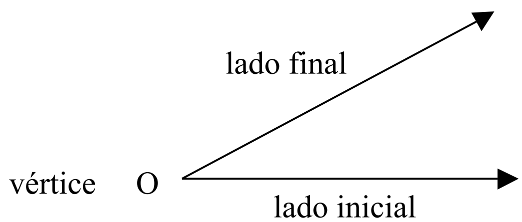
TRIGONOMETRÍA

La palabra "trigonometría" deriva del griego y significa "medida del triángulo". De hecho esta rama de la Matemática se desarrolló inicialmente, estudiando las relaciones entre los ángulos y lados de un triángulo, por ejemplo, las llamadas funciones trigonométricas, las que pueden ser consideradas como funciones cuyos dominios son ángulos o cuyo dominio son los números reales, en este último caso se les conoce como funciones circulares.

1. ÁNGULOS

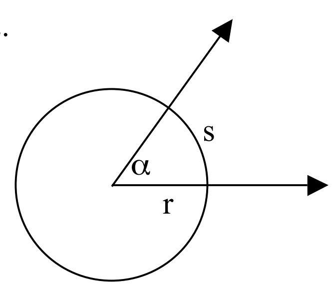
Ángulo (lo abreviaremos con el signo p) es el conjunto de puntos generado por la rotación de una semirrecta alrededor de su extremo, desde una posición inicial ("lado inicial") hasta una final ("lado final"). El extremo de la semirrecta se llama vértice del ángulo.



Un ángulo es positivo si la rotación es en el sentido contrario a los punteros del reloj; en caso contrario es negativo.

Las unidades de medida más frecuentes de un ángulo son : grado sexagesimal y radián. En el sistema sexagesimal el ángulo (completo) obtenido por una rotación completa de la semirrecta en el sentido positivo, tiene una medida de 360º. Así, un grado (1º) es 1/360 por la medida de un ángulo completo. Un grado se divide en 60 partes iguales, llamadas minutos (′), y cada minuto se divide en 60 partes iguales, llamadas segundos (″).

Para definir los radianes se considera el arco s intersectado por el p α sobre una circunferencia unitaria de centro O (O = vértice del p α) y radio r. Se sabe que $\frac{s}{r}$ es una constante que sólo depende de α.



Definición 1.1: Si $r = 1$, la medida en radianes de α es $\alpha^{rad} = s$. Es decir, la medida en radianes de un p α es la medida del arco que α intercepta sobre la circunferencia unitaria.

Si α^{o} es la medida en grados sexagesimales de α, se tiene la siguiente relación:

$$\frac{\alpha^{\text{rad}}}{\pi} = \frac{\alpha^{o}}{180^{o}}$$

Por ejemplo: 1 radián $\approx 57{,}3^{o}$ y $1^{o} \approx 0{,}0175$ radianes.

Las equivalencias más usuales son:

α^{o}	0^{o}	30^{o}	45^{o}	60^{o}	90^{o}	120^{o}	180^{o}	270^{o}	360^{o}
α^{rad}	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$	$2\pi/3$	π	$3\pi/2$	2π

La medida de un ángulo no se limita a valores comprendidos entre 0^{o} y 360^{o} (0 y 2π en radianes), si la semirrecta que genera el ángulo rota alrededor de su extremo en más de una vuelta en el sentido positivo, la medida del ángulo será mayor que 360^{o} (mayor que 2π radianes). Si la rotación es en el sentido de los punteros del reloj, la medida será negativa.

Conclusión: *cada número real es la medida en radianes de un ángulo*.

Nota: Si t es la medida del arco que subtiende un ángulo del centro α en una circunferencia de radio r, se tiene que la medida en radianes de α es $\frac{t}{r}$.

Ejercicios resueltos:

1.- Convertir a radianes: a) 75^{o} , b) -450^{o}, c) $45{,}22^{o}$

Solución: a) $75^{o} = \frac{75\pi}{180} = \frac{5\pi}{12}$ radianes

b) $-450^{o} = -\frac{450\pi}{180} = -\frac{5\pi}{2}$ radianes

c) $45{,}22^{o} \approx 0{,}251\pi$ radianes

2.- Convertir a grados sexagesimales: a) $-\frac{7\pi}{12}$ radianes, b) 1,72 radianes.

Solución: a) $-\frac{7\pi}{12}$ radianes $= -\frac{7\pi}{12}\,\frac{180}{\pi} = -105^{o}$

b) 1,72 radianes $\approx 98{,}55^{o} = 98^{o}\ 33'$

3.- Calcular la medida del arco *s* que subtiende un ángulo del centro α de 135º en una circunferencia de radio $r = 12$ cm.

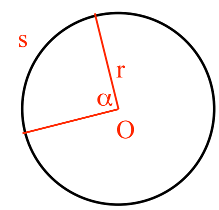
Solución: $\alpha^{rad} = \dfrac{\pi}{180^o}135^o = \dfrac{3\pi}{4}$. Luego $s = r\,\alpha^{rad} = 12\,\dfrac{3\pi}{4} \approx 28{,}3$ cm.

4.- Si el ángulo del centro α subtiende un arco de 4 cm en una circunferencia de diámetro 14 cm, encontrar la medida aproximada de α en radianes y grados.

Solución: $\alpha^{rad} = \dfrac{s}{r} = \dfrac{4}{7}$ radianes $\qquad$ $\alpha^o = \dfrac{4}{7}\cdot\dfrac{180}{\pi} \approx 32{,}74^o = 32^o\,44'$

5.- Expresar el área de un sector circular en términos del radio y el ángulo comprendido.

Solución: Si *r* es el radio de la circunferencia y ***A***, $\boldsymbol{\alpha}$ y ***s*** denotan el área, el ángulo y la longitud del arco del sector circular, de la geometría sabemos que "las áreas de los sectores son entre sí como los arcos comprendidos, es decir,



$$A : \pi r^2 = s : 2\pi r \;\Rightarrow\; A = \tfrac{1}{2}sr \;\Rightarrow\; A = r\,\alpha^{rad}\,r$$
$$\therefore\;\; \mathbf{A = \tfrac{1}{2}r^2\,\alpha^{rad}}$$

6.- El minutero de un reloj mide 12 cm. ¿Qué distancia ha recorrido su extremo al cabo de 20 minutos?

Solución: En 22 minutos, el minutero describe un ángulo $\alpha = 120^o = 2\pi/3$ radianes, luego la distancia recorrida por su extremo es $s = r\,\alpha^{rad} = 12\,\dfrac{2\pi}{3} \approx 25{,}1$ cm.

7.- Una vía férrea ha de describir un arco de circunferencia. ¿Qué radio hay que utilizar si la vía tiene que cambiar su dirección en 25º en un recorrido de 120 m?

Solución: Hay que determinar el radio de una circunferencia sabiendo que el arco subtendido el ángulo del centro $\alpha = 25^o$, mide 120 m.

$\alpha = 25^o = \dfrac{5\pi}{36}$ radianes, por lo tanto, $r = \dfrac{s}{\alpha^{rad}} = \dfrac{120}{(5\pi/36)} = \dfrac{864}{\pi} \approx 275$ m.

8.- Una rueda de 4 pies de diámetro gira a razón de 80 r.p.m. Encontrar la distancia que recorre en un segundo un punto del borde de la rueda.

Solución: 80 r.p.m. $\Leftrightarrow$ $\frac{80 \cdot 2\pi}{60} \text{rad/seg} = \frac{8}{3}\pi$ rad/seg.

Luego, un punto del borde recorre la distancia $s = 2\frac{8\pi}{3} \approx 16{,}76$ pies en un segundo.

Ejercicios propuestos:

1. Una autopista describe un arco de circunferencia de 200 metros de longitud. ¿Cuál es el radio de la circunferencia en cuestión, si el ángulo del centro mide 2 rad?.
2. Una rueda cuyo radio es 2 pies se desplaza rodando 3 pies. ¿En cuántos radianes gira?.
3. Calcule la longitud del arco de un sector circular cuya área de 6 (cm^2) y cuyo ángulo del centro es 171°53'.
4. Encontrar el diámetro de una polea que gira a razón de 360 rpm, movida por una correa de 40 m/sg.
5. Un punto del borde de una rueda hidráulica de 10 (m) de diámetro se mueve con una velocidad lineal de 45 (m/seg). Encontrar la velocidad angular de la rueda en (rad/seg) y en rpm.
6. Un tren se mueve a razón de 12 millas/hr. Por una vía curvilínea de 3000 pies de radio (1 milla = 5280 pies). ¿Qué ángulo recorre en un minuto?.
7. Al amolar ciertas herramientas, la velocidad lineal de la muela no debe exceder de 6000 pies/seg. Encontrar el máximo número de rev/seg. de una muela de 12 pulg. de diámetro.
8. Para ángulos pequeños, el arca y la cuerda interceptados son, aproximadamente, de la misma longitud. Suponiendo que la tierra gira alrededor del Sol sobre una circunferencia de radio 93.000.000 de millas, determínese el diámetro del Sol, si desde la Tierra se le ve bajo un ángulo de 32'.

SOLUCIONES:

1. 100 m.
2. 1,5 rad
3. 6 cm.
4. 2,12 m.
5. 9 rad/seg; 85, 94 rpm
6. 0,352 rad.
7. 1909, 86 rev/seg.
8. 865,683 millas

2. FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

Consideremos en el plano coordenado *xy*, la circunferencia unitaria S^1 (es, decir de radio 1) con centro en el origen. Un punto *P(x, y)* pertenece a la circunferencia unitaria si y sólo si la distancia $\overline{OP} = 1$, es decir, $\sqrt{x^2 + y^2} = 1$. Elevando al cuadrado, tenemos $x^2 + y^2 = 1$.
Estableceremos una correspondencia entre los números reales y puntos de la circunferencia unitaria S^1. Dado cualquier número real θ, sea $W(\theta)$ el punto de S^1, que partiendo del punto $A(1, 0)$, se desplaza sobre la circunferencia en $|\theta|$ unidades (si $\theta > 0$, en el sentido contrario a los punteros del reloj y si $\theta < 0$ en el sentido de los punteros del reloj).

De esta manera se ha definido una función $W : \mathrm{P} \to S^1$, tal que a cada número real θ se le asocia el punto $W(\theta)$ sobre la circunferencia unitaria S^1, esta función se conoce como la función *enrollado*.

En particular W(0) = (1, 0), W(π/2) = (0, 1), W(π) = (-1, 0), W(-π/2) = (0, -1).

La función enrollado W no es inyectiva, ya que como el radio de la circunferencia S^1 es 1, su longitud es 2π, se tiene:

$$W(\theta + 2n\pi) = W(\theta) \quad \forall\, n \in Z \qquad (1)$$

Definición 2.1.: Si *W(θ) = (x, y)* se definen las funciones *seno*, *coseno* y *tangente* como:

1) sen θ = y
2) cos θ = x
3) $\tan\theta = \frac{y}{x}$ si $x \neq 0$

De inmediato se puede ver que el dominio de las funciones seno y coseno es P y su recorrido es [-1, 1]. La función tangente, sin embargo, no está definida cuando *x = 0*. Por lo tanto, el dominio de la función tangente es $\{\theta \in P \mid \theta \neq \frac{\pi}{2} + n\pi,\ n \in Z\}$ y su recorrido es P. Además $\tan\theta = \frac{\text{sen}\,\theta}{\cos\theta}$ si $\theta \neq \frac{\pi}{2} + n\pi,\ n \in Z$

Teorema 2.1.: ∀ θ ∈ P y ∀ n ∈ Z se tiene que:
a) sen (θ + 2nπ) = sen θ
b) cos (θ + 2nπ) = cos θ

Es decir, las funciones seno y coseno son periódicas de período 2π, luego basta conocer los valores de seno y coseno en el intervalo $[0, 2\pi[$, para conocer sus valores en P.

Evidentemente el teorema anterior es válido para la función tangente, con las debidas restricciones en θ, pero en este caso se puede enunciar

Teorema 2.2.: $\forall\, \theta \in P - \{\frac{\pi}{2} + m\pi,\ m \in Z\}$ y $\forall\, n \in Z$, se tiene tan (θ + nπ) = tan θ.

Demostración: W(θ + nπ) = W(θ) si n es par.

Ahora si W(θ) = (x, y) y n es impar, se tiene que W(θ + nπ) = (-x, -y). Luego tan (θ + nπ) = $\frac{-y}{-x} = \frac{y}{x} =$ tan θ.

Es decir, la función tangente es periódica, de período π.

Algunos valores de seno, coseno y tangente:

θ	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$	π	$3\pi/2$
W(θ)	(1, 0)	$(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2})$	$(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$	$(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$	(0, 1)	(-1, 0)	(0, -1)
seno	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1
coseno	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0
tangente	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	N.D.	0	N.D.

(N.D. = no definida)

Tomando en cuenta los signos que tienen las coordenadas de un punto, según el cuadrante en que esté, se puede determinar los signos que tendrán las funciones trigonométricas seno, coseno y tangente, en los diferentes cuadrantes:

Cuadrante en el que está W(θ)	I	II	III	IV
sen θ	+	+	-	-
cos θ	+	-	-	+
tan θ	+	-	+	-

La variación de estas funciones, cuando θ varía de 0 a 2π, es la que se indica en el siguiente cuadro:

Cuadrante	**Variación de**		
	seno	**coseno**	**tangente**
I $(0 < \theta < \pi/2)$	de 0 a 1	de 1 a 0	de 0 a ∞
II $(\pi/2 < \theta < \pi)$	de 1 a 0	de 0 a -1	de $-\infty$ a 0
III $(\pi < \theta < 3\pi/2)$	de 0 a -1	de -1 a 0	de 0 a ∞
IV $(3\pi/2 < \theta < 2\pi)$	de -1 a 0	de 0 a 1	de $-\infty$ a 0

Ahora, para cualquier $\theta \in P$, los puntos W(θ) y W(-θ) están en la misma vertical y son simétricos con respecto al eje x, es decir, si W(θ) = (x, y), entonces W(-θ) = (x, -y). Luego tenemos

Teorema 2.3.:
sen (-θ) = -sen θ $\quad \forall\, \theta \in P$
cos (-θ) = cos θ $\quad \forall\, \theta \in P$
tan (-θ) = -tan θ $\quad \forall\, \theta \neq \frac{\pi}{2} + n\pi,\ n \in Z$

Es decir, las funciones de seno y tangente son *impares*, mientras que la de coseno es una función *par.*

También se definen otras funciones trigonométricas: cotangente, secante y cosecante.

Definición 2.2.: Si $W(\theta) = (x, y)$, se definen:

$\cot\theta = \dfrac{x}{y}$, $y \neq 0$

$\sec\theta = \dfrac{1}{x}$, $x \neq 0$

$\csc\theta = \dfrac{1}{y}$, $y \neq 0$

Observación: $\cot\theta = \dfrac{\cos\theta}{\text{sen}\,\theta}$ si $\text{sen}\,\theta \neq 0$

$\sec\theta = \dfrac{1}{\cos\theta}$ si $\cos\theta \neq 0$

$\csc\theta = \dfrac{1}{\text{sen}\,\theta}$ si $\text{sen}\,\theta \neq 0$

Por diferentes razones es conveniente definir las funciones trigonométricas para ángulos: Sea α un ángulo, cuyas medidas en grados y radianes son α^{o} y α^{rad}, respectivamente.

Definición 2.3: Si f es una función trigonométrica y α es un ángulo se define:

1) $f(\alpha) = f(\alpha^{rad})$
2) $f(\alpha^{o}) = f(\alpha)$

Ejercicios resueltos:

1.- Demostrar que $\forall\ \theta \in P$ se tiene que: $\cos^2\theta + \text{sen}^2\theta = 1$.

Demostración: Sea $P = W(\theta) = (x, y)$ el punto correspondiente en la circunferencia unitaria S^1, entonces la distancia de P al origen es $\overline{OP} = \sqrt{x^2 + y^2} = 1$. Como por definición $x = \cos\theta$ e $y = \text{sen}\,\theta$, elevando al cuadrado se tiene que

$$x^2 + y^2 = (\cos\theta)^2 + (\text{sen}\,\theta)^2 = \mathbf{\cos^2\theta + sen^2\theta = 1}.$$

2.- Si $W(\theta) = (1/3, -\sqrt{8}/3)$, calcular las seis funciones trigonométricas en θ.

Solución: $\text{sen}\,\theta = -\dfrac{\sqrt{8}}{3}$ $\cos\theta = \dfrac{1}{3}$ $\tan\theta = -\sqrt{8}$

$\cot\theta = -\dfrac{\sqrt{8}}{8}$ $\sec\theta = 3$ $\csc\theta = -\dfrac{3\sqrt{8}}{8}$

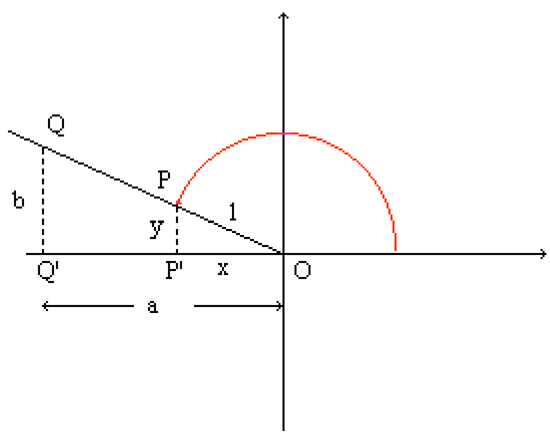
3.- Si sen θ = 12/13 y tan θ < 0, determinar los valores de las funciones trigonométricas restantes.

Solución: θ ∈ II cuadrante, entonces cos θ < 0 y como $\cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta = 1$, se tiene que $\cos\theta = -\sqrt{1-\operatorname{sen}^2\theta}$. Luego

$\cos\theta = -\frac{5}{13}$, $\tan\theta = -\frac{12}{5}$, $\cot\theta = -\frac{5}{12}$, $\sec\theta = -\frac{13}{5}$, $\csc\theta = \frac{13}{12}$

4.- Para un determinado θ ∈ P ocurre que el punto P = W(θ) se encuentra en el recta que une el origen O con el punto Q(a, b). Calcular las funciones trigonométrica en θ.

Solución:



Por semejanza de los triángulos OQ’Q y OPP’ se tienen las proporciones siguientes:

$x : a = 1 : \overline{OQ}$, $y : b = 1 : \overline{OQ}$

Denotando $\overline{OQ}$ por r, se tiene:
sen θ = y = b/r , cos θ = x = a/r , tan θ = y/x = b/a (si a ≠ 0) , cot θ = a/b (si b ≠ 0) , sec θ = r/a (si a ≠ 0) , csc θ = r/b (si b ≠ 0).

Además del triángulo rectángulo OQQ’ se tiene que $\overline{OQ}^2 = \overline{OQ'}^2 + \overline{Q'Q}^2 = a^2 + b^2$, es decir $r = \sqrt{a^2+b^2}$.

5.- Calcular seno, coseno y tangente en: 7π; -8π; $-\frac{21}{2}\pi$.

Solución:

a) $7\pi = \pi + 2\cdot 2\pi$, ∴ sen (7π) = sen π = 0, cos (7π) = cos π = -1, tan (7π) = tan π = 0

b) $-8\pi = 0 - 2\cdot 4\pi$, ∴ sen(-8π) = sen 0 = 0, cos(-8π) = cos 0 = 1, tan(-8π) = tan 0 = 0

c) $-\frac{21}{2}\pi = -\frac{\pi}{2} - 2\cdot 5\pi$, ∴ $\operatorname{sen}(-\frac{21}{2}\pi) = \operatorname{sen}(-\frac{\pi}{2}) = -\operatorname{sen}(\frac{\pi}{2}) = -1$

$\cos(-\frac{21}{2}\pi) = \cos(-\frac{\pi}{2}) = \cos(\frac{\pi}{2}) = 0$

$\tan(-\frac{21}{2}\pi)$ no está definida.

Ejercicios propuestos:

1.- Si cos α = -1/3, calcular las otras funciones trigonométricas y el ángulo α esta en el cuarto cuadrante.

2.- Un punto P del lado final de un ángulo en posición estándar se encuentra en el segmento que une (0, 0) y (8, 15). Construya un gráfico y determine la funciones trigonométrica de:

a) $\theta + \pi/2$ b) $\theta + \pi$ c) $\theta + 3\pi/2$ d) $\theta - \pi$ e) $\theta - \pi/2$,
siendo θ la medida del ángulo en cuestión.

3.- Construya un ángulo α en posición estándar, tal que tan α sea igual a :
a) –1 b) 1,5 c) –8,5
De lo anterior, deduzca un método geométrico que le permita probar que para todo número real *m* existe un ángulo α tal que $\tan \alpha = m$.

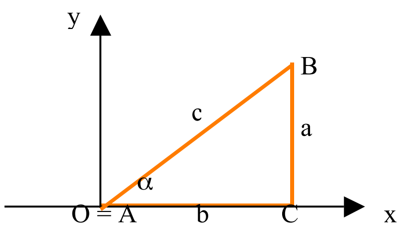
4.- Determinar el dominio y recorrido de las funciones cotangente, secante y cosecante, Graficar dichas funciones.

5.- Demostrar que $\forall$ k $\in$ Z se tiene que: a) $\cos(k\pi) = (-1)^k$ b) $\mathrm{sen}(k\pi) = 0$

3. TRIGONOMETRÍA EN EL TRIÁNGULO RECTÁNGULO

Muchas aplicaciones de la trigonometría están relacionadas con ángulos agudos. Como todo ángulo agudo puede considerarse como ángulo interior de un triángulo rectángulo, es conveniente tener definiciones de las funciones trigonométricas de éstos en términos de los lados del triángulo, independientes de cualquier sistema de coordenadas.

Sean α un ángulo agudo y ABC un triángulo rectángulo en C tal que p BAC = α. Supongamos que colocamos este triángulo en un sistema de coordenadas con α en la posición estándar

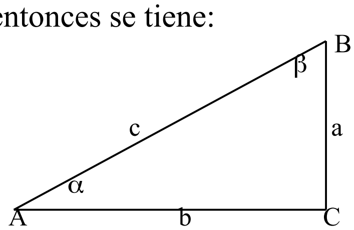


Sean a, b, c las longitudes de los lados del triángulo, por lo tanto, en el sistema de coordenadas, B es el punto (b, a).

Luego

$$\boxed{\begin{aligned} \text{sen } \alpha &= \frac{a}{c} = \frac{\text{cateto opuesto a } \alpha}{\text{hipotenusa}} \\ \cos \alpha &= \frac{b}{c} = \frac{\text{cateto adyacente a } \alpha}{\text{hipotenusa}} \\ \tan \alpha &= \frac{a}{b} = \frac{\text{cateto opuesto a } \alpha}{\text{cateto adyacente a } \alpha} \end{aligned}}$$

Consideremos un triángulo ABC rectángulo en C. Sean α = p BAC y β = p ACB, entonces se tiene:



$$\text{sen } \alpha = \frac{a}{c} = \cos \beta \qquad \cos \alpha = \frac{b}{c} = \text{sen } \beta \qquad \tan \alpha = \frac{a}{b} = \cot \beta$$

Como $\beta = \frac{\pi}{2} - \alpha$, podemos establecer que para todo ángulo agudo α, se cumple:

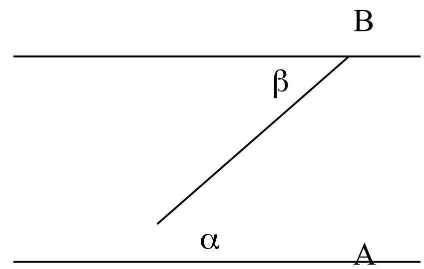
$$\text{sen}(\tfrac{\pi}{2} - \alpha) = \cos \alpha \qquad \cos(\tfrac{\pi}{2} - \alpha) = \text{sen } \alpha \qquad \tan(\tfrac{\pi}{2} - \alpha) = \cot \alpha$$

De lo anterior se puede concluir que si se conocen las funciones trigonométrica $\forall\ \alpha$ con $0 \leq \alpha \leq \pi/4$, también se conocen $\forall\ \alpha$ con $0 \leq \alpha \leq \pi/2$.

Más adelante se demostrará que $\forall\ \alpha \in P$, las funciones trigonométricas en α pueden expresarse en términos de ángulos comprendidos entre 0 y $\pi/4$.

Para resolver algunos de los ejercicios que se presentan a continuación se necesita definir lo siguiente:

Sean λ_1 y λ_2 son dos rectas paralelas. Si $A \in \lambda_1$, $B \in \lambda_2$, α y β son los ángulos indicados en la figura, entonces
α es el ángulo de elevación de B con respecto a A
β es el ángulo de depresión de A con respecto a B



4. IDENTIDADES TRIGONOMÉTRICAS

Las identidades trigonométricas son igualdades que se satisfacen para todos los valores de la(s) variable(s), excepto aquellos para los cuales carezcan de sentido

Teorema 4.1.: Se tiene las siguientes identidades básicas:

1) $\cos^2\alpha + \text{sen}^2\alpha = 1 \qquad \forall\, \alpha \in \mathrm{P}$
2) $1 + \tan^2\alpha = \sec^2\alpha \qquad \forall\, \alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi,\ \ k \in Z$
3) $1 + \cot^2\alpha = \csc^2\alpha \qquad \forall\, \alpha \neq k\pi,\ \ k \in Z$
4) $\tan\alpha = \dfrac{\text{sen}\,\alpha}{\cos\alpha} \qquad \forall\, \alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi,\ \ k \in Z$
5) $\cot\alpha = \dfrac{\cos\alpha}{\text{sen}\,\alpha} \qquad \forall\, \alpha \neq k\pi,\ \ k \in Z$
6) $\sec\alpha = \dfrac{1}{\cos\alpha} \qquad \forall\, \alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi,\ \ k \in Z$
7) $\csc\alpha = \dfrac{1}{\text{sen}\,\alpha} \qquad \forall\, \alpha \neq k\pi,\ \ k \in Z$

Observación: En general, se tiene que $\cos(\alpha - \beta) \neq \cos\alpha - \cos\beta$. Por ejemplo, si $\alpha = \beta = \pi/4$, $\cos(\pi/4 - \pi/4) = \cos 0 = 1$ y $\cos\pi/4 - \cos\pi/4 = 0$.

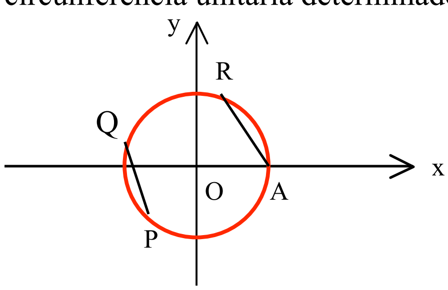
En realidad se tiene:

Teorema 4.2.: $\forall\, \alpha, \beta \in \mathrm{P}$ se cumple que:

8) $\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \text{sen}\,\alpha\,\text{sen}\,\beta$
9) $\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \text{sen}\,\alpha\,\text{sen}\,\beta$

Demostración:

8) Sin pérdida de generalidad podemos suponer que α, β, $(\alpha - \beta) > 0$ y que α, β, $(\alpha - \beta) < 2\pi$. Sean $P = W(\alpha)$, $Q = W(\beta)$, $R = W(\alpha - \beta)$ los puntos sobre la circunferencia unitaria determinados por la función W.



Por definición de las funciones seno y coseno se obtiene que las coordenadas de los puntos son:

$P(\cos\alpha, \text{sen}\,\alpha)$, $Q(\cos\beta, \text{sen}\,\beta)$,
$R(\cos(\alpha - \beta), \text{sen}\,(\alpha - \beta))$.

Ya que los arcos QP y AR son ambos de longitud α - β, las cuerdas $\overline{QP}$ y $\overline{AR}$ también son iguales. Por la fórmula de la distancia se tiene:

$$\overline{AR} = \overline{QP}$$
$$\sqrt{[\cos(\alpha-\beta)-1]^2+[\operatorname{sen}(\alpha-\beta)]^2} = \sqrt{(\cos\alpha-\cos\beta)^2+(\operatorname{sen}\alpha-\operatorname{sen}\beta)^2}$$

Elevando al cuadrado y reordenando

$$\cos^2(\alpha - \beta) + \operatorname{sen}^2(\alpha - \beta) - 2\cos(\alpha - \beta) + 1$$
$$= \cos^2\alpha + \operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\beta + \operatorname{sen}^2\beta - 2\cos\alpha \cos\beta - 2\operatorname{sen}\alpha \operatorname{sen}\beta$$

Ya que $\cos^2(\alpha - \beta) + \operatorname{sen}^2(\alpha - \beta) = \cos^2\alpha + \operatorname{sen}^2\alpha = \cos^2\beta + \operatorname{sen}^2\beta = 1$, se tiene

$$2 - 2\cos(\alpha - \beta) = 2 - 2\cos\alpha \cos\beta - 2\operatorname{sen}\alpha \operatorname{sen}\beta$$
$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta$$

9) $\cos(\alpha + \beta) = \cos[\alpha - (-\beta)] = \cos \alpha \cos(-\beta) + \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen}(-\beta)$

Pero $\cos(-\beta) = \cos \beta$ y $\operatorname{sen}(-\beta) = -\operatorname{sen} \beta$,

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta$$

Corolario:

10) $\cos(\pi/2 - \alpha) = \operatorname{sen} \alpha \quad \forall\ \alpha \in P$
11) $\operatorname{sen}(\pi/2 - \alpha) = \cos \alpha \quad \forall\ \alpha \in P$
12) $\tan(\pi/2 - \alpha) = \cot \alpha \quad \forall\ \alpha \neq k\pi/2,\ \ k \in Z$

Demostración:

10) Usando la identidad 8) se tiene que

$$\cos(\pi/2 - \alpha) = \cos \pi/2 \cos \alpha + \operatorname{sen} \pi/2 \operatorname{sen} \alpha$$
$$= 0 \cdot \cos \alpha + 1 \cdot \operatorname{sen} \alpha$$
$$= \operatorname{sen} \alpha$$

11) $\operatorname{sen}(\pi/2 - \alpha) = \cos[\pi/2 - (\pi/2 - \alpha)] = \cos \alpha$

12) $\tan \alpha = \dfrac{\operatorname{sen}(\pi/2-\alpha)}{\cos(\pi/2-\alpha)} = \dfrac{\cos\alpha}{\operatorname{sen}\alpha} = \cot \alpha$

Teorema 4.3.:

13) $\operatorname{sen}(\alpha + \beta) = \operatorname{sen}\alpha \cos\beta + \cos\alpha \operatorname{sen}\beta$

14) $\operatorname{sen}(\alpha - \beta) = \operatorname{sen}\alpha \cos\beta - \cos\alpha \operatorname{sen}\beta$

15) $\tan(\alpha + \beta) = \dfrac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha \tan\beta}$

16) $\tan(\alpha - \beta) = \dfrac{\tan\alpha - \tan\beta}{1 + \tan\alpha \tan\beta}$

Demostración:

13) $\operatorname{sen}(\alpha + \beta) = \cos[\pi/2 - (\alpha + \beta)] = \cos[(\pi/2 - \alpha) - \beta)]$
$= \cos(\pi/2 - \alpha) \cos\beta + \operatorname{sen}(\pi/2 - \alpha) \operatorname{sen}\beta$
$= \operatorname{sen}\alpha \cos\beta + \cos\alpha \operatorname{sen}\beta$

14) $\operatorname{sen}(\alpha - \beta) = \operatorname{sen}[\alpha + (-\beta)]$
$= \operatorname{sen}\alpha \cos(-\beta) + \cos\alpha \operatorname{sen}(-\beta)$
$= \operatorname{sen}\alpha \cos\beta - \cos\alpha \operatorname{sen}\beta$

15) $\tan(\alpha + \beta) = \dfrac{\operatorname{sen}(\alpha + \beta)}{\cos(\alpha + \beta)} = \dfrac{\operatorname{sen}\alpha \cos\beta + \cos\alpha \operatorname{sen}\beta}{\cos\alpha \cos\beta - \operatorname{sen}\alpha \operatorname{sen}\beta}$

Simplificando por $\cos\alpha \cos\beta$ se tiene

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\dfrac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}\dfrac{\cos\beta}{\cos\beta} + \dfrac{\cos\alpha}{\cos\alpha}\dfrac{\operatorname{sen}\beta}{\cos\beta}}{\dfrac{\cos\alpha}{\cos\alpha}\dfrac{\cos\beta}{\cos\beta} - \dfrac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}\dfrac{\operatorname{sen}\beta}{\cos\beta}} = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha \tan\beta}$$

16) $\tan(\alpha - \beta) = \tan[\alpha + (-\beta)] = \dfrac{\tan\alpha + \tan(-\beta)}{1 - \tan\alpha \tan(-\beta)} = \dfrac{\tan\alpha - \tan\beta}{1 + \tan\alpha \tan\beta}$

Teorema 4.4.: *(Fórmulas del ángulo doble)*

17) $\operatorname{sen}(2\alpha) = 2 \operatorname{sen}\alpha \cos\alpha$

18) $\cos(2\alpha) = \cos^2\alpha - \operatorname{sen}^2\alpha$

19) $\tan(2\alpha) = \dfrac{2\tan\alpha}{1 - \tan^2\alpha}$

Demostración:

17) $\text{sen}\,(2\alpha) = \text{sen}(\alpha + \alpha) = \text{sen}\,\alpha \cos\alpha + \cos\alpha\, \text{sen}\,\alpha = 2\, \text{sen}\,\alpha \cos\alpha$

18) $\cos(2\alpha) = = \cos(\alpha + \alpha) = \cos\alpha \cos\alpha - \text{sen}\,\alpha\, \text{sen}\,\alpha = \cos^2\alpha - \text{sen}^2\alpha$

19) $\tan(2\alpha) = \tan(\alpha + \alpha) = \dfrac{\tan\alpha + \tan\alpha}{1 - \tan\alpha \tan\alpha} = \dfrac{2\tan\alpha}{1 - \tan^2\alpha}$

Observación: Como $\cos^2\alpha + \text{sen}^2\alpha = 1$, también se tiene:

$$\cos(2\alpha) = 2\cos^2\alpha - 1$$
$$\cos(2\alpha) = 1 - 2\,\text{sen}^2\alpha$$

Teorema 4.5.: *(Fórmulas del ángulo medio)*

20) $\text{sen}^2(\alpha/2) = \dfrac{1 - \cos\alpha}{2}$

21) $\cos^2(\alpha/2) = \dfrac{1 + \cos\alpha}{2}$

22) $\tan^2(\alpha/2) = \dfrac{1 - \cos\alpha}{1 + \cos\alpha}$

Demostración:

20) Por la observación anterior $\cos\alpha = 1 - 2\,\text{sen}^2(\alpha/2)$.
Luego, $\text{sen}^2(\alpha/2) = \dfrac{1 - \cos\alpha}{2}$

21) Análogamente, $\cos\alpha = 2\cos^2(\alpha/2) - 1$. Luego, $\cos^2(\alpha/2) = \dfrac{1 + \cos\alpha}{2}$

22) $\tan^2(\alpha/2) = \dfrac{\text{sen}^2(\alpha/2)}{\cos^2(\alpha/2)} = \dfrac{1 - \cos\alpha}{1 + \cos\alpha}$

Teorema 4.6.: *(Fórmulas de producto a suma)*

23) $\text{sen}\,\alpha \cos\beta = \frac{1}{2}[\text{sen}\,(\alpha + \beta) + \text{sen}\,(\alpha - \beta)]$

24) $\cos\alpha\, \text{sen}\,\beta = \frac{1}{2}[\text{sen}(\alpha + \beta) - \text{sen}(\alpha - \beta)]$

25) $\cos\alpha \cos\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)]$

26) $\text{sen}\,\alpha\, \text{sen}\,\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)]$

Demostración:

Para demostrar 23) comenzamos con el lado derecho de la igualdad.

$$\tfrac{1}{2}\,[\text{sen }(\alpha + \beta) + \text{sen }(\alpha - \beta)] = \tfrac{1}{2}\,[(\text{sen }\alpha \cos \beta - \cos \alpha \text{ sen }\beta) + (\text{sen }\alpha \cos \beta - \cos \alpha \text{ sen }\beta)]$$
$$= \tfrac{1}{2}\,[2 \text{ sen }\alpha \cos \beta]$$
$$= \text{sen }\alpha \cos \beta$$

Análogamente se demuestran las identidades 24), 25) y 26).

Teorema 4.7: *(Fórmulas de suma a producto)*

27) $\text{sen }\alpha + \text{sen }\beta = 2 \text{ sen }(\frac{\alpha+\beta}{2}) \cos (\frac{\alpha-\beta}{2})$

28) $\text{sen }\alpha - \text{sen }\beta = 2 \cos (\frac{\alpha+\beta}{2}) \text{ sen }(\frac{\alpha-\beta}{2})$

29) $\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos (\frac{\alpha+\beta}{2}) \cos (\frac{\alpha-\beta}{2})$

30) $\cos \alpha + \cos \beta = -2 \text{ sen }(\frac{\alpha+\beta}{2}) \text{ sen }(\frac{\alpha-\beta}{2})$

Demostración:

Para demostrar 27), basta sustituir $(\alpha + \beta)/2$ por α, y $(\alpha - \beta)/2$ por β en la identidad 23). Entonces

$$\text{sen }(\frac{\alpha+\beta}{2}) \cos (\frac{\alpha-\beta}{2}) = \frac{1}{2}\left[\text{sen}\left(\frac{\alpha+\beta}{2} + \frac{\alpha-\beta}{2}\right) + \text{sen}\left(\frac{\alpha+\beta}{2} - \frac{\alpha-\beta}{2}\right)\right]$$
$$= \tfrac{1}{2}\,(\text{sen }\alpha + \text{sen }\beta)$$

Análogamente, se demuestran las identidades 28), 29) y 30).

Ejercicios resueltos:

1.- Calcular las funciones seno, coseno y tangente en: $(\frac{\pi}{2} + \alpha)$, $(\pi + \alpha)$ y $(\pi - \alpha)$.

Solución: Identidad 13) $\Rightarrow$

$$\text{sen}(\tfrac{\pi}{2} + \alpha) = \text{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) \cos \alpha + \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) \text{sen }\alpha = \cos \alpha$$
$$\text{sen}(\pi + \alpha) = \text{sen }\pi \cos \alpha + \cos \pi \text{ sen }\alpha = -\text{sen }\alpha$$
$$\text{sen}(\pi - \alpha) = \text{sen }\pi \cos \alpha - \cos \pi \text{ sen }\alpha = \text{sen }\alpha$$

Identidad 9) $\Rightarrow$

$$\cos(\tfrac{\pi}{2} + \alpha) = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right)\cos\alpha - \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right)\operatorname{sen}\alpha = -\operatorname{sen}\alpha$$

$$\cos(\pi + \alpha) = \cos\pi\cos\alpha - \operatorname{sen}\pi\operatorname{sen}\alpha = -\cos\alpha$$

$$\cos(\pi - \alpha) = \cos\pi\cos\alpha + \operatorname{sen}\pi\operatorname{sen}\alpha = -\cos\alpha$$

Además, $\tan(\frac{\pi}{2} + \alpha) = \dfrac{sen(\frac{\pi}{2}+\alpha)}{\cos(\frac{\pi}{2}+\alpha)} = \dfrac{\cos\alpha}{-sen\,\alpha} = -\cot\alpha$

$$\tan(\pi + \alpha) = \tan\alpha$$

$$\tan(\pi - \alpha) = \tan(-\alpha) = -\tan\alpha$$

Observación: A las funciones seno y coseno se les llama *cofunciones*. También, la tangente y cotangente son cofunciones, así como también la secante y cosecante.

El ejercicio anterior establece que : *"Las funciones trigonométrica en ($\frac{\pi}{2} \pm \alpha$) difieren de sus cofunciones en α a lo más en un signo. Las funciones trigonométricas en $(\pi \pm \alpha)$ difieren de sus funciones en α a lo más en un signo".*

2.- Demostrar las identidades:

a) $\dfrac{1}{\operatorname{sen}\alpha} - \operatorname{sen}\alpha = \cot\alpha\cos\alpha \qquad \forall\ \alpha \neq k\pi,\ \ k \in Z$

b) $\tan\alpha\operatorname{sen}\alpha = \sec\alpha - \cos\alpha \qquad \forall\ \alpha \neq (2k+1)\,\pi/2,\ \ k \in Z$

Solución:

Utilizando las identidades del Teorema 4.4.1. se transformará uno de los miembros de las igualdades a) y b) en el otro.

a) $\dfrac{1}{\operatorname{sen}\alpha} - \operatorname{sen}\alpha = \dfrac{1-\operatorname{sen}^2\alpha}{\operatorname{sen}\alpha} = \dfrac{\cos^2\alpha}{\operatorname{sen}\alpha} = \dfrac{\cos\alpha}{\operatorname{sen}\alpha}\cos\alpha = \cot\alpha\cos\alpha$

b) $\tan\alpha\operatorname{sen}\alpha = \dfrac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}\operatorname{sen}\alpha = \dfrac{\operatorname{sen}^2\alpha}{\cos\alpha} = \dfrac{1-\cos^2\alpha}{\cos\alpha} = \dfrac{1}{\cos\alpha} - \cos\alpha = \sec\alpha - \cos\alpha$

3.- Para x. $\neq$ $(2k + 1)\ \pi/2$, $k \in Z$, demostrar que : $\dfrac{1 - \tan^2 x}{1 + \tan^2 x} = \cos(2x)$

Solución: Teoremas 4.5.1. y 4.5.4 implican:

$$\frac{1 - \tan^2 x}{1 + \tan^2 x} = \frac{1 - \dfrac{\text{sen}^2 x}{\cos^2 x}}{1 + \dfrac{\text{sen}^2 x}{\cos\ \ x}} = \frac{\cos^2 x - \text{sen}^2 x}{\cos^2 x + \text{sen}^2 x} = \cos^2 x - \text{sen}^2 x = \cos(2x)$$

4.- Demostrar que: $1 + 2\sec^2 x \tan^2 x - \sec^4 x - \tan^4 x = 0 \quad \forall\ x \neq (2k + 1)\ \pi/2, \quad k \in Z$

Solución: El primer miembro se puede factorizar como sigue:

$(1 + \tan^2 x)(1 - \tan^2 x) + (2\tan^2 x - \sec^2 x)\sec^2 x =$
$\sec^2 x\ (1 - \tan^2 x) + (2\tan^2 x - \sec^2 x)\sec^2 x =$
$\sec^2 x\ (1 + \tan^2 x - \sec^2 x) = \sec^2 x\ (\sec^2 x - \sec^2 x) = 0$

5.- Calcular: a) sen$(5\pi/12)$, b) $\cos(3\pi/4)$, c) sen 15º , d) cos 15º , e)tan 15º

Solución:

a) $\dfrac{5\pi}{12} = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\pi}{6}$, luego $\text{sen}\,(\dfrac{5\pi}{12}) = \text{sen}\left(\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\pi}{6}\right)$

$$= \text{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\text{sen}\left(\frac{\pi}{6}\right)$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3} + 1)$$

b) $\cos\left(\dfrac{3\pi}{4}\right) = \cos\left(\dfrac{\pi}{2} + \dfrac{\pi}{4}\right) = -\text{sen}\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

c) sen 15º = sen(45º - 30º) = sen 45º cos 30º - cos 15º sen 30º = $\dfrac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3} - 1)$

d) cos 15º = cos(45º - 30º) = cos 45º cos 30º + sen45º sen 45º = $\dfrac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3} + 1)$

e) tan 15º = $\dfrac{\text{sen}\,15^\circ}{\cos 15^\circ} = \dfrac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{3} + 1}$

6.- Calcular seno, coseno y tangente de 22,5º y cos 112º 30’

Solución: 22,5º = 45º/2, luego

$$\text{sen } 22{,}5º = \sqrt{\frac{1-\cos 45º}{2}} = \sqrt{\frac{1-\sqrt{2/2}}{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}$$

$$\cos 22{,}5º = \sqrt{\frac{1+\cos 45º}{2}} = \sqrt{\frac{1+\sqrt{2/2}}{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}$$

$$\tan 22{,}5º = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{\sqrt{2+\sqrt{2}}} = \frac{\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}-2}{2} = \sqrt{2} - 1$$

112º 30’ = 90º + 22º 30’ = 90º + 22,5º, luego

$$\cos 112º\ 30’ = -\text{sen } 22{,}5º = -\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$$

7.- Expresar sen (3α) y cos (3α) en términos de sen α y cos α.

Solución:

$$\begin{aligned}
\text{sen }(3\alpha) &= \text{sen}(2\alpha + \alpha) = \text{sen } 2\alpha \cos \alpha + \cos 2\alpha \text{ sen } \alpha \\
&= 2 \text{ sen } \alpha \cos^2\alpha + \cos^2\alpha \text{ sen } \alpha - \text{sen}^3\alpha \\
&= 3 \text{ sen } \alpha\ (1 - \text{sen}^2\alpha) - \text{sen}^3\alpha \\
&= 3 \text{ sen } \alpha - 4 \text{ sen}^3\alpha
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\cos (3\alpha) &= \cos(2\alpha + \alpha) = \cos 2\alpha \cos \alpha - \text{sen } 2\alpha \text{ sen } \alpha \\
&= \cos^3\alpha - \text{sen}^2\alpha \cos \alpha - 2 \text{ sen}^2\alpha \cos \alpha \\
&= \cos^3\alpha - 3 \text{ sen}^2\alpha \cos \alpha \\
&= 4 \cos^3\alpha - 3 \cos \alpha
\end{aligned}$$

8.- Calcular sen 18º.

Solución: Si $\alpha = 18º$, se tiene que $5\alpha = 90º$ y luego, $2\alpha = 90º - 3\alpha$

$\text{sen }(2\alpha) = \cos (3\alpha)$

$2 \text{ sen } \alpha \cos \alpha = 4 \cos^3\alpha - 3 \cos \alpha \quad / : \cos \alpha$

$2 \text{ sen } \alpha = 4 \cos^2\alpha - 3 \ \Rightarrow\ 2 \text{ sen } \alpha = 1 - 4 \text{ sen}^2\alpha \ \Rightarrow\ 4 \text{ sen}^2\alpha + 2 \text{ sen } \alpha - 1 = 0 \ \Rightarrow$

$$\text{sen } \alpha = \frac{-2 \pm \sqrt{4+16}}{8} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{4}$$

Como $\alpha \in$ I cuadrante, se tiene que $\text{sen } \alpha > 0$, luego $\text{sen } 18º = \dfrac{\sqrt{5}-1}{4}$

9.- Demostrar la identidad $\frac{1+\cos\beta+\cos\frac{\beta}{2}}{sen\,\beta+sen\,\frac{\beta}{2}}=\cot\left(\frac{\beta}{2}\right)$ para los β donde tiene sentido.

Solución:

$$\frac{1+\cos\beta+\cos\frac{\beta}{2}}{\operatorname{sen}\beta+\operatorname{sen}\frac{\beta}{2}}=\frac{1+2\cos^2\frac{\beta}{2}-1+\cos\frac{\beta}{2}}{2\operatorname{sen}\frac{\beta}{2}\cos\frac{\beta}{2}+\operatorname{sen}\frac{\beta}{2}}=\frac{\cos\frac{\beta}{2}\,(2\cos\frac{\beta}{2}+1)}{\operatorname{sen}\frac{\beta}{2}(2\cos\frac{\beta}{2}+1)}=\cot\frac{\beta}{2}$$

10.- Calcular los valores de:

a) cos 15º · cos 75º b) sen 15º · sen 75º c) cos 15º · sen 75º

Solución:

a) $$\cos 15^\circ\cdot\cos 75^\circ=\frac{1}{2}[\cos(75^\circ+15^\circ)+\cos(75^\circ-15^\circ)]=$$
$$=\frac{1}{2}[\cos 90^\circ+\cos 60^\circ]=\frac{1}{2}\cos 60^\circ=\frac{1}{4}$$

b) $$\operatorname{sen} 15^\circ\cdot\operatorname{sen} 75^\circ=\frac{1}{2}[\cos(75^\circ-15^\circ)-\cos(75^\circ+15^\circ)]=$$
$$=\frac{1}{2}\cos 60^\circ=\frac{1}{4}$$

c) $$\cos 15^\circ\cdot\operatorname{sen} 75^\circ=\frac{1}{2}[\operatorname{sen}(75^\circ+15^\circ)+\operatorname{sen}(75^\circ-15^\circ)]=$$
$$=\frac{1}{2}\left[1+\frac{\sqrt{3}}{2}\right]=\frac{2+\sqrt{3}}{4}$$

11.- Demostrar que: $\frac{\cos(5x)-\cos x}{sen(5x)-sen\,x}=-\tan(3x)$

Solución: $\frac{\cos(5x)-\cos x}{sen(5x)-sen\,x}=\frac{-2\,sen(3x)sen(2x)}{2\cos(3x)sen(2x)}=-\tan(3x)$

La identidad no es válida si sen (5x) – sen x = 0 $\Rightarrow$ 2 cos (3x) sen (2x) = 0 $\Rightarrow$ cos (3x) = 0 $\vee$ sen (2x) = 0, por lo tanto, con cos (3x) = 0 $\Rightarrow [3x=(2k+1)\frac{\pi}{2} \Rightarrow x=(2k+1)\frac{\pi}{6}], k\in Z$ $\vee$ con sen (2x) = 0 $\Rightarrow [2x=k\pi \Rightarrow x=k\frac{\pi}{2}], k\in Z$

12.- Calcular el valor de: cos 20º + cos 100º + cos 140º

Solución:
$$\begin{aligned}\cos 20^\circ + \cos 100^\circ + \cos 140^\circ &= \cos 20^\circ + 2\cos 120^\circ \cdot \cos 20^\circ\\ &= \cos 20^\circ\,(1 + 2\cos 120^\circ)\\ &= \cos 20^\circ\,(1 - 2\,\mathrm{sen}\, 30^\circ)\\ &= \cos 20^\circ\,(1 - 2\cdot \tfrac{1}{2}) = 0\end{aligned}$$

13.- Probar que:

$$\mathrm{sen}(\beta + \gamma - \alpha) + \mathrm{sen}(\gamma + \alpha - \beta) + \mathrm{sen}(\alpha + \beta - \gamma) - \mathrm{sen}(\alpha + \beta + \gamma) = 4\,\mathrm{sen}\,\alpha\,\mathrm{sen}\,\beta\,\mathrm{sen}\,\gamma$$

Solución: Por teorema 4.4.7., l primer miembro la igualdad se transforma como sigue:

$$\begin{aligned}2\,\mathrm{sen}\,\gamma\cos(\beta - \alpha) + 2\cos(\beta + \alpha)\,\mathrm{sen}\,(-\gamma) &= 2\,\mathrm{sen}\,\gamma\,[\cos(\beta - \alpha) - \cos(\beta + \alpha)]\\ &= 2\,\mathrm{sen}\,\gamma\,[-2\,\mathrm{sen}\,\beta\,\mathrm{sen}(-\alpha)]\\ &= 4\,\mathrm{sen}\,\alpha\,\mathrm{sen}\,\beta\,\mathrm{sen}\,\gamma\end{aligned}$$

14.- Demostrar que si $x + y + z = \pi$, entonces

$$\mathrm{sen}\,(2x) + \mathrm{sen}\,(2y) + \mathrm{sen}\,(2z) = 4\,\mathrm{sen}\,x\,\mathrm{sen}\,y\,\mathrm{sen}\,z$$

Solución: $x + y + z = \pi \Leftrightarrow x + y = \pi - z$, luego $\mathrm{sen}(x + y) = \mathrm{sen}\,z$. Entonces

$$\begin{aligned}\mathrm{sen}\,(2x) + \mathrm{sen}\,(2y) + \mathrm{sen}\,(2z) &= 2\,\mathrm{sen}\,z\cos(x - y) + 2\,\mathrm{sen}\,z\cos z\\ &= 2\,\mathrm{sen}\,z\,[\cos(x - y) + \cos z]\\ &= 2\,\mathrm{sen}\,z \cdot 2\cos\left(\frac{x-y+z}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{x-y-z}{2}\right)\\ &= 4\cos\left(\tfrac{\pi}{2} - y\right)\cdot\cos\left(\tfrac{\pi}{2} - x\right)\cdot\mathrm{sen}\,z\\ &= 4\,\mathrm{sen}\,x\,\mathrm{sen}\,y\,\mathrm{sen}\,z\end{aligned}$$

Ejercicios propuestos:

1. Demuestre las siguientes identidades:

a) $tg0 + \cot 0 = \sec 0 + cs0$

b) $sen0 \cos 0 \sec 0 \csc 0 = 1$

c) $\frac{1}{1+sen0} + \frac{1}{1-sen0} = 2\sec^2 0$

d) $\frac{\cot^2 0 - 1}{1+\cot^2 0} = 2\cos^2 0 - 1$

e) $\frac{sen0}{1+\cos 0} + \frac{1+\cos 0}{sen0} = 2\cos c0$

f) $\frac{\cot^2 0 - 1}{1+\cot^2 0} = 2\cos^2 0 - 1$

g) $\frac{2sen^2 0 - 1}{sen0 \cos 0} = tg0 - \cot 0$

h) $\frac{\cos 0 - sen0}{\cos 0 + sen0} = \frac{\cot 0 - 1}{\cot 0 + 1}$

i) $\frac{\sec^2 0}{1+sen0} = \frac{\sec^2 0 \sec 0 \ \mathrm{tg}0}{\cos^2 0}$

j) $\frac{\sec 0 + tg\ 0}{\cos 0 - \mathrm{tg}0 - \sec 0} = -\csc 0$

k) $(1-\cos\ x)(1+\tan^2 x) = \tan^2 \mathrm{x}$

l) $\frac{\tan^2 x}{1+\tan^2 x} \cdot \frac{1+\cot^2 x}{\cot^2 x} = sen^2 x \sec^2 x$

ll) $sen^2 x \cot^2 x + sen^2 x = 1$

m) $\sec x - \cot gx = tgx \cdot \csc^2 x \cdot \mathrm{cosx}$

n) $\sec^4 x - 1 = 2\tan^2 x + \tan^4 x$

ñ) $(\tan x + \sec x)^n = \frac{1+senx}{1-senx}$

o) $\tan^2 x - \cot^2 x = \sec^2 x - \csc^2 x$

p) $\frac{2senx\ \mathrm{cosx} - \mathrm{cosx}}{1 - \mathrm{sen\ x} + \mathrm{sen}^2 x - \cos^2 x} = \cot x$

q) $\tan\alpha + \cot\alpha = \tan$

r) $(sen + \cos\beta + \cos\alpha\ sen\beta) + (\cos\alpha\ \cos\beta - \mathrm{sen}\alpha\ \mathrm{sen}\beta) = 1$

s) $\cot^2\alpha + \cot^2\alpha = \csc^4\alpha - \csc^2\alpha$

5. FUNCIÓN SINUSOIDAL

Definición 5.1.: Una función real con dominio P de la forma f(x) = A sen(Bx + C), donde A, B y C son constantes, se llama *función sinusoidal*.

Consideremos primero la función f(x) = A sen x.

Como $-1 \le \mathrm{sen\ x} \le 1$, se tiene que $-|A| \le A\ \mathrm{sen\ x} \le |A|$.

Definición 5.2.: Se define la *amplitud* de una función periódica como la mitad de la diferencia entre sus valores máximo y mínimo.

Por lo tanto, la amplitud de f(x) = A sen x es $|A|$. El factor A actúa como un expansión vertical si $|A| > 1$ y como contracción vertical si $|A| < 1$.

A continuación consideremos la función $f(x) = \text{sen}(Bx)$, con $B > 0$. Ya que $y = \text{sen } x$ tiene período 2π, la función seno completa un ciclo u onda cuando x varía de 0 a 2π. Entonces (Bx) completará un ciclo cuando (Bx) varía de $(Bx) = 0$ a $(Bx) = 2\pi$, es decir, cuando x varía de 0 a $\frac{2\pi}{B}$.

Por lo tanto, el período de $f(x) = \text{sen}(Bx)$, es $\frac{2\pi}{|B|}$

Observación: Siempre se puede suponer $B > 0$, pues si $B < 0$ se tiene que $\text{sen}(Bx) = -\text{sen}((-B)x)$. El factor B actúa como expansión horizontal si $0 < B < 1$ y como contracción horizontal si $B > 1$.

Finalmente consideremos la función $f(x) = A\,\text{sen}(Bx + C)$, f(x) completa un ciclo cuando $Bx + C$ varía de 0 a 2π, es decir, cuando x varía de $x = -\frac{C}{B}$ a $x = \frac{2\pi}{B} - \frac{C}{B}$.

El número real $-\frac{C}{B}$ se llama *ángulo de fase* e indica que el gráfico de la función está corrido hacia la derecha en $\left|\frac{C}{B}\right|$ unidades si $-\frac{C}{B} > 0$ o hacia la izquierda si $-\frac{C}{B} < 0$, con respecto al gráfico de $f(x) = A\,\text{sen}(Bx)$.

Ejemplo: $f(x) = 3\,\text{sen}(4x + \pi)$

En este caso se tiene que: Amplitud $= 3$

Período $= \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$

Ángulo de fase $= -\frac{\pi}{4}$

Consideremos ahora la función definida por $y = a\,\text{sen } x + b\cos x$, donde $a, b \neq 0$. Esta función puede ser escrita en la forma $y = A\,\text{sen}(x + C)$, donde $A = \sqrt{a^2 + b^2}$, $B = 1$ y C es tal que $\tan C = \frac{b}{a}$.

En efecto, $y = \sqrt{a^2 + b^2}\left[\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\operatorname{sen} x + \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos x\right]$

Como $-1 \leq \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}, \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \leq 1 \quad \wedge \quad \left(\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2 + \left(\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2 = 1$, sea C

tal que $\cos C = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ y $\operatorname{sen} C = \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$

Ejercicios resueltos:

1.- Escribir en la forma $y = A \operatorname{sen}(x + C)$ la función:

a) $y = \operatorname{sen} x + \sqrt{3} \cos x$
b) $y = - \operatorname{sen} x + \sqrt{3} \cos x$

Solución:

a) $A = \sqrt{1+3} = 2$, $\cos C = \dfrac{1}{2}$ y $\operatorname{sen} C = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, luego $C = \dfrac{\pi}{3}$

$$y = 2 \operatorname{sen}(x + \pi/3)$$

b) $A = 2$, $\cos C = -\dfrac{1}{2}$ y $\operatorname{sen} C = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, luego $C = \dfrac{2\pi}{3}$

$$y = 2 \operatorname{sen}(x + 2\pi/3)$$

2.- Calcular las amplitudes, períodos y ángulos de fase de las funciones:

a) $y = 3 \operatorname{sen}(4x + 1)$ b) $y = 5 \operatorname{sen}(2x - x/3)$

Solución:

a) Amplitud = 3 , período = $\pi/2$, ángulo de fase = _

b) Amplitud = 5 , período = 6π , ángulo de fase = - 6.

Ejercicios propuestos:

1.- Expresar en la forma $A \operatorname{sen}(x + C)$, con $C \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, las expresiones siguientes:

a) 5 sen $x + 12\cos x$ b) 4 sen $x - 3\cos x$ c) sen $x + \cos x$

2.- Dada $y = \cos(\pi - 2x) - \sqrt{3}\,\cos(2x + \pi/2)$, encontrar su amplitud, período, ángulo de fase y representar un período de la función.

3.- Determinar todos los puntos donde la función $f(x) = $ sen $(2x) + \cos(2x)$ alcanza su máximo valor, su mínimo valor y cuando se anula.

6. ECUACIONES TRIGONOMÉTRICAS

El apelativo *ecuación trigonométrica* se aplica a toda ecuación en que la(s) variable(s) figura(n) sólo como argumento(s) de funciones trigonométricas. Así, 2 sen $(4x) + 5 = \sec x$ es una de tales ecuaciones, mientras que $\tan x - x^2 = 1$ no lo es.

Una ecuación trigonométrica puede no tener soluciones, como sucede con 2 sen $x + 3 = 0$, (pues de aquí se sigue que sen $x = - 3/2$, pero $- 1 \leq$ sen $x \leq 1$, $\forall\ x \in P$). En cambio si la ecuación tiene una solución, tiene infinitas soluciones (debido a la periodicidad de las funciones trigonométricas).

Definición 6.1.: Una solución x_0 de una ecuación trigonométrica se dice *básica* si $x_0 \in [0, 2\pi[$.

Es claro, entonces que, el conjunto de soluciones de una ecuación trigonométrica se obtiene sumando a las soluciones básicas múltiplos enteros del período.

Ejercicios resueltos:

1.- Resolver la ecuación $\tan x = 1$.

Solución: Ya que $\tan(\pi/4) = \tan(\pi/4 + \pi) = 1$, las soluciones básicas son $\pi/4$ y $5\pi/4$. Luego el conjunto de soluciones es $\{x = \pi/4 + k\pi, k \in Z\}$.

2.- Resolver la ecuación 2 sen $x + 1 = 0$

Solución: La ecuación se puede escribir sen $x = -$ _. Como sen $\pi/6 =$ _ , sen$(\pi + x) = -$ sen x y sen$(2\pi - x) = -$ sen x , se tiene que $\pi + \pi/6$ y $2\pi - \pi/6$ son las soluciones básicas. Luego sus soluciones están definidas por:

$$x = 7\pi/6 + 2k\pi \quad \vee \quad x = 11\pi/6 + 2k\pi, \quad k \in Z$$

3.- Resolver la ecuación $\tan x - 2 \operatorname{sen} x = 0$

Solución:
Restricciones: $\cos x \neq 0 \Rightarrow x \neq (2k+1)\pi/2 ,\ k \in Z$

$\tan x - 2 \operatorname{sen} x = 0 \;\Leftrightarrow\; \dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos x} - 2 \operatorname{sen} x = 0 \;\Leftrightarrow\; \operatorname{sen} x \left(\dfrac{1}{\cos x} - 2\right) = 0.$

Luego, $\operatorname{sen} x = 0 \quad \vee \quad \dfrac{1}{\cos x} - 2 = 0.$

$\operatorname{sen} x = 0 \;\Rightarrow\; x = k\pi,\ \ k \in Z$

$\dfrac{1}{\cos x} - 2 = 0 \;\Rightarrow\; x = \pi/3 + 2k\pi \;\vee\; x = 5\pi/3 + 2k\pi,\ \ k \in Z$

Finalmente las soluciones de la ecuación son:

$$x = k\pi \;\vee\; x = \pi/3 + 2k\pi \;\vee\; x = 5\pi/3 + 2k\pi,\ \ k \in Z$$

4.- Encontrar todas las soluciones básicas de la ecuación $2 \cos^2 x - \cos x - 1 = 0$.

Solución: Factorizando el primer miembro se tiene:

$$(2 \cos x + 1)(\cos x - 1) = 0$$

Luego, se tiene: $2 \cos x + 1 = 0 \quad \vee \quad \cos x - 1 = 0$.

Es decir, $\cos x = - 1/2 \quad \vee \quad \cos x = 1$.

Las soluciones de $\cos x = - 1/2$ en el intervalo $[0, 2\pi[$ son $x = 2\pi/3 \;\vee\; x = 4\pi/3$; la única solución de $\cos x = 1$ en el intervalo $[0, 2\pi[$ es $x = 0$. Por lo tanto las soluciones básicas de la ecuación original son

$$x = 2\pi/3 \ ,\ x = 4\pi/3 \ ,\ x = 0$$

5.- Resolver $3 \sec^2 x + 2 - 8 \tan x = 0$.

Solución: Introduciendo la identidad $1 + \tan^2 x = \sec^2 x$, se obtiene:
$3 \tan^2 x - 8 \tan x + 5 = 0$. Luego

$$\tan x = \frac{8 \pm \sqrt{64 - 60}}{6} = \begin{cases} 1 \\ 5/3 \end{cases}$$

Las soluciones expresadas en grados son:

$x = 45^\circ + k\,180^\circ \;\vee\; x \approx 59^\circ 2' + k\,180^\circ \ ,\ \ k \in Z$

6.- Resolver la ecuación $\sqrt{2}$ sen (2x) + 1 = 0.

Solución: Si y = 2x , se obtiene sen y = - 1/$\sqrt{2}$. Las soluciones de esta ecuación son

$$y = \frac{5\pi}{4} + 2k\pi \quad , \quad \frac{7\pi}{4} + 2k\pi \quad , \quad k \in Z$$

Luego, las soluciones de la ecuación original son:

$$x = \frac{5\pi}{8} + 2k\pi \quad , \quad \frac{7\pi}{8} + 2k\pi \quad , \quad k \in Z$$

7.- Resolver la ecuación sen (7x) + sen (5x) = 0.

Solución:
La ecuación se escribe 2 sen (6x) cos x = 0, esto es, sen (6x) = 0 $\vee$ cos x = 0.

Las soluciones son: x = kπ/6 , (2k + 1)π/2 , $k \in Z$.

8.- Encontrar las soluciones de sen x = 1 + cos x.

Solución: La ecuación se puede escribir como sen x – cos x = 1 y el primer miembro de ésta como A sen(x + C) , donde, en este caso, A = $\sqrt{2}$ y C = - π/4. Así la ecuación se reduce a

$$\sqrt{2}\ \text{sen}\,(x - \pi/4) = 1, \text{ o bien, } \text{sen}\,(x - \pi/4) = 1/\sqrt{2}$$

De aquí se tiene $x - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \quad , \quad \frac{3\pi}{4} + 2k\pi \quad , \quad k \in Z$, lo que es equivalente a

$$x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \quad , \quad (2k + 1)\,\pi \quad , \quad k \in Z.$$

9.- Resolver tan(x - π/4) = cot (3x).

Solución: La ecuación se puede escribir como tan(x - π/4) = tan(π/2 – 3x).

Como la función tangente es inyectiva en su período y éste es π, se tiene que:

x - π/4 = π/2 – 3x + kπ , los que es equivalente a $x = \frac{3\pi}{16} + k\frac{\pi}{4}$, $k \in Z$.

10.- Resolver la ecuación csc (2x) – cot (2x) = 2 sen x cos x.

Solución: Restricción sen (2x) $\neq$ 0 , es decir, x $\neq$ kπ/2 , k $\in$ Z.

La ecuación se escribe $\frac{1}{sen(2x)} - \frac{\cos(2x)}{sen(2x)}$ = sen (2x) $\Rightarrow$ 1 – cos 2x = $sen^2 2x$ $\Rightarrow$
1 – cos (2x) = 1- $\cos^2(2x)$ $\Rightarrow$ cos (2x) (cos (2x) – 1) = 0 $\Rightarrow$
cos (2x) = 0 $\vee$ cos (2x) = 1
cos (2x) = 0 $\Rightarrow$ 2x = (2k +1)π/2 $\Rightarrow$ x = (2k +1)π/4 , k $\in$ Z.
cos (2x) = 1 $\Rightarrow$ 2x = 2kπ $\Rightarrow$ x = kπ , k $\in$ Z.

Pero x = kπ , k $\in$ Z, no es solución de la ecuación (restricción). Por lo tanto, las soluciones son

$$x = (2k+1)\pi/4 \ , \ k \in Z.$$

7. FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS INVERSAS

Definición 7.1.: Sean f una función y A un conjunto contenido en el dominio de f. Entonces la *restricción* de f en A es la función g con dominio en A tal que g(x) = f(x), $\forall$ x $\in$ A. La función g se denota por $f_{|A}$.

Consideremos la función sen : P → [-1, 1], como es periódica no es biyectiva y, por lo tanto, no tiene inversa. Sin embargo se puede resolver este problema observando que su restricción a $\left[\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + (k+1)\pi\right]$ es biyectiva, $\forall$ k $\in$ Z.

Las funciones inversas que se obtienen se llaman *ramas del arco seno*. Si Sen denota la restricción de sen al intervalo $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, entonces Sen^{-1} s llama *la rama principal del arco seno* y se denota por *Arcsen*. Es decir:

Definición 7.2.: La rama principal del arco seno es la función

$$\text{Arcsen} : [-1, 1] \rightarrow \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

$$\text{Arcsen } x = y \ \Leftrightarrow \ x = \text{sen } y \ \text{ si } \ -\pi/2 \leq y \leq \pi/2$$

Observación:

1) sen (Arcsen x) = x $\forall$ x $\in$ [-1, 1]
2) Arcsen (sen x) = x $\forall$ x $\in$ $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

3) Arcsen es no periódica,
4) Arcsen es impar y
5) Arcsen es creciente.

También se define

Definición 7.3.: La rama principal del Arco coseno es la función

$$\text{Arccos} : [-1, 1] \to [0, \pi]$$

$$\text{Arccos } x = y \quad \Leftrightarrow \quad x = \cos y \quad \text{si} \quad 0 \leq y \leq \pi$$

Observación:

1) Arccos (cos x) = x $\quad \forall\, x \in [-1, 1]$
2) cos (Arccos x) = x $\quad \forall\, x \in [0, \pi]$
3) Arccos es no periódica y
4) Arccos es decreciente.

Definición 7.4.: La rama principal del Arco tangente es la función

$$\text{Arctan} : \text{IR} \to \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$$

$$\text{Arctan } x = y \iff x = \tan y \quad \text{si } -\pi/2 < y < \pi/2$$

Observación:

1) $\tan(\text{Arctan } x) = x \quad \forall\, x \in \text{IR}$
2) $\text{Arctan}(\tan x) = x \quad \forall\, x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$
3) Arctan es no periódica,
4) Arctan es impar y
5) Arctan es creciente.

Ejercicios resueltos:

1.- ¿Cuál es el valor de Arcsen(- _)?

Solución: Arcsen(- _) = x $\iff$ sen x = - _ con $x \in [-\pi/2, \pi/2]$ $\iff$ $x = -\pi/6$

$\therefore$ Arcsen(- _) = $-\pi/6$

2.- Calcular el valor de Arcsen (sen π).

Solución: Arcsen (sen π) = Arcsen 0.

y = Arcsen 0 $\iff$ sen y = 0 con $y \in [-\pi/2, \pi/2]$ $\iff$ y = 0

$\therefore$ Arcsen (sen π) = 0

Observación: Arcsen (sen π) $\neq \pi$ pues $\pi \notin [-\pi/2, \pi/2]$.

3.- Expresar en términos de x el valor de Arcsen (sen x) si $x \in [\pi/2, 3\pi/2]$.

Solución: Sea $y = \pi - x$, entonces $y \in [-\pi/2, \pi/2]$ y se tiene:

Arcsen (sen x) = Arcsen (sen(π - y)) = Arcsen(- sen y) = Arcsen (sen(- y))

Como $-y \in [-\pi/2, \pi/2]$, Arcsen (sen(- y)) = -y = π - x

$\therefore$ Arcsen (sen x) = π - x si $x \in [\pi/2, 3\pi/2]$

4.- Demostrar que Arccos x + Arc sen x = $\pi/2$ $\quad \forall\, x \in [-1, 1]$.

Solución: Sea $x \in [-1, 1]$ y $\omega = \pi/2 - \text{Arcsen } x$, entonces $\text{Arcsen } x = \pi/2 - \omega$. Aplicando la función seno a ambos miembros de esta última igualdad, se tiene

$$\text{sen}(\text{Arcsen } x) = \text{sen}(\pi/2 - \omega) \quad \Leftrightarrow \quad x = \cos\omega$$

Ahora, $-\pi/2 \le \text{Arcsen } x \le \pi/2 \quad \Rightarrow \quad 0 \le \pi/2 - \text{Arcsen } x \le \pi \quad \Rightarrow \quad \omega = \text{Arccos } x$,

$$\therefore \quad \text{Arccos } x + \text{Arc sen } x = \pi/2 \quad \forall\, x \in [-1, 1]$$

5.- Encontrar el valor exacto de Arcsen $(\tan(\pi/4))$.

Solución: $\text{Arcsen}(\tan(\pi/4)) = \text{Arcsen } 1 = y \quad \Leftrightarrow \quad \text{sen } y = 1$ con $y \in [-\pi/2, \pi/2]$.

$$\therefore \quad \text{Arcsen}(\tan(\pi/4)) = \pi/2$$

6.- Calcular el valor de $A = \text{sen}(\text{Arcsen}(2/3) + \text{Arcos}(1/3))$.

Solución: $A = \text{sen}(\text{Arcsen } 2/3)\cos(\text{Arccos } 1/3) + \cos(\text{Arcsen } 2/3)\,\text{sen}(\text{Arccos } 1/3)$

$$= \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3} + \cos(\text{Arcsen } 2/3)\,\text{sen}(\text{Arccos } 1/3)$$

Si $y = \text{Arcsen } 2/3$, entonces $\text{sen } y = 2/3$ con $y \in [-\pi/2, \pi/2]$, entonces como $\cos y > 0$, se tiene que $\cos y = \sqrt{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^2} = \frac{\sqrt{5}}{3}$. Análogamente si $z = \text{Arccos } 1/3$, se tiene que $\cos z = 1/3$ con $z \in [0, \pi]$, y como $\text{sen } z > 0$ en dicho intervalo, $\text{sen } z = \sqrt{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^2} = \frac{\sqrt{8}}{3}$

$$\therefore \quad A = \frac{2}{9}(1 + \sqrt{10})$$

7.- Encontrar el valor exacto de $A = \text{sen}[2\,\text{Arccos}(-3/5)]$.

Solución: Si $y = \text{Arccos}(-3/5)$, entonces $\cos y = -3/5 \ \wedge\ \pi/2 < y < \pi$, por lo tanto $\text{sen } y = \sqrt{1 - 9/25} = 4/5$.

$$\therefore \quad A = 2\,\text{sen } y \cos y = 2\cdot\frac{4}{5}\cdot\left(-\frac{3}{5}\right) = -\frac{24}{25}$$

8.- Encontrar las soluciones exactas de la ecuación: $12 \cos^2 x - \cos x - 1 = 0$.

Solución: Considerando la ecuación como una ecuación de 2º grado en $\cos x$ se tiene:

$$\cos x = \frac{1 \pm \sqrt{1+48}}{24} = \begin{cases} 1/3 \\ -1/4 \end{cases}$$

Luego, las soluciones son: $x = \text{Arccos}\ \frac{1}{3} + 2k\pi$, $\text{Arcos}\left(-\frac{1}{4}\right) + 2k\pi$, con $k \in Z$.

9.- Resolver la ecuación: $\text{Arccos}\,(x - 1) + \text{Arccos}\, x = \pi$.

Solución: La ecuación es equivalente a $\text{Arccos}\,(x - 1) = \pi - \text{Arccos}\, x$. Entonces

$$\begin{aligned} \cos\,[\text{Arccos}\,(x-1)] &= \cos\,(\pi - \text{Arccos}\, x) \\ x - 1 &= -\cos\,(\text{Arcos}\, x) \\ x - 1 &= -x \\ x &= \_ \end{aligned}$$

Ejercicios propuestos

1.- Definir y graficar la rama principal de las funciones trigonométricas inversas de :
a) Arccot b) Arcsec c) Arccsc

2.- Calcular el valor exacto de $\cos\,[2\ \text{Arcsen}\,(-5/13)]$.

3.- Calcular el valor de $\cos\,(\frac{\pi}{4} + \text{Arctan}\ \frac{2}{5})$.

4.- Encontrar el valor de $\sec\,[\text{Arcsen}\,(-\frac{3\pi}{4})]$.

5.- Demostrar que $\tan\,(\text{Arctan}\ 2 + \text{Arctan}\ 3) = -1$.

6.- Calcular $\text{Arctan}\,(\tan 6)$.

7.- Demostrar que $\text{Arccos}\ \frac{3}{\sqrt{10}} + \text{Arccos}\ \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{\pi}{4}$.

8.- Resolver la ecuación $2\ \text{Arctan}\left(\frac{1-x}{1+x}\right) = \text{Arctan}\ x$

8. TEOREMAS DEL SENO Y DEL COSENO

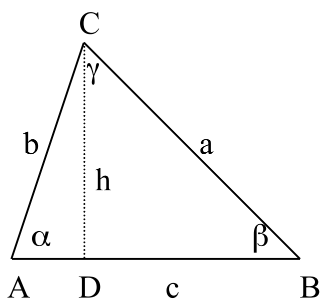
Históricamente, el principal objetivo de la trigonometría fue la *resolución de triángulos*, entendiéndose por ello el cálculo de sus elementos desconocidos (lados y/o ángulos), a partir de los datos. De la geometría se sabe que para resolver un triángulo es necesario y suficiente conocer tres de sus elementos, uno de los cuales, al menos, debe ser lineal.

Los ángulos de un triángulo ABC se denotan por α, β, y γ que son los ángulos que se oponen a los lados a, b, y , respectivamente.

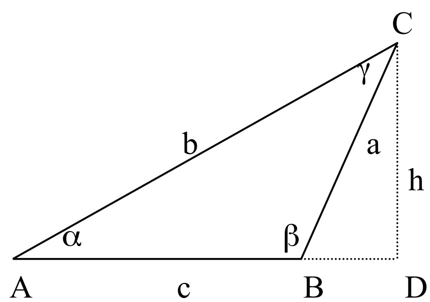
Teorema 8.1: *(Teorema del seno)* En todo triángulo ABC se tiene que:

$$\frac{a}{\operatorname{sen}\alpha} = \frac{b}{\operatorname{sen}\beta} = \frac{c}{\operatorname{sen}\gamma}$$

Demostración: Sin pérdida de generalidad se pueden considerar los dos casos siguientes:



(1)



(2)

<u>Caso 1</u>: Los ángulos del triángulo ABC son todos agudos. Se construye la perpendicular CD al lado AB. Entonces los triángulos ADC y CDB son ambos triángulos rectos y aplicando la trigonometría de un triángulo rectángulo, se tiene:

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{h}{b} \quad \text{o} \quad h = b \operatorname{sen}\alpha$$

$$\operatorname{sen}\beta = \frac{h}{a} \quad \text{o} \quad h = a \operatorname{sen}\beta$$

De donde, $b \operatorname{sen}\alpha = a \operatorname{sen}\beta$, que se puede escribir:

$$\frac{a}{\operatorname{sen}\alpha} = \frac{b}{\operatorname{sen}\beta}$$

Caso 2: El triángulo ABC tiene un ángulo obtuso β. Se construye la perpendicular CD al lado AB. Aplicando la trigonometría de un triángulo recto a los triángulos ADC y CDB, se tiene:

$$\text{sen}\,\alpha = \frac{h}{b} \quad \text{o} \quad h = b\ \text{sen}\,\alpha$$

$$\text{sen}\,(\pi - \beta) = \frac{h}{a} \quad \text{o} \quad h = a\ \text{sen}\,(\pi - \beta)$$

Pero, sen (π - β) = sen β. Luego, también se obtiene:

$$\frac{a}{\text{sen}\,\alpha} = \frac{b}{\text{sen}\,\beta}$$

Para completar la demostración del teorema se debe trazar una perpendicular del vértice A al lado BC y usando un argumento similar se demuestra que

$$\frac{b}{\text{sen}\,\beta} = \frac{c}{\text{sen}\,\gamma}$$

Observación: Aplicando el Teorema del seno se puede resolver un triángulo cuando se conocen:

a) un lado y dos ángulos (LAA), o
b) dos lados y un ángulo opuesto a uno de los lados (LLA).

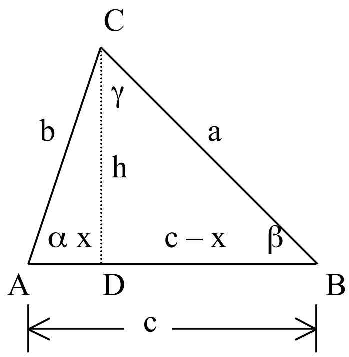
Supongamos que los lados a y b y el ángulo α de un triángulo ABC son conocidos y que se aplica el Teorema del seno para calcular el ángulo β. Existen las posibilidades siguientes:

b sen α > a, entonces sen β > 1, lo que es imposible. Luego no existe solución.
b sen α = a, entonces sen β = 1, es decir, β = π/2 y la solución es única.
b sen α < a, entonces 0 < sen β < 1, entonces β puede ser agudo u obtuso. Luego existen dos soluciones.

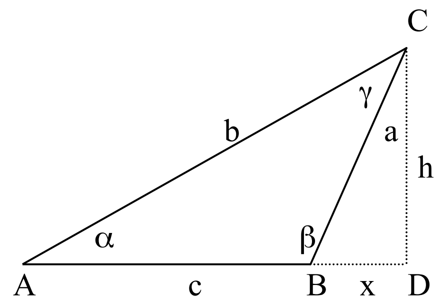
Teorema 8.2.: *(Teorema del coseno)* En todo triángulo ABC se tiene que:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \beta$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2bc \cos \gamma$$

Demostración: Sin pérdida de generalidad se pueden considerar los dos casos siguientes:



(1)



(2)

<u>Caso 1</u>: Los ángulos del triángulo ABC son todos agudos. Se construye la perpendicular CD al lado AB. Aplicando el Teorema de Pitágoras al triángulo recto BDC se tiene

$$\begin{aligned} a^2 &= h^2 + (c - x)^2 \\ &= h^2 + c^2 - 2cx + x^2 \\ &= (h^2 + x^2) + c^2 - 2cx \\ &= b^2 + c^2 - 2cx \qquad (*) \end{aligned}$$

Pero como el triángulo ADC es recto, se obtiene que

$$\cos \alpha = \frac{x}{b} \qquad \vee \qquad x = b \cos \alpha$$

Luego, remplazando x en la ecuación (*), se demuestra que

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$$

<u>Caso 2</u>: El triángulo ABC tiene un ángulo obtuso β. Se construye la perpendicular CD al lado AB. Aplicando el Teorema de Pitágoras al triángulo recto BDC se tiene:

$$a^2 = h^2 + x^2 \qquad (**)$$

Usando la trigonometría en el triángulo recto ADC se obtiene:

$$\text{sen}\ \alpha = \frac{h}{b} \qquad \vee \qquad h = b\ \text{sen}\ \alpha$$

$$\cos \alpha = \frac{c + x}{b} \qquad \vee \qquad x = b \cos \alpha - c$$

Sustituyendo en la ecuación (**) se tiene:

$$\begin{aligned} a^2 &= b^2\ \text{sen}^2\alpha + (b \cos \alpha - c)^2 \\ &= b^2\ \text{sen}^2\alpha + b^2 \cos^2\alpha - 2bc \cos \alpha + c^2 \\ &= b^2(\text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha) - 2bc \cos \alpha + c^2 \\ &= b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha \qquad \text{Ya que } \text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1. \end{aligned}$$

Se ha demostrado la primera parte del Teorema para ambos casos. Un argumento similar se usa para demostrar las otras dos partes.

Observación: Aplicando el Teorema del seno se puede resolver un triángulo cuando se conocen:

a) los tres lados (LLL), o
b) dos lados y la medida del ángulo comprendido por ellos (LAL).