1. Dada la función cuadrática $y = \frac{1}{2}x^2 - x - \frac{3}{2}$:

   - Halla su vértice y los puntos de corte con los ejes. **(1 punto)**
   - Representa gráficamente la función. **(1 punto)**

   Representa también, y en los mismos ejes de coordenadas que la función anterior, la función lineal $y = -\frac{3}{4}x$ **(1 punto)**
   Halla los puntos de corte de ambas funciones. **(1 punto)**

2. Dada la función hiperbólica $y = \frac{4x-3}{2x-1}$:

   - ¿A qué recta vertical se aproxima indefinidamente la gráfica de la función sin llegar a tocarla? ¿Hacia qué número tienden las imágenes de la función cuando x tiende a $+\infty$? Razona la respuesta. **(0,5 puntos)**
   - Halla los puntos de corte con los ejes. **(0,5 puntos)**
   - Representa gráficamente la función. **(0,5 puntos)**

3. Representa la siguiente función definida por trozos: **(1 punto)**

$$f(x) = \begin{cases} 2^x + 1 & \text{si} \quad x < 0 \\ 2 & \text{si} \quad 0 \leqslant x < \leqslant 2 \\ \log_2 x + 1 & \text{si} \quad x > 2 \end{cases}$$

4. Contesta a las siguientes cuestiones relacionadas con los logaritmos:

   a) Sabiendo que $\ln x = 0{,}2345$ y que $\ln y = 0{,}3456$, calcula el valor de: $\ln \frac{x \cdot y^3}{\sqrt{y^3}}$ (*dar el resultado exacto, con 5 cifras decimales*). **(1 punto)**

   b) Resuelve la siguiente ecuación logarítmica: $\frac{\log 2 + \log(11 - x^2)}{\log(5-x)} = 2$ **(1 punto)**

5. Dadas las funciones $f(x) = \frac{2}{x-3}$ y $g(x) = 2x + 3$, hallar:

   a) $f \circ g$ **(0,5 puntos)**

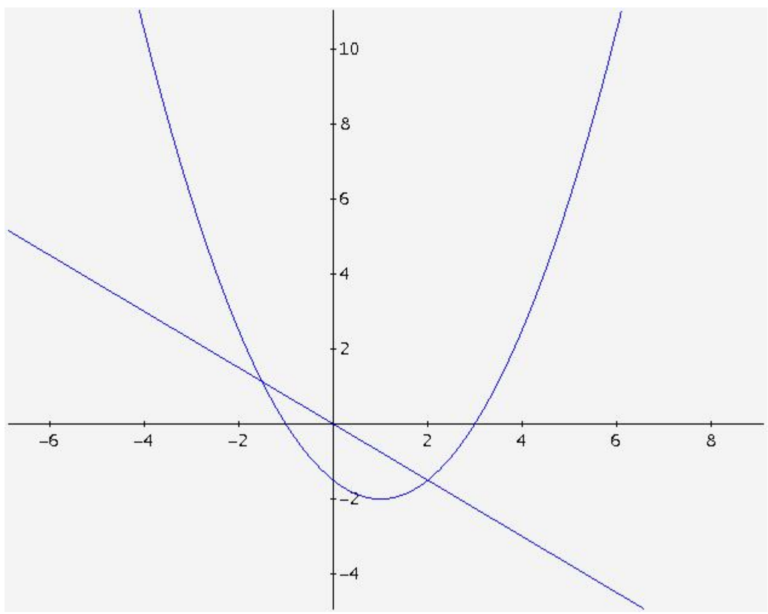
   b) $g \circ f$ **(0,5 puntos)**

   c) Inversa de la función f, es decir, la función f^{-1} **(0,5 puntos)**

Soluciones

1. Vértice: $V(x, y)$: $x = \dfrac{-b}{2a} = \dfrac{1}{2 \cdot (1/2)} = 1$; $y = f(1) = \dfrac{1}{2}1^2 - 1 - \dfrac{3}{2} = -2 \Rightarrow V(1, -2)$

   El punto de corte con el eje Y es $(0, c) = \left(0, \dfrac{3}{2}\right)$. Para hallar los puntos de corte con el eje X resolvemos la ecuación $\dfrac{1}{2}x^2 - x - \dfrac{3}{2} = 0$. Sus soluciones son $x_1 = -1$, $x_2 = 3$. Así pues los puntos de corte con el eje X son: $(-1, 0)$ y (3,0). La representación gráfica de ambas funciones es:

   Para hallar los puntos de corte resolvemos el sistema:

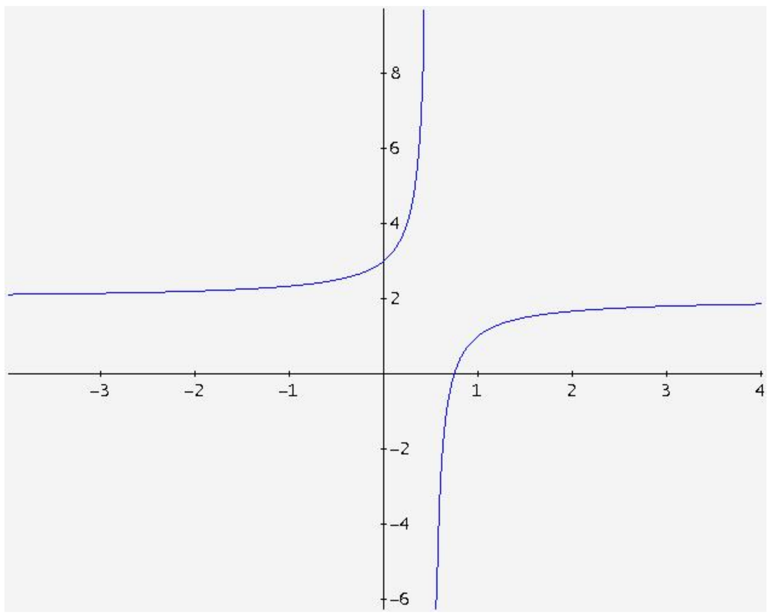
$$\begin{cases} y = \frac{1}{2}x^2 - x - \frac{3}{2} \\ y = -\frac{3}{4}x \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{2}x^2 - x - \frac{3}{2} = -\frac{3}{4}x \Rightarrow 2x^2 - 4x - 6 = -3x \Rightarrow 2x^2 - x - 6 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = -\frac{3}{2} \Rightarrow y_1 = -\frac{3}{4}\left(-\frac{3}{2}\right) = \frac{9}{8} \\ x_2 = 2 \Rightarrow y_2 = -\frac{3}{4} \cdot 2 = -\frac{3}{2} \end{cases}$$

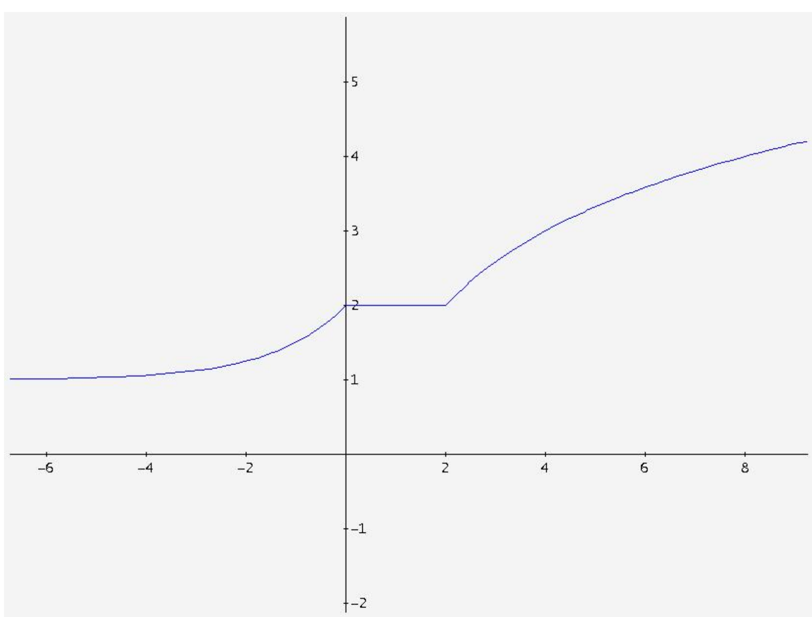
   Entonces los puntos donde se cortan las gráficas de ambas funciones son: $\left(-\dfrac{3}{2}, \dfrac{9}{8}\right)$ y $\left(2, -\dfrac{3}{2}\right)$

2. La gráfica de la función $y = \dfrac{4x - 3}{2x - 1}$ se aproxima indefinidamente a la recta vertical $x = \dfrac{1}{2}$, que es el punto que anula el denominador. Si hacemos x cada vez más grande y positivo se puede apreciar que las imágenes tienden hacia 2, es decir, que la gráfica de la función también se aproxima a la recta horizontal $y = 2$ sin llegar a tocarla.

Para hallar el punto de corte con el eje X hacemos $y = 0 \Rightarrow \dfrac{4x-3}{2x-1} = 0 \Leftrightarrow 4x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{3}{4}$.
Para hallar el punto de corte con el eje Y hacemos $x = 0 \Leftrightarrow y = 3$.
Así, el punto de corte con el eje X es $\left(\dfrac{3}{4}, 0\right)$ y el punto de corte con el eje Y es $(0, 3)$.
La representación gráfica de la función es:



3. Representación gráfica de la función definida por trozos:



4. a) $\ln \frac{x \cdot y^3}{\sqrt{y^3}} = \ln(x \cdot y^3) - \ln(\sqrt{y^3}) = \ln x + \ln y^3 - \ln y^{3/2} = \ln x + 3 \ln y - \frac{3}{2} \ln y =$
$= 0{,}2345 + 3 \cdot 0{,}3456 - 1{,}5 \cdot 0{,}3456 = 0{,}7529$

b) $\frac{\log 2 + \log(11 - x^2)}{\log(5 - x)} = 2 \Leftrightarrow \log 2(11 - x^2) = 2 \log(5 - x) \Leftrightarrow \log(22 - 2x^2) = \log(5 - x)^2$
$\Leftrightarrow 22 - 2x^2 = 25 - 10x + x^2 \Leftrightarrow 3x^2 - 10x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{10 \pm \sqrt{100 - 36}}{6} = \frac{10 \pm 8}{6} \Leftrightarrow$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{18}{6} = \frac{9}{3} = 3 \\ x_2 = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} \end{cases}$$

5. a) $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g\left(\frac{2}{x-3}\right) = 2\frac{2}{x-3} + 3 = \frac{4}{x-3} + 3 = \frac{4}{x-3} + \frac{3x-9}{x-3} = \frac{3x-5}{x-3}$

b) $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(2x+3) = \frac{2}{2x+3-3} = \frac{2}{2x} = \frac{1}{x}$

c) $y = \frac{2}{x-3}$. Despejemos x en función de y:

$$y(x-3) = 2 \Rightarrow xy - 3y = 2 \Rightarrow xy = 3y + 2 \Rightarrow x = \frac{3y+2}{y}$$

Entonces la función inversa de f es $f^{-1}(x) = \frac{3x+2}{x}$