

LÍMITES DE FUNCIONES. CONTINUIDAD.

Ejercicios

1. Encuentra el valor de los siguientes límites de funciones:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 3x + 2}{x^2 - 3x + 2}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^5 - 7x^2 + 2}{-5x^2 - 6x + 1}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 2}{x - 2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x^2 + 5} - 3}{x^2 - 2x}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{x} \cdot \sqrt{x^2 + 3x} \right)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{4x^2 - 5x} - 2x \right)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{3x - 5}{3x + 2} \right)^{2x^2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1 + 3x)^{\frac{1}{x}}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{x^3 + 2x^2 - 3x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^4 - 3x^2}{x^2 + x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{3}}{x^2 - 9}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1-x} - 1}{2x}$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^4 - 1}{x^3 + 1}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2-x} - \sqrt{2+x}}{x^2 + x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+2} - 2}{\sqrt{2x} - 2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{1}{x^2} \cdot \left(\frac{1}{x+2} - \frac{1}{x^2+2} \right) \right]$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\sqrt{x} \cdot (\sqrt{x+3} - \sqrt{x}) \right]$$

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{3 - \sqrt{5-x}}{2 - \sqrt{8-x}}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 + 2}{x+1} - \frac{x^2 + 1}{x} \right)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2x^2 - 6x}{2x^2 - x - 5} \right)^{\frac{x^2}{2}}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{4-3x}{5-3x} \right)^{x-3}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x^2 + 1}{x+1} \right)^{\frac{x^2+3}{x-1}}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{\frac{x-2}{x+5}} \right)^x$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\sqrt{x^4 - x^3} - \sqrt{x^4 - 1}}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - x}{\sqrt{x} - 1}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{4x+1}}{\sqrt{x+2}}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{3x^2}{x-1} - \frac{2x^2}{x+1} \right)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2x^2 + 5}{3x^2 - 5} \right)^{x+2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} (x-2)^{\frac{5}{x^2-9}}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (2x-1)^{\frac{3}{1-x}}$$

2. Calcula a y b para que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(ax + b - \frac{x^2 + 2}{x + 2} \right) = 0$.

3. Calcula a y clasifica las discontinuidades de la función $f(x) = \begin{cases} \frac{2a}{x^2 - 4} & \text{si } x < 1 \\ \frac{4}{x^2 - 7x + 12} & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$, sabiendo

que es continua en $x = 1$.

4. Dada la función $f(x) = \frac{e^x}{x}$, estudia su dominio y continuidad. Busca sus asíntotas y estudia la posición de la gráfica con respecto a ellas.

5. Determina todas las discontinuidades de la función $f(x) = \begin{cases} \frac{2x^2 + 6x + 4}{x^2 - x - 6} & \text{si } x \leq 0 \\ \frac{6}{x - 3} & \text{si } x > 0 \end{cases}$, indicando de qué tipo es cada una de ellas.

6. Estudia el dominio y la continuidad de cada una de las siguientes funciones:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3x}{x^2 - 4} & \text{si } x \leq 0 \\ \sqrt{x - 2} & \text{si } x > 0 \end{cases} \qquad g(x) = \frac{\sqrt{x^2 - 4}}{x^2 - 6x + 8}$$

7. Determina a y b para que la función $f(x) = \begin{cases} 2ax + 3 & \text{si } x \leq 1 \\ \frac{x}{x^2 + b} & \text{si } 1 < x \leq 4 \\ 4 & \text{si } x > 4 \end{cases}$, sea continua en todo su dominio.

8. Encuentra el valor del parámetro a para el cual cada una de las siguientes funciones es continua en su dominio de definición:

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 - 2 & \text{si } x \leq 1 \\ \frac{4}{x} & \text{si } x > 1 \end{cases} \qquad f(x) = \begin{cases} e^{x-2} & \text{si } x < 2 \\ a + \ln(x-1) & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

9. La función $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2 & \text{si } x \leq 1 \\ nx + n & \text{si } x > 1 \end{cases}$ es continua en todo \mathbb{R} . Calcula el valor de n .

10. Comprueba que la función $f(x) = \frac{|x|}{1+x}$ tiene dos asíntotas horizontales distintas.

11. Calcula el valor de k para que $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+2} - k}{x+1} = 1$.

12. Estudia la continuidad de las siguientes funciones:

$$f(x) = e^{2x} - 3$$

$$f(x) = \frac{x}{\ln(2x+6)}$$

$$f(x) = \frac{1}{1-|x|}$$

$$f(x) = \operatorname{tg} 3x$$

13. Estudia la continuidad de la función $f(x) = \begin{cases} x^2 \cdot e^{2x} & \text{si } x \leq 0 \\ x \cdot \ln x & \text{si } x > 0 \end{cases}$.

14. Encuentra el valor del parámetro a sabiendo que la función $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 + ax - 2}{2x^2 + x - 10} & \text{si } x < 2 \\ \frac{4\sqrt{x-1} - 12}{3x - 30} & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$

es continua en $x = 2$. Estudia entonces las discontinuidades de $f(x)$.

15. Dada la función $f(x) = \frac{x^2 + 3x + 2}{x \cdot \ln(x+2)}$, estudia su dominio y el comportamiento cuando $x \rightarrow -2$ y cuando $x \rightarrow 0$.

16. Se sabe que la función $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x^2 + mx + 2}$ es discontinua en $x = 1$, halla m y clasifica todas las discontinuidades de la función $f(x)$.

17. Qué valor ha de tener m para que la función $f(x) = \frac{2x^2 + mx + 3}{2x + 1}$ sólo tenga discontinuidades evitables.

18. La función $f(x) = \frac{x^2 - 2x + n}{x^3 + mx^2 - 14x}$ tiene una discontinuidad evitable en $x = 2$. Hállense m, n , y todas sus discontinuidades.