

1. Comprueba las siguientes igualdades trigonométricas: **(3 puntos, 1 punto el primer apartado y 2 puntos el segundo)**

a) $\cos(x+y)\cos(x-y) + 1 = \cos^2 x + \cos^2 y$

b) $1 - \frac{1}{2} \sin 2x = \frac{\sin^3 x + \cos^3 x}{\sin x + \cos x}$

2. Simplifica todo lo posible la siguiente expresión: **(1 punto)**

$$\frac{1}{\cos^2 x (1 - \operatorname{tg}^2 x)}$$

3. En los siguientes apartados hay dos ecuaciones y un sistema de ecuaciones trigonométricas. Resuélvelos, teniendo en cuenta que *no está permitido usar números decimales, sólo fracciones y radicales con las razones trigonométricas de los ángulos fundamentales*. **(3 puntos, 1 punto por apartado)**

a) $\cos 2x = 5 - 6 \cos^2 x$

b) $\cos x + \sin^2 \frac{x}{2} = 1$

c)
$$\begin{cases} \sin x + \sin y = \frac{\sqrt{3} + 1}{2} \\ \sin x - \sin y = \frac{\sqrt{3} - 1}{2} \end{cases}$$

4. Halla las coordenadas del vector $\vec{x} = (2, -5)$ respecto de la base formada por los vectores $\vec{u} = (-3, 1)$ y $\vec{v} = (-1, 2)$. **(1 punto)**

5. Contesta a las siguientes cuestiones: **(3 puntos, 1 punto por apartado)**

a) Hallar, aproximadamente (utiliza la calculadora), el ángulo formado por los vectores $\vec{u} = (-5, \sqrt{3})$ y $\vec{v} = (-\sqrt{3}, 1)$

b) Dado el vector $\vec{u} = (1, 2)$ respecto de una base ortonormal, hallar otro vector $\vec{v}$ tal que $\vec{u} \perp \vec{v}$ y $|\vec{v}| = 3$.

Nota: en este apartado no está permitido usar decimales, sólo radicales y fracciones.

c) Calcular el módulo del vector $\vec{u} + \vec{v}$ sabiendo que $\vec{u} \perp \vec{v}$, $|\vec{u}| = 12$ y que $|\vec{v}| = 5$

Formulario

$$\blacksquare \sin(a + b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$$

$$\blacksquare \cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$$

$$\blacksquare \operatorname{tg}(a + b) = \frac{\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b}{1 - \operatorname{tg} a \operatorname{tg} b}$$

$$\blacksquare \sin(a - b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$$

$$\blacksquare \cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$$

$$\blacksquare \operatorname{tg}(a - b) = \frac{\operatorname{tg} a - \operatorname{tg} b}{1 + \operatorname{tg} a \operatorname{tg} b}$$

$$\blacksquare \sin 2a = 2 \sin a \cos a$$

$$\blacksquare \cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a$$

$$\blacksquare \operatorname{tg} 2a = \frac{2 \operatorname{tg} a}{1 - \operatorname{tg}^2 a}$$

$$\blacksquare \sin \frac{a}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos a}{2}}$$

$$\blacksquare \cos \frac{a}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos a}{2}}$$

$$\blacksquare \operatorname{tg} \frac{a}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos a}{1 + \cos a}}$$

$$\blacksquare \sin A + \sin B = 2 \sin \frac{A + B}{2} \cos \frac{A - B}{2}$$

$$\blacksquare \sin A - \sin B = 2 \cos \frac{A + B}{2} \sin \frac{A - B}{2}$$

$$\blacksquare \cos A + \cos B = 2 \cos \frac{A + B}{2} \cos \frac{A - B}{2}$$

$$\blacksquare \cos A - \cos B = -2 \sin \frac{A + B}{2} \sin \frac{A - B}{2}$$

Soluciones

$$\begin{aligned}
 1. \quad a) \quad & \cos(x+y)\cos(x-y) + 1 = (\cos x \cos y - \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y)(\cos x \cos y + \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y) + 1 = \\
 & = (\cos x \cos y)^2 - (\operatorname{sen} x \operatorname{sen} y)^2 + 1 = \cos^2 x \cos^2 y - \operatorname{sen}^2 x \operatorname{sen}^2 y + 1 = \\
 & = \cos^2 x \cos^2 y - (1 - \cos^2 x)(1 - \cos^2 y) + 1 = \\
 & = \cos^2 x \cos^2 y - (1 - \cos^2 y - \cos^2 x + \cos^2 x \cos^2 y) + 1 = \\
 & = \cos^2 x \cos^2 y - 1 + \cos^2 y + \cos^2 x - \cos^2 x \cos^2 y + 1 = \cos^2 x + \cos^2 y
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 b) \quad & \frac{\operatorname{sen}^3 x + \cos^3 x}{\operatorname{sen} x + \cos x} = \frac{\operatorname{sen} x(\operatorname{sen}^2 x) + \cos x(\cos^2 x)}{\operatorname{sen} x + \cos x} = \frac{\operatorname{sen} x(1 - \cos^2 x) + \cos x(1 - \operatorname{sen}^2 x)}{\operatorname{sen} x + \cos x} = \\
 & = \frac{\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} x \cos^2 x + \cos x - \cos x \operatorname{sen}^2 x}{\operatorname{sen} x + \cos x} = \frac{\operatorname{sen} x + \cos x - (\operatorname{sen} x \cos^2 x + \cos x \operatorname{sen}^2 x)}{\operatorname{sen} x + \cos x} = \\
 & = \frac{\operatorname{sen} x + \cos x}{\operatorname{sen} x + \cos x} - \frac{\operatorname{sen} x \cos^2 x + \cos x \operatorname{sen}^2 x}{\operatorname{sen} x + \cos x} = 1 - \frac{\operatorname{sen} x \cos x(\cos x + \operatorname{sen} x)}{\operatorname{sen} x + \cos x} = \\
 & = 1 - \operatorname{sen} x \cos x = 1 - \frac{1}{2} 2 \operatorname{sen} x \cos x = 1 - \frac{1}{2} \operatorname{sen} 2x
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 2. \quad & \frac{1}{\cos^2 x (1 - \operatorname{tg}^2 x)} = \frac{1}{\cos^2 x \left(1 - \frac{\operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x}\right)} = \frac{1}{\cos^2 x - \cos^2 x \frac{\operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x}} = \frac{1}{\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x} = \\
 & = \frac{1}{\cos 2x} = \sec 2x
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 3. \quad a) \quad & \cos 2x = 5 - 6 \cos^2 x \Leftrightarrow \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x = 5 - 6 \cos^2 x \Leftrightarrow \\
 & \Leftrightarrow \cos^2 x - (1 - \cos^2 x) = 5 - 6 \cos^2 x \Leftrightarrow 2 \cos^2 x - 1 = 5 - 6 \cos^2 x \Leftrightarrow 8 \cos^2 x = 6 \Leftrightarrow \\
 & \Leftrightarrow \cos^2 x = \frac{6}{8} = \frac{3}{4} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 30^\circ \\ x_2 = 330^\circ \end{cases} \\ \cos x = -\sqrt{\frac{3}{4}} = -\frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x_3 = 150^\circ \\ x_4 = 210^\circ \end{cases} \end{cases}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 b) \quad & \cos x + \operatorname{sen}^2 \frac{x}{2} = 1 \Leftrightarrow \cos x + \left(\sqrt{\frac{1 - \cos x}{2}}\right)^2 = 1 \Leftrightarrow \cos x + \frac{1 - \cos x}{2} = 1 \Leftrightarrow \\
 & \Leftrightarrow 2 \cos x + 1 - \cos x = 2 \Leftrightarrow \cos x = 1 \Leftrightarrow x = 0^\circ
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 c) \quad & \begin{cases} \operatorname{sen} x + \operatorname{sen} y = \frac{\sqrt{3} + 1}{2} \\ \operatorname{sen} x - \operatorname{sen} y = \frac{\sqrt{3} - 1}{2} \end{cases} \quad \text{Sumando ambas ecuaciones: } 2 \operatorname{sen} x = \sqrt{3} \Rightarrow \\
 & \Rightarrow \operatorname{sen} x = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 60^\circ \\ x_2 = 120^\circ \end{cases}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{Si } x_1 = 60^\circ \Rightarrow \operatorname{sen} 60^\circ + \operatorname{sen} y &= \frac{\sqrt{3} + 1}{2} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} + \operatorname{sen} y = \frac{\sqrt{3} + 1}{2} \Rightarrow \\
 \Rightarrow \sqrt{3} + 2 \operatorname{sen} y &= \sqrt{3} + 1 \Rightarrow 2 \operatorname{sen} y = 1 \Rightarrow \operatorname{sen} y = \frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} y_1 = 30^\circ \\ y_2 = 150^\circ \end{cases}
 \end{aligned}$$

$$\text{Si } x_2 = 120^\circ \Rightarrow \sin 120^\circ + \sin y = \frac{\sqrt{3}+1}{2} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} + \sin y = \frac{\sqrt{3}+1}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt{3} + 2 \sin y = \sqrt{3} + 1 \Rightarrow 2 \sin y = 1 \Rightarrow \sin y = \frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} y_3 = 30^\circ \\ y_4 = 150^\circ \end{cases}$$

Resumiendo, el conjunto de soluciones entre 0° y 360° es: $(60^\circ, 30^\circ)$; $(60^\circ, 150^\circ)$; $(120^\circ, 30^\circ)$ y $(120^\circ, 150^\circ)$.

$$\begin{aligned} 4. \quad \vec{x} &= a\vec{u} + b\vec{v} \Rightarrow (2, -5) = a(-3, 1) + b(-1, 2) \Rightarrow (2, -5) = (-3a - b, a + 2b) \Rightarrow \\ &\Rightarrow \begin{cases} -3a - b = 2 \\ a + 2b = -5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -3a - b = 2 \\ 3a + 6b = -15 \end{cases} \Rightarrow (\text{sumando ambas ecuaciones}) 5b = -13 \Rightarrow \\ &\Rightarrow b = \frac{-13}{5}. \text{ Sustituyendo en } a + 2b = -5 \text{ se tiene: } a + 2\left(\frac{-13}{5}\right) = -5 \Rightarrow 5a - 26 = -25 \Rightarrow \\ &\Rightarrow 5a = 1 \Rightarrow a = \frac{1}{5}. \end{aligned}$$

Así pues las coordenadas de $\vec{x}$ respecto de la base formada por $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son $\left(\frac{1}{5}, \frac{-13}{5}\right)$.

5. a) Llamemos α al ángulo formado por los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$. Entonces:

$$\begin{aligned} \cos \alpha &= \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|} = \frac{5\sqrt{3} + \sqrt{3}}{\sqrt{(-5)^2 + (\sqrt{3})^2} \cdot \sqrt{(-\sqrt{3})^2 + 1^2}} = \frac{6\sqrt{3}}{\sqrt{28} \cdot \sqrt{4}} = \\ &= \frac{6\sqrt{3}}{2\sqrt{28}} = \frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{28}} \cong 0,98 \Rightarrow \alpha \cong 11,48^\circ. \end{aligned}$$

b) Llamemos $\vec{v} = (x, y)$. Entonces, como $|\vec{v}| = 3 \Rightarrow \sqrt{x^2 + y^2} = 3 \Rightarrow x^2 + y^2 = 9$. Por otro lado, como $\vec{u} \perp \vec{v} \Rightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \Rightarrow x + 2y = 0$. De esta última ecuación se deduce que $x = -2y$. Sustituyendo en la anterior: $(-2y)^2 + y^2 = 9 \Rightarrow 5y^2 = 9 \Rightarrow y^2 = \frac{9}{5} \Rightarrow y = \pm \frac{3\sqrt{5}}{5}$. Si $y = \frac{3\sqrt{5}}{5} \Rightarrow x = -\frac{6\sqrt{5}}{5}$. Si $y = -\frac{3\sqrt{5}}{5} \Rightarrow x = \frac{6\sqrt{5}}{5}$. Por tanto hay dos posibilidades: o bien $\vec{v} = \left(-\frac{6\sqrt{5}}{5}, \frac{3\sqrt{5}}{5}\right)$, o bien $\vec{v} = \left(\frac{6\sqrt{5}}{5}, -\frac{3\sqrt{5}}{5}\right)$

c) $|\vec{u} + \vec{v}|^2 = (\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = \vec{u} \cdot \vec{u} + \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v} \cdot \vec{u} + \vec{v} \cdot \vec{v} = |\vec{u}|^2 + |\vec{v}|^2$
En el último paso se ha utilizado que, al ser $\vec{u} \perp \vec{v}$, entonces $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.
Por tanto $|\vec{u} + \vec{v}|^2 = 12^2 + 5^2 = 144 + 25 = 169 \Rightarrow |\vec{u} + \vec{v}| = 13$.