UNIDADES DE MEDIDAS DE ÁNGULOS

EJERCICIO 1

a) Pasa a radianes los siguientes ángulos: 210° y 70° b) Pasa a grados los ángulos: $\frac{7\pi}{6}$ rad y 3,5 rad

Solución:

a) $210^\circ = 210 \cdot \frac{\pi}{180}\text{ rad} = \frac{7\pi}{6}\text{ rad}$ $\qquad 70^\circ = 70 \cdot \frac{\pi}{180}\text{ rad} = \frac{7\pi}{18}\text{ rad}$

b) $\frac{7\pi}{6}\text{ rad} = \frac{7\pi}{6} \cdot \frac{180^\circ}{\pi} = 210^\circ$ $\qquad 3,5\text{ rad} = 3,5 \cdot \frac{180^\circ}{\pi} = 200^\circ\, 32'7''$

EJERCICIO 2 : Completa la tabla:

GRADOS	130º		330º	
RADIANES		4π / 3		1,5

Solución:

$130^\circ = 130 \cdot \frac{\pi}{180}\text{ rad} = \frac{13\pi}{18}\text{ rad}$ $\qquad \frac{4\pi}{3}\text{ rad} = \frac{4\pi}{3} \cdot \frac{180^\circ}{\pi} = 240^\circ$

$330^\circ = 330 \cdot \frac{\pi}{180}\text{ rad} = \frac{11\pi}{6}\text{ rad}$ $\qquad 1,5\text{ rad} = 1,5 \cdot \frac{180^\circ}{\pi} = 85^\circ\, 56'37''$

Por tanto:

GRADOS	**130º**	240º	**330º**	85º56'37"
RADIANES	13π / 18	**4π / 3**	11π / 6	**1,5**

ÁNGULOS DE MEDIDAS CUALESQUIERA

EJERCICIO 3 : Si $tg\,\alpha = \frac{1}{3}$ y α es un ángulo que está en el primer cuadrante, calcula (sin hallar α):

a) $tg\,(180^\circ - \alpha)$ b) $tg\,(180^\circ + \alpha)$ c) $tg\,(360^\circ - \alpha)$ d) $tg\,(360^\circ + \alpha)$

Solución:

a) $tg(180^\circ - \alpha) = -tg\,\alpha = -\frac{1}{3}$ $\qquad$ b) $tg(180^\circ + \alpha) = tg\,\alpha = \frac{1}{3}$

c) $tg(360^\circ - \alpha) = -tg\,\alpha = -\frac{1}{3}$ $\qquad$ d) $tg(360^\circ + \alpha) = tg\,\alpha = \frac{1}{3}$

EJERCICIO 4 : Si $sen\,\alpha = 0,35$ y $0° < \alpha < 90°$ halla (sin calcular α):

a) $sen\,(180^\circ - \alpha)$ b) $cos\,(180^\circ + \alpha)$

Solución:

a) $sen(180^\circ - \alpha) = sen\,\alpha = 0,35$

b) $cos(180^\circ + \alpha) = -cos\,\alpha$

Necesitamos saber cuánto vale $cos\,\alpha$: $sen^2\alpha + cos^2\alpha = 1 \;\rightarrow\; 0,35^2 + cos^2\alpha = 1$

$0,1225 + cos^2\alpha = 1 \;\rightarrow\; cos^2\alpha = 0,8775 \Rightarrow cos\,\alpha = 0,94$ (es positivo, pues $0^\circ < \alpha < 90^\circ$)

Por tanto: $cos(180^\circ + \alpha) = -cos\alpha = -0,94$

<u>EJERCICIO 5</u> : Sabiendo que *sen* 50° = 0,77, *cos* 50° = 0,64 y *tg* 50° = 1,19, calcula (sin utilizar las teclas trigonométricas de la calculadora):

a) $\boldsymbol{cos\,130^\circ}$ **b)** $\boldsymbol{tg\,310^\circ}$ **c)** $\boldsymbol{cos\,230^\circ}$ **d)** $\boldsymbol{sen\,310^\circ}$

Solución:

$$\text{a) } cos130^\circ = cos(180^\circ - 150^\circ) = -cos50^\circ = -0,64$$

$$\text{b) } tg310^\circ = tg(360^\circ - 50^\circ) = -tg50^\circ = -1,19$$

$$\text{c) } cos230^\circ = cos(180^\circ + 50^\circ) = -cos50^\circ = -0,64$$

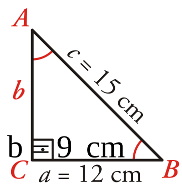
$$\text{d) } sen310^\circ = sen(360^\circ - 50^\circ) = -sen50^\circ = -0,77$$

RESOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS RECTÁNGULOS

<u>EJERCICIO 6</u> : En un triángulo rectángulo la hipotenusa mide 15 cm y uno de los catetos mide 12 cm. Calcula la longitud del otro cateto y la medida de sus ángulos.

Solución:

Aplicamos el teorema de Pitágoras para hallar el otro cateto:



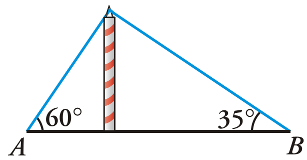
$$a^2 + b^2 = c^2 \Rightarrow 12^2 + b^2 = 15^2 \quad \to \quad 144 + b^2 = 225 \Rightarrow b^2 = 225 - 144 = 81 \quad \to \quad b = 9 \text{ cm}$$

Hallamos los ángulos: $sen\,\hat{B} = \frac{b}{c} \quad \to \quad sen\,\hat{B} = \frac{9}{15} = 0,6 \quad \to \hat{B} = 36^\circ\,52'12'' \Rightarrow \hat{A} = 90^\circ - \hat{B} = 53^\circ\,7'48''$

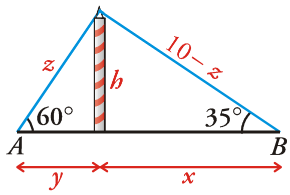
Por tanto: $a = 12 \text{ cm}; \ \hat{A} = 53^\circ\,7'48''; b = 9 \text{ cm}; \ \hat{B} = 36^\circ\,52'12''; c = 15 \text{ cm}; \ \hat{C} = 90^\circ$

<u>EJERCICIO 7</u> : Para sujetar un mástil al suelo como indica la figura hemos necesitado 10 metros de cable.

Halla la altura del mástil y la distancia entre los puntos *A* y *B*.



Solución:



$$\left.\begin{array}{l} sen\,60^\circ = \dfrac{h}{z} \\ sen\,35^\circ = \dfrac{h}{10-z} \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} z\,sen\,60^\circ = h \\ (10-z)\,sen\,35^\circ = h \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$z\,sen\,60^\circ = (10-z)\,sen\,35^\circ \quad \to \quad z\,sen\,60^\circ = 10\,sen\,35^\circ - z\,sen\,35^\circ$$

$$z\,sen\,60^\circ + z\,sen\,35^\circ = 10\,sen\,35^\circ \quad \to \quad z(sen\,60^\circ + sen\,35^\circ) = 10\,sen\,35^\circ \Rightarrow z = \frac{10\,sen\,35^\circ}{sen\,60^\circ + sen\,35^\circ} = 3,98 \text{ m}$$

$h = z\,sen\,60^\circ = \dfrac{10\,sen\,35^\circ\,sen\,60^\circ}{sen\,60^\circ + sen\,35^\circ} = 3,45 \text{ m} \Rightarrow$ La altura del mástil es de 3,45 m

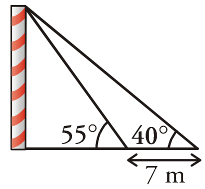
Para hallar la distancia entre A y B, tenemos que hallar x e y:

$$tg\,60^\circ = \frac{h}{y} \quad \to \quad y = \frac{h}{tg\,60^\circ} = \frac{3,45}{tg\,60^\circ} = 1,99 \text{ m}$$

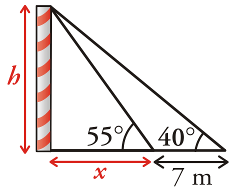
$$tg\,35^\circ = \frac{h}{x} \quad \to \quad x = \frac{h}{tg\,35^\circ} = \frac{3,45}{tg\,35^\circ} = 4,93 \text{ m}$$

Por tanto, la distancia entre A y B es de $x + y = 4,93 + 1,99 = 6,92$ m.

EJERCICIO 8 : Raquel ve el punto más alto de una antena bajo un ángulo de 55°. Alejándose 7 metros en línea recta, el ángulo es de 40°. ¿Cuál es la altura de la antena?



Solución:

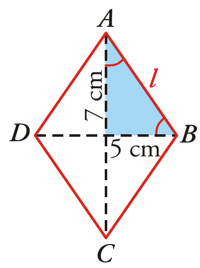


$$\left.\begin{array}{l} tg\,55^\circ = \dfrac{h}{x} \\ tg\,40^\circ = \dfrac{h}{x+7} \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} x\,tg\,55^\circ = h \\ (x+7)\,tg\,40^\circ = h \end{array}\right\} \Rightarrow x\,tg\,55^\circ = (x+7)\,tg\,40^\circ \quad \to \quad x\,tg\,55^\circ = x\,tg\,40^\circ + 7\,tg\,40^\circ$$

$$x\,tg\,55^\circ - x\,tg\,40^\circ = 7\,tg\,40^\circ \quad \to \quad x\left(tg\,55^\circ - tg\,40^\circ\right) = 7\,tg\,40^\circ \Rightarrow x = \frac{7\,tg\,40^\circ}{tg\,55^\circ - tg\,40^\circ} = 9{,}97 \text{ m}$$

$h = x\,tg\,55^\circ = \dfrac{7\,tg\,40^\circ\,tg\,55^\circ}{tg\,55^\circ - tg\,40^\circ} = 14{,}24 \text{ m} \Rightarrow$ La altura de la antena es de 14,24 metros.

EJERCICIO 9 : Las diagonales de un rombo miden 10 y 14 cm, respectivamente. Calcula el lado del rombo y sus ángulos.



Solución:

Hallamos la hipotenusa aplicando el teorema de Pitágoras: $7^2 + 5^2 = l^2 \quad \to \quad l^2 = 74 \quad \to \quad l = 8{,}6 \text{ cm}$

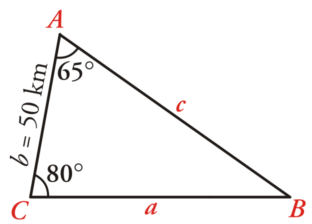
Hallamos los ángulos: $tg\hat{A} = \dfrac{5}{7} \quad \to \quad \hat{A} = 35^\circ\,32'16'' \quad \to \quad \hat{B} = 90^\circ - \hat{A} = 54^\circ\,27'44''$

Los ángulos del rombo miden: $\begin{array}{l} 2\hat{A} = 71^\circ\,4'31'' \\ 2\hat{B} = 108^\circ\,55'29'' \end{array}$

RESOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS CUALESQUIERA

EJERCICIO 10 : En dos estaciones de radio, A y C, que distan entre sí 50 km, son recibidas señales que manda un barco, B. Si consideramos el triángulo de vértices A, B y C, el ángulo en A es de 65° y el ángulo en C es de 80°. ¿A qué distancia se encuentra el barco de cada una de las dos estaciones de radio?

Solución



Hallamos el ángulo $\hat{B}$: $\hat{B} = 180^\circ - \left(\hat{A} + \hat{C}\right) = 35^\circ$

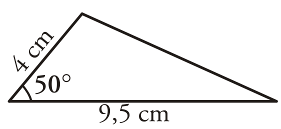
Hallamos los valores de a y c aplicando el teorema de los senos:

$$\frac{a}{sen\,65^\circ} = \frac{50}{sen\,35^\circ} \quad \to \quad a = \frac{50\,sen\,65^\circ}{sen\,35^\circ} = 79 \text{ km}$$

$$\frac{c}{sen\,80^\circ} = \frac{50}{sen\,35^\circ} \quad \to \quad c = \frac{50\,sen\,80^\circ}{sen\,35^\circ} = 85{,}85 \text{ km}$$

Por tanto, el barco está a 79 km de la estación C y a 85,85 km de la estación A.

Los metros de valla necesarios serían: $a + b + c = 20 + 15 + 20{,}49 = 55{,}49 \text{ m}$



EJERCICIO 11 : **Resuelve este triángulo, es decir, halla sus lados y sus ángulos:**

Solución:
Hallamos el lado c con el teorema del coseno:

$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\hat{C}$

$c^2 = 9{,}5^2 + 4^2 - 2\cdot 9{,}5\cdot 4\cdot \cos 50^\circ \Rightarrow c^2 = 57{,}4 \quad \rightarrow \quad c = 7{,}58 \text{ cm} \Rightarrow$

$c^2 = 90{,}25 + 16 - 48{,}85$

Como conocemos los tres lados, la solución es única.

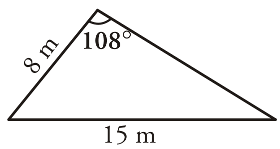
Hallamos el ángulo $\hat{A}$:

$$\frac{a}{sen\,\hat{A}} = \frac{c}{sen\,\hat{C}} \quad \rightarrow \quad \frac{9{,}5}{sen\,\hat{A}} = \frac{7{,}58}{sen\,50^\circ} \quad \rightarrow \quad sen\,\hat{A} = \frac{9{,}5\,sen\,50^\circ}{7{,}58} \Rightarrow sen\,\hat{A} = 0{,}96 \quad \rightarrow \quad \hat{A} = 73^\circ\,45'24''$$

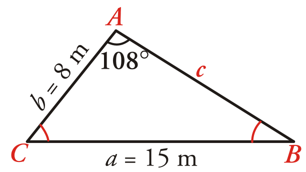
$\hat{B} = 180^\circ - \left(\hat{A} + \hat{C}\right) = 56^\circ\,14'36''$

Por tanto: $a = 9{,}5$ cm; $\hat{A} = 73^\circ\,45'24''$; $b = 4$ cm; $\hat{B} = 56^\circ\,14'36''$; $c = 7{,}58$ cm; $\hat{C} = 50^\circ$

EJERCICIO 12 : **Halla los lados y los ángulos de este triángulo:**



Solución:



Hallamos el ángulo $\hat{B}$ con el teorema de los senos:

$$\frac{a}{sen\,\hat{A}} = \frac{b}{sen\,\hat{B}} \quad \rightarrow \quad \frac{15}{sen\,108^\circ} = \frac{8}{sen\,\hat{B}} \Rightarrow$$

$$sen\,\hat{B} = \frac{8\,sen\,108^\circ}{15} = 0{,}507 \quad \rightarrow \quad \hat{B} = 30^\circ\,28'46''$$

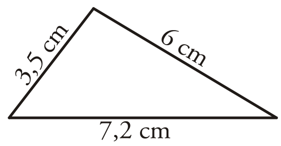
(Como $\hat{A}$ es obtuso, $\hat{B}$ y $\hat{C}$ han de ser agudos, solo hay una relación).

Hallamos el ángulo $\hat{C}$: $\Rightarrow \hat{C} = 180^\circ - \left(\hat{A} + \hat{B}\right) = 41^\circ\,31'14''$

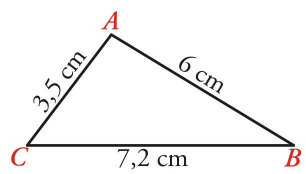
Calculamos el lado c: $\dfrac{c}{sen\,\hat{C}} = \dfrac{a}{sen\,\hat{A}} \quad \rightarrow \quad \dfrac{c}{sen\left(41^\circ\,31'14''\right)} = \dfrac{15}{sen\,108^\circ} \quad \rightarrow \quad c = 10{,}46$ m

Por tanto: $a = 15$ m; $\hat{A} = 108^\circ$; $b = 8$ m; $\hat{B} = 30^\circ\,28'46''$; $c = 10{,}46$ m; $\hat{C} = 41^\circ\,31'14''$

EJERCICIO 13 : **Calcula los lados y los ángulos del siguiente triángulo:**



Solución:



Como conocemos los tres lados (y cada lado es menor que la suma de los otros dos), existe solución única. Hallamos los ángulos A y B con el teorema del coseno:

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\hat{A} \Rightarrow 51{,}84 = 12{,}25 + 36 - 42\cos\hat{A} \Rightarrow$

$42\cos A = 12{,}25 + 36 - 51{,}84 \Rightarrow 42\cos\hat{A} = -3{,}59$

$\cos\hat{A} = -0{,}085 \quad \rightarrow \quad \hat{A} = 94^\circ\,54'12''$

$b^2 = a^2 + c^2 - ac\cos\hat{B} \quad \rightarrow \quad 12{,}25 = 51{,}84 + 36 - 86{,}4\cos\hat{B} \Rightarrow$

$86{,}4\cos\hat{B} = 51{,}84 + 36 - 12{,}25 \quad \rightarrow \quad \cos\hat{B} = 0{,}875 \Rightarrow \hat{B} = 28^\circ\,58'7''$

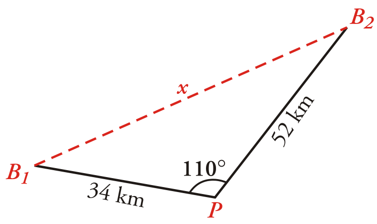
$\hat{C} = 180^\circ - \left(\hat{A} + \hat{B}\right) = 56^\circ\,7'41''$

Por tanto: $a = 7{,}2$ cm; $\hat{A} = 94^\circ\,54'12''$; $b = 3{,}5$ cm; $\hat{B} = 28^\circ\,58'7''$; $c = 6$ cm; $\hat{C} = 56^\circ\,7'41''$

EJERCICIO 14 : **Dos barcos salen de un puerto a la misma hora con rumbos distintos, formando un ángulo de 110°. Al cabo de 2 horas, el primer barco está a 34 km del punto inicial y el segundo barco, a 52 km de dicho punto. En ese mismo instante, ¿a qué distancia se encuentra un barco del otro?**

Solución:

Hallamos la distancia, x, aplicando el teorema del coseno:

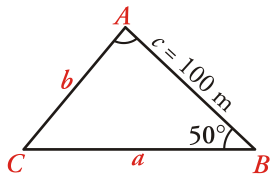


$$\left.\begin{array}{l} x^2 = 34^2 + 52^2 - 2 \cdot 34 \cdot 52 \cdot \cos 110^\circ \\ x^2 = 1156 + 2704 + 1209{,}38 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} x^2 = 5069{,}38 \\ x = 71{,}20 \text{ km} \end{array}$$

Por tanto, la distancia entre los dos barcos es de 71,20 km.

<u>EJERCICIO 15</u> : Se desea unir tres puntos, A, B y C, mediante caminos rectos que unan A con B, B con C y C con A. La distancia de A a B es de 100 metros, el ángulo correspondiente a B es de 50°, y el ángulo en A es de 75°. ¿Cuál es la distancia entre B y C? ¿Y entre A y C?

Solución:



Hallamos el ángulo $\hat{C}$: $\hat{C} = 180^\circ - \left(\hat{A} + \hat{B}\right) = 55^\circ$

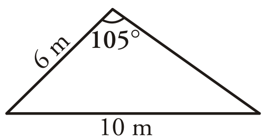
Calculamos a y b aplicando el teorema de los senos:

$$\frac{a}{\operatorname{sen} 75^\circ} = \frac{100}{\operatorname{sen} 55^\circ} \rightarrow a = \frac{100 \cdot \operatorname{sen} 75^\circ}{\operatorname{sen} 55^\circ} = 117{,}92 \text{ m}$$

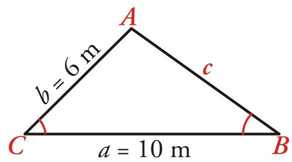
$$\frac{b}{\operatorname{sen} 50^\circ} = \frac{100}{\operatorname{sen} 55^\circ} \rightarrow b = \frac{100 \cdot \operatorname{sen} 50^\circ}{\operatorname{sen} 55^\circ} = 93{,}52 \text{ m}$$

Por tanto, la distancia entre B y C es de 117,92 m y la distancia entre A y C es de 93,52 m.

<u>EJERCICIO 16</u> : Resuelve el siguiente triángulo, es decir, halla el valor de sus lados y de sus ángulos:



Solución:



Hallamos el ángulo $\hat{B}$ con el teorema de los senos:

$$\frac{a}{\operatorname{sen} \hat{A}} = \frac{b}{\operatorname{sen} \hat{B}} \rightarrow \frac{10}{\operatorname{sen} 105^\circ} = \frac{6}{\operatorname{sen} \hat{B}} \Rightarrow$$

$$\operatorname{sen} \hat{B} = \frac{6 \operatorname{sen} 105^\circ}{10} = 0{,}58 \rightarrow \hat{B} = 35^\circ\, 25'9''$$

(Como $\hat{A}$ es obtuso, $\hat{B}$ y $\hat{C}$ han de ser agudos; solo hay una solución).

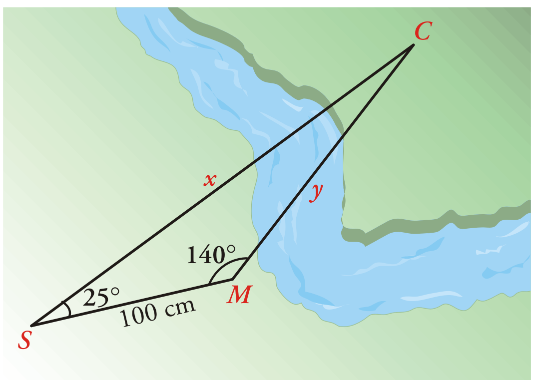
Hallamos el ángulo de $\hat{C}$: $\hat{C} = 180^\circ - \left(\hat{A} + \hat{B}\right) = 39^\circ\, 34'51''$

Calculamos el lado c: $\dfrac{c}{\operatorname{sen} \hat{C}} = \dfrac{a}{\operatorname{sen} \hat{A}} \rightarrow \dfrac{c}{\operatorname{sen}\left(39^\circ\, 34'51''\right)} = \dfrac{10}{\operatorname{sen} 105^\circ} \rightarrow c = 6{,}6 \text{ m}$

Por tanto: $a = 10$ m; $\hat{A} = 105^\circ$; $b = 6$ m; $\hat{B} = 35^\circ\, 25'9''$; $c = 6{,}6$ m; $\hat{C} = 39^\circ\, 34'51''$

<u>EJERCICIO 17</u> : Sara y Manolo quieren saber a qué distancia se encuentra un castillo que está en la orilla opuesta de un río. Se colocan a 100 metros de distancia el uno del otro y consideran el triángulo en cuyos vértices están cada uno de los dos, y el castillo. El ángulo correspon-diente al vértice en el que está Sara es de 25° y el ángulo del vértice en el que está Manolo es de 140°. ¿A qué distancia se encuentra Sara del castillo? ¿Y Manolo?

Solución:



El ángulo $\hat{C}$ será: $\hat{C} = 180^\circ - \left(25^\circ + 140^\circ\right) = 15^\circ$

Con el teorema de los senos hallamos los lados x e y:

$$\frac{x}{\operatorname{sen} 140^\circ} = \frac{100}{\operatorname{sen} 15^\circ} \rightarrow x = \frac{100 \operatorname{sen} 140^\circ}{\operatorname{sen} 15^\circ} = 248{,}35 \text{ m}$$

$$\frac{y}{\operatorname{sen} 25^\circ} = \frac{100}{\operatorname{sen} 15^\circ} \rightarrow y = \frac{100 \operatorname{sen} 25^\circ}{\operatorname{sen} 15^\circ} = 163{,}29 \text{ m}$$

Por tanto: Sara está a 248,35 m del castillo y Manolo, a 163,29 m.

DEMOSTRAR IGUALDADES TRIGONOMÉTRICAS

EJERCICIO 18 : Demuestra que:

a) $\dfrac{\cos x}{1-\operatorname{sen} x}+\dfrac{1+\operatorname{sen} x}{\cos x}=\dfrac{1+\cos 2x}{\cos x-\dfrac{1}{2}\operatorname{sen} 2x}$

b) $2\left(\cos^2\dfrac{x}{2}-\dfrac{1}{2}\cos x\right)=1$

c) $\operatorname{sen}(x+y)\cdot\operatorname{sen}(x-y)=\operatorname{sen}^2 x-\operatorname{sen}^2 y$

d) $\dfrac{(\operatorname{sen} x+\cos x)\cdot\cos 2x}{\cos x-\operatorname{sen} x}=1+\operatorname{sen} 2x$

e) $\dfrac{2\operatorname{sen} x}{tg 2x}+\dfrac{\operatorname{sen}^2 x}{\cos x}=\cos x$

Solución:

a) $\dfrac{\cos x}{1-\operatorname{sen} x}+\dfrac{1+\operatorname{sen} x}{\cos x}=\dfrac{\cos^2 x+(1+\operatorname{sen} x)(1-\operatorname{sen} x)}{(1-\operatorname{sen} x)\cos x}=\dfrac{\cos^2 x+1-\operatorname{sen}^2 x}{\cos x-\operatorname{sen} x\cos x}=\dfrac{1+\cos^2 x-\operatorname{sen}^2 x}{\cos x-\dfrac{2\operatorname{sen} x\cos x}{2}}=$

$=\dfrac{1+\cos 2x}{\cos x-\dfrac{1}{2}\operatorname{sen} 2x}$

b) $2\left(\cos^2\dfrac{x}{2}-\dfrac{1}{2}\cos x\right)=2\left(\dfrac{1+\cos x}{2}-\dfrac{1}{2}\cos x\right)=1+\cos x-\cos x=1$

c)

$\operatorname{sen}(x+y)\cdot\operatorname{sen}(x+y)=(\operatorname{sen} x\cos y+\cos x\operatorname{sen} y)(\operatorname{sen} x\cos y-\cos x\operatorname{sen} y)=(\operatorname{sen} x\cos y)^2-(\cos x\operatorname{sen} y)^2=$

$=\operatorname{sen}^2 x\cos^2 y-\cos^2 x\operatorname{sen}^2 y=\operatorname{sen}^2 x(1-\operatorname{sen}^2 y)-\cos^2 x\operatorname{sen}^2 y=\operatorname{sen}^2 x-\operatorname{sen}^2 x\operatorname{sen}^2 y-$

$-(1-\operatorname{sen}^2 x)\operatorname{sen}^2 y=\operatorname{sen}^2 x-\operatorname{sen}^2 x\operatorname{sen}^2 y-\operatorname{sen}^2 y+\operatorname{sen}^2 x\operatorname{sen}^2 y=\operatorname{sen}^2 x-\operatorname{sen}^2 y$

d) $\dfrac{(\operatorname{sen} x+\cos x)\cdot\cos 2x}{\cos x-\operatorname{sen} x}=\dfrac{(\operatorname{sen} x+\cos x)\cdot(\operatorname{sen} x+\cos x)\cdot\cos 2x}{(\cos x-\operatorname{sen} x)(\cos x+\operatorname{sen} x)}=$

$=\dfrac{(\operatorname{sen} x+\cos x)^2\cdot\cos 2x}{\cos^2 x-\operatorname{sen}^2 x}=\dfrac{(\operatorname{sen}^2 x+\cos^2 x+2\operatorname{sen} x\cos x)\cdot\cos 2x}{\cos 2x}=$

$=\operatorname{sen}^2 x+\cos^2 x+2\operatorname{sen} x\cos x=1+2\operatorname{sen} x\cos x=1+\operatorname{sen} 2x$

e) $\dfrac{2\operatorname{sen} x}{tg 2x}+\dfrac{\operatorname{sen}^2 x}{\cos x}=\dfrac{2\operatorname{sen} x}{\dfrac{\operatorname{sen} 2x}{\cos 2x}}+\dfrac{\operatorname{sen}^2 x}{\cos x}==\dfrac{2\operatorname{sen} x\cos 2x}{\operatorname{sen} 2x}+\dfrac{\operatorname{sen}^2 x}{\cos x}=\dfrac{2\operatorname{sen} x(\cos^2 x-\operatorname{sen}^2 x)}{2\operatorname{sen} x\cos x}+\dfrac{\operatorname{sen}^2 x}{\cos x}=$

$=\dfrac{\cos^2 x-\operatorname{sen}^2 x}{\cos x}+\dfrac{\operatorname{sen}^2 x}{\cos x}=\dfrac{\cos^2 x-\operatorname{sen}^2 x+\operatorname{sen}^2 x}{\cos x}=\dfrac{\cos^2 x}{\cos x}=\cos x$

RESOLUCIÓN DE ECUACIONES TRIGONOMÉTRICAS

EJERCICIO 19 : Resuelve:

a) $\operatorname{sen}(x+45^\circ)+\operatorname{sen}(x-45^\circ)=1$

b) $\operatorname{sen} 2x+\cos x=0$

c) $\cos x\operatorname{sen} 2x-\operatorname{sen} x=0$

d) $\cos^3 x-3\cos x=3\cos x\operatorname{sen} x$

e) $4\cos 2x=1-3\cos x$

f) $\operatorname{sen} 2x+\cos 2x-1=\cos x-2\operatorname{sen}^2 x$

Solución:

a) $\operatorname{sen}(x+45^\circ)+\operatorname{sen}(x-45^\circ)=1\Rightarrow\operatorname{sen} x\cdot\cos 45^\circ+\cos x\cdot\operatorname{sen} 45^\circ+\operatorname{sen} x\cos 45^\circ-\cos x\operatorname{sen} 45^\circ=1$

$2\operatorname{sen} x\cos 45^\circ=1\Rightarrow 2\dfrac{\sqrt{2}}{2}\operatorname{sen} x=1\quad\rightarrow\quad\sqrt{2}\operatorname{sen} x=1\quad\rightarrow\quad\operatorname{sen} x=\dfrac{1}{\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\Rightarrow$

$\begin{cases}x=45^\circ+360^\circ k\\ x=135^\circ+360^\circ k\end{cases}$ donde $k\in\mathbf{Z}$

b) $\operatorname{sen} 2x+\cos x=0$
$2\operatorname{sen} x\cos x+\cos x=0\quad\rightarrow\quad\cos x(2\operatorname{sen} x+1)=0\Rightarrow$

$$\begin{cases} \cos x = 0 & \rightarrow \begin{cases} x = 90^\circ + 360k \\ x = 270 + 360k \end{cases} \\ 2\operatorname{sen} x + 1 = 0 & \rightarrow \quad \operatorname{sen} x = -\dfrac{1}{2} \quad \rightarrow \begin{cases} x = 210^\circ + 360^\circ k \\ x = 330^\circ + 360^\circ k \end{cases} \end{cases} \quad \text{donde } k \in \mathbf{Z}$$

c) $\cos x \operatorname{sen} 2x - \operatorname{sen} x = 0 \Rightarrow \cos x \cdot 2\operatorname{sen} x \cos x - \operatorname{sen} x = 0 \Rightarrow \operatorname{sen} x\left(2\cos^2 x - 1\right) = 0$

$$\begin{cases} \operatorname{sen} x = 0 & \rightarrow \begin{cases} x = 0^\circ + 360^\circ k \\ x = 180^\circ + 360^\circ k \end{cases} \\ 2\cos^2 x - 1 = 0 & \rightarrow \quad \cos^2 x = \dfrac{1}{2} \quad \rightarrow \quad \cos x = \pm\sqrt{\dfrac{1}{2}} = \pm\dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cos x = \dfrac{\sqrt{2}}{2} & \rightarrow \begin{cases} x = 45^\circ + 360^\circ k \\ x = 315^\circ + 360^\circ k \end{cases} \\ \cos x = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} & \rightarrow \begin{cases} x = 135^\circ + 360^\circ k \\ x = 225^\circ + 360^\circ k \end{cases} \end{cases}$$

Por tanto, las soluciones son: $\begin{array}{lll} x = 0^\circ + 360^\circ k & x = 45^\circ + 360^\circ k & x = 135^\circ + 360^\circ k \\ x = 180^\circ + 360^\circ k & x = 315^\circ + 360^\circ k & x = 225^\circ + 360^\circ k \end{array}$

donde $k \in \mathbf{Z}$.

d) $\cos^3 x - 3\cos x = 3\cos x \operatorname{sen} x \Rightarrow \cos^3 x - 3\cos x - 3\cos x \operatorname{sen} x = 0 \Rightarrow \cos x\left(\cos^2 x - 3 - 3\operatorname{sen} x\right) = 0$

$\cos x\left(1 - \operatorname{sen}^2 x - 3 - 3\operatorname{sen} x\right) = 0 \Rightarrow \cos x\left(-\operatorname{sen}^2 x - 3\operatorname{sen} x - 2\right) = 0 \Rightarrow -\cos x\left(\operatorname{sen}^2 x + 3\operatorname{sen} x + 2\right) = 0$

$$\begin{cases} \cos x = 0 & \rightarrow \begin{cases} x = 90^\circ + 360^\circ k \\ x = 270^\circ + 360^\circ k \end{cases} \Rightarrow \operatorname{sen} x = \dfrac{-3 \pm \sqrt{9-8}}{2} = \dfrac{-3 \pm \sqrt{1}}{2} = \dfrac{-3 \pm 1}{2} = \quad \rightarrow \begin{cases} -1 \\ -2 \text{ (no vale)} \end{cases} \\ \operatorname{sen}^2 x + 3\operatorname{sen} x + 2 = 0 \end{cases}$$

$\operatorname{sen} x = -1 \quad \rightarrow \quad x = 270^\circ + 360^\circ k$

Por tanto las soluciones son: $\begin{cases} x = 90^\circ + 360^\circ k \\ x = 270^\circ + 360^\circ k \end{cases}$ siendo $k \in \mathbf{Z}$

e) $4\cos 2x = 1 - 3\cos x \Rightarrow 4\left(\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x\right) = 1 - 3\cos x \Rightarrow 4\cos^2 x - 4\operatorname{sen}^2 x = 1 - 3\cos x$

$4\cos^2 x - 4\left(1 - \cos^2 x\right) = 1 - 3\cos x \Rightarrow 4\cos^2 x - 4 + 4\cos^2 x = 1 - 3\cos x \Rightarrow 8\cos^2 x + 3\cos x - 5 = 0$

$$\cos x = \frac{-3 \pm \sqrt{9+160}}{16} = \frac{-3 \pm \sqrt{169}}{16} = \frac{-3 \pm 13}{16} = \begin{cases} \dfrac{5}{8} \\ -1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \cos x = \dfrac{5}{8} & \rightarrow \begin{cases} x = 51^\circ 19' 4'' + 360^\circ k \\ x = 308^\circ 40' 56'' + 360^\circ k \end{cases} \\ \cos x = -1 & \rightarrow \quad x = 180^\circ + 360^\circ k \end{cases} \quad \text{siendo } k \in \mathbf{Z}$$

f) $\operatorname{sen} 2x + \cos 2x - 1 = \cos x - 2\operatorname{sen}^2 x \Rightarrow 2\operatorname{sen} x \cos x + \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x - 1 = \cos x - 2\operatorname{sen}^2 x$

$2\operatorname{sen} x \cos x + \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x - 1 - \cos x + 2\operatorname{sen}^2 x = 0 \Rightarrow 2\operatorname{sen} x \cos x + \cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x - 1 - \cos x = 0$

$2\operatorname{sen} x \cos x + 1 - 1 - \cos x = 0 \Rightarrow 2\operatorname{sen} x \cos x - \cos x = 0 \Rightarrow \cos x\left(2\operatorname{sen} x - 1\right) = 0$

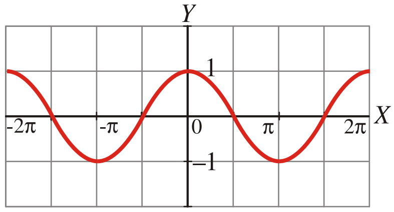
$$\begin{cases} \cos x = 0 & \rightarrow \begin{cases} x = 90^\circ + 360^\circ k \\ x = 270^\circ + 360^\circ k \end{cases} \\ 2\operatorname{sen} x - 1 = 0 & \rightarrow \quad \operatorname{sen} x = \dfrac{1}{2} \quad \rightarrow \begin{cases} x = 30^\circ + 360^\circ k \\ x = 150^\circ + 360^\circ k \end{cases} \end{cases} \quad \text{siendo } k \in \mathbf{Z}$$

REPRESENTACIÓN DE FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

EJERCICIO 20

a) Representa la siguiente función trigonométrica: $y = \cos\left(x - \dfrac{\pi}{2}\right)$

b) Escribe la ecuación de la función cuya gráfica es la siguiente:

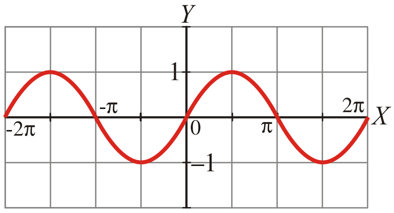


Solución:

a) Hacemos una tabla de valores:

x	-2π	$-3\pi/2$	$-\pi$	$-\pi/2$	0	$\pi/2$	π	$3\pi/2$	2π
$x-\pi/2$	$-5\pi/2$	-2π	$-3\pi/2$	$-\pi$	$-\pi/2$	0	$\pi/2$	π	$3\pi/2$
$\cos(x-\pi/2)$	0	1	0	–1	0	1	0	–1	0

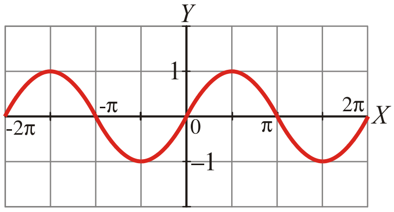
La gráfica sería:



b) La gráfica corresponde a la función $y = \cos x$.

<u>EJERCICIO 21</u>

a) Escribe la ecuación de la función correspondiente a esta gráfica:



b) Representa la siguiente función: $y = \cos(x + \pi)$

Solución:

a) La gráfica corresponde a la función $y = \text{sen}\, x$.

b) Hacemos una tabla de valores:

x	-2π	$-3\pi/2$	$-\pi$	$-\pi/2$	0	$\pi/2$	π	$3\pi/2$	2π
$x+\pi$	$-\pi$	$-\pi/2$	0	$\pi/2$	π	$3\pi/2$	2π	$5\pi/2$	3π
$y=\cos(x+\pi)$	–1	0	1	0	–1	0	1	0	–1

La gráfica sería: