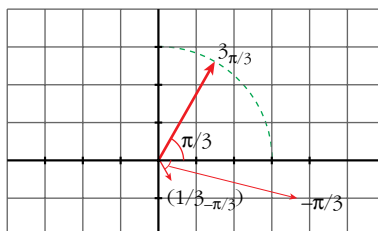
a) $3_{\pi/3}$

b) $2i$

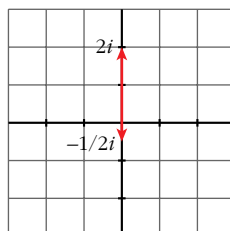
c) $-1 + i$

¿Qué relación existe entre el módulo y el argumento de un número complejo y de su inverso?

$$a) \frac{1}{3_{\pi/3}} = \frac{1_{0^\circ}}{3_{\pi/3}} = \left(\frac{1}{3}\right)_{-\pi/3} = \left(\frac{1}{3}\right)$$



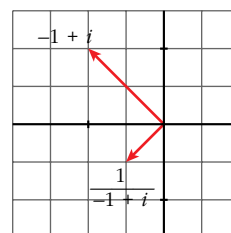
$$b) \frac{1}{2i} = \frac{-i}{2} = \frac{-1}{2}i$$



$$c) -1 + i = \sqrt{2}_{135^\circ}$$

$$\frac{1}{-1 + i} = \frac{1_{0^\circ}}{\sqrt{2}_{135^\circ}} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)_{-135^\circ} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)_{225^\circ} = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$$

$$\text{Si } z = r_{\alpha}, \text{ entonces } \frac{1}{z} = \left(\frac{1}{r}\right)_{360^\circ - \alpha}$$

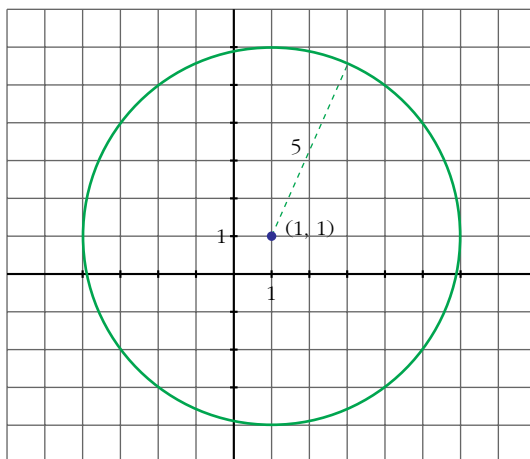


66 Representa gráficamente las igualdades siguientes. ¿Qué figura se determina en cada caso?

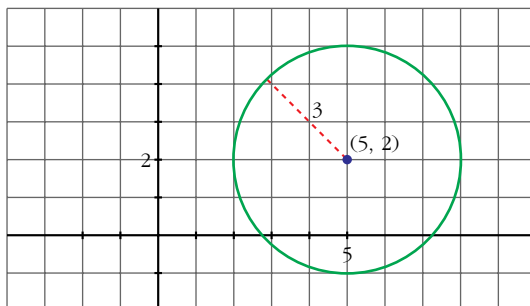
a) $|z - (1 + i)| = 5$

b) $|z - (5 + 2i)| = 3$

a) Circunferencia con centro en $(1, 1)$ y radio 5.



b) Circunferencia de centro en (5, 2) y radio 3.



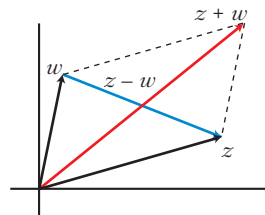
67 Escribe la condición que verifican todos los números complejos cuyos afijos estén en la circunferencia de centro (1, 1) y radio 3.

$$|z - (1 + i)| = 3$$

PARA PENSAR UN POCO MÁS

68 Demuestra, utilizando números complejos, que en un paralelogramo cualquiera la suma de los cuadrados de las diagonales es igual al doble de la suma de los cuadrados de los lados.

🔵 Al formar un paralelogramo cuyos lados contiguos sean dos números complejos, z y w , observa qué relación tienen con estas las diagonales.



Y recuerda (ejercicio 52) que el cuadrado del módulo de un complejo, $|z|^2$, es igual al producto de z por su conjugado $\bar{z}$. Es decir $|z|^2 = z \cdot \bar{z}$ (*)

Para demostrar la igualdad propuesta, exprésala utilizando los cuadrados de los módulos de los complejos correspondientes, desarróllala utilizando la propiedad (*), opera y simplifica.

Suma de los cuadrados de los lados: $|z|^2 + |w|^2$

Suma de los cuadrados de las diagonales: $|z + w|^2 + |z - w|^2$

Operamos:

$$\begin{aligned} |z + w|^2 + |z - w|^2 &= (z + w)(\bar{z} + \bar{w}) + (z - w)(\bar{z} - \bar{w}) = \\ &= z\bar{z} + z\bar{w} + z\bar{w} + w\bar{w} + z\bar{z} - z\bar{w} - z\bar{w} + w\bar{w} = \\ &= z\bar{z} + z\bar{z} + w\bar{w} + w\bar{w} = 2z \cdot \bar{z} + 2w \cdot \bar{w} = 2(z\bar{z} + w\bar{w}) = \\ &= 2(|z|^2 + |w|^2) \end{aligned}$$

RESUELVE TÚ

Aparte de la Luna y el Sol, los objetos celestes que se nos presentan con más brillo son planetas: Venus, Marte y Júpiter. Después de ellos, el astro más brillante es la estrella Sirio. Observándola con seis meses de diferencia, presenta una paralaje de $0,72''$. ¿A qué distancia se encuentra?

Como hemos visto:

$$d = \frac{150\,000\,000}{\text{sen}(\alpha/2)}$$

Si $\alpha = 0,72''$, quedaría:

$$d = \frac{150\,000\,000}{\text{sen}(0,72''/2)} = 8,6 \cdot 10^{13} \text{ km} \approx 9 \text{ años-luz}$$