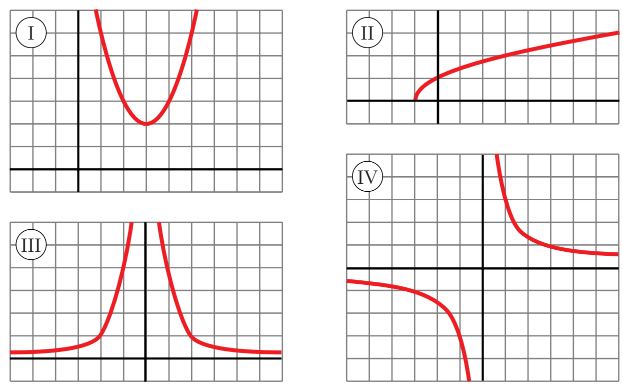
10 FUNCIONES ELEMENTALES

Página 244

PARA EMPEZAR, REFLEXIONA Y RESUELVE

Problema 1

Las siguientes gráficas corresponden a funciones, algunas de las cuales conoces y otras no. En cualquier caso, vas a trabajar con ellas.



■ **Las ecuaciones correspondientes a estas gráficas son:**

a) $y = \dfrac{4}{x^2}$ **b)** $y = \sqrt{x+1}$ **c)** $y = \dfrac{3}{x}$ **d)** $y = x^2 - 6x + 11$

Asigna a cada gráfica su ecuación haciendo uso, sucesivamente, de:

- **el conocimiento que ya tienes de algunas de ellas;**
- **la comprobación, mediante cálculo mental, de algunos de sus puntos;**
- **y, en caso de necesidad, recurriendo a la calculadora para obtener varios de sus puntos.**

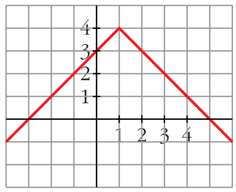
a) $\Leftrightarrow$ III b) $\Leftrightarrow$ II c) $\Leftrightarrow$ IV d) $\Leftrightarrow$ I

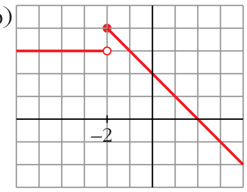
Página 245

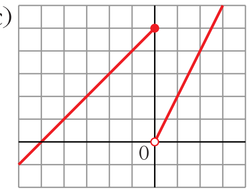
Problema 2

■ **Teniendo en cuenta los pasos descritos antes, representa gráficamente las siguientes funciones:**

a) $y = \begin{cases} x+3 & \text{si } x < 1 \\ 5-x & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$ **b)** $y = \begin{cases} 3 & \text{si } x < -2 \\ 2-x & \text{si } x \geq -2 \end{cases}$ **c)** $y = \begin{cases} x+5 & \text{si } x \leq 0 \\ 2x & \text{si } x > 0 \end{cases}$

a) 

b) 

c) 

Página 247

1. Halla el dominio de definición de las siguientes funciones:

a) $y = \sqrt{x^2 + 1}$ **b)** $y = \sqrt{x - 1}$ **c)** $y = \sqrt{1 - x}$

d) $y = \sqrt{4 - x^2}$ **e)** $y = \sqrt{x^2 - 4}$ **f)** $y = 1/\sqrt{x^2 - 1}$

g) $y = 1/\sqrt{x - 1}$ **h)** $y = 1/\sqrt{1 - x}$ **i)** $y = 1/\sqrt{4 - x^2}$

j) $y = 1/\sqrt{x^2 - 4}$ **k)** $y = x^3 - 2x + 3$ **l)** $y = \dfrac{1}{x}$

m) $y = \dfrac{1}{x^2}$ **n)** $y = \dfrac{1}{x^2 - 4}$ **ñ)** $y = \dfrac{1}{x^2 + 4}$

o) $y = \dfrac{1}{x^3 + 1}$

p) El área de un cuadrado de lado variable, l, es $A = l^2$.

a) $\mathbb{R}$ b) $[1, \infty)$ c) $(-\infty. 1]$

d) $[-2, 2]$ e) $(-\infty, -2] \cup [2, \infty)$ f) $(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$

g) $(1, \infty)$ h) $(-\infty, 1)$ i) $(-2, 2)$

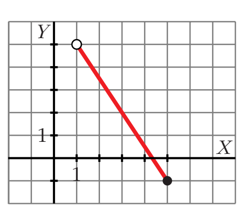
j) $(-\infty, -2) \cup (2, \infty)$ k) $\mathbb{R}$ l) $\mathbb{R} - \{0\}$

m) $\mathbb{R} - \{0\}$ n) $\mathbb{R} - \{-2, 2\}$ ñ) $\mathbb{R}$

o) $\mathbb{R} - \{-1\}$ p) $l > 0$

Página 248

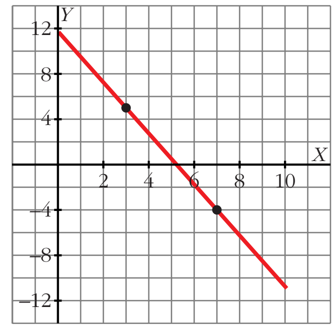
1. Representa la siguiente función: $y = -2x + 7$, $x \in (1, 4]$.



2. **Una función lineal f cumple: $f(3) = 5$, $f(7) = -4$, $D(f) = [0, 10]$. ¿Cuál es su expresión analítica? Represéntala.**

$$m = \frac{-4-5}{7-3} = -\frac{9}{4}$$

$$y = 5 - \frac{9}{4}(x-3) = -\frac{9}{4}x + \frac{47}{4}, \quad x \in [0, 10]$$

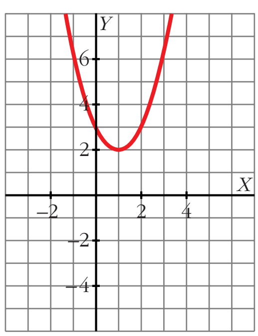


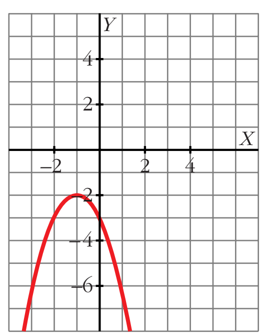
Página 249

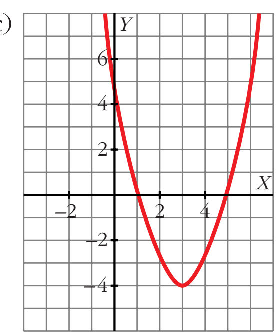
1. **Representa las parábolas:**

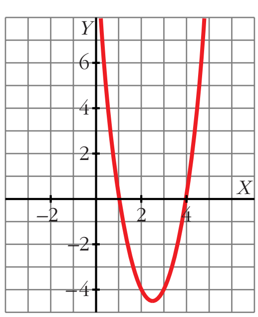
a) $y = x^2 - 2x + 3$ **b)** $y = -x^2 - 2x - 3$ **c)** $y = x^2 - 6x + 5$

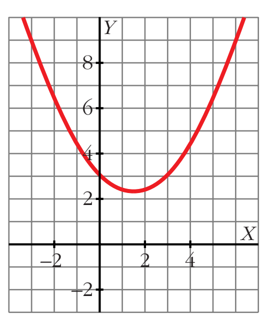
d) $y = 2x^2 - 10x + 8$ **e)** $y = \frac{1}{3}x^2 - x + 3$ **f)** $y = \frac{1}{4}x^2 + x - 2$

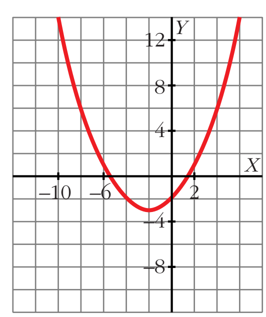
a)


b)


c)


d)


e)


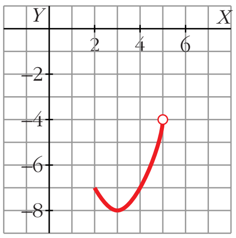
f)


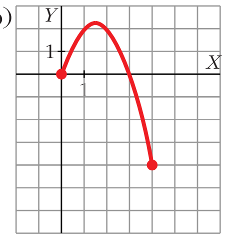
2. **Representa las funciones:**

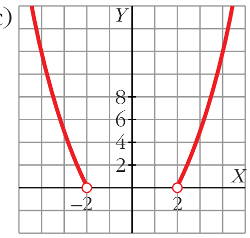
a) $y = x^2 - 6x + 1, \quad x \in [2, 5)$

b) $y = -x^2 + 3x, \quad x \in [0, 4]$

c) $y = x^2 - 4, \quad x \in (-\infty, -2) \cup (2, -\infty)$

a)


b)


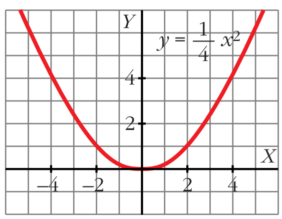
c)


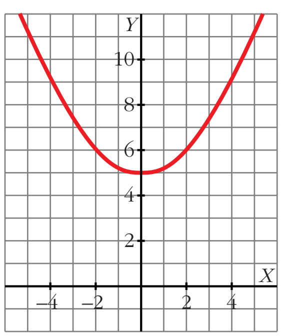
Página 250

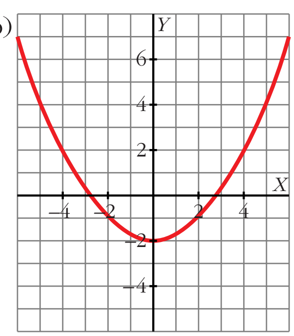
1. **Representa $y = \frac{1}{4}x^2$. A partir de ella, representa:**

a) $y = \frac{1}{4}x^2 + 5$

b) $y = \frac{1}{4}x^2 - 2$



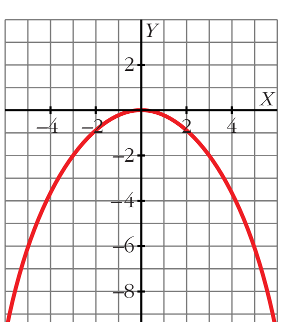
a)


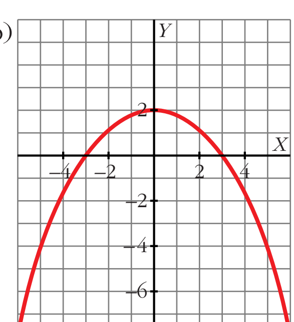
b)


2. **Teniendo en cuenta el ejercicio anteior, representa:**

a) $y = -\frac{1}{4}x^2$

b) $y = -\frac{1}{4}x^2 + 2$

a)


b)


Página 251

1. **Representa** $y = f(x) = \frac{1}{4}x^2$ **para** $x \geq 1$.

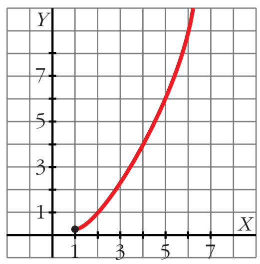
A partir de ella, representa:

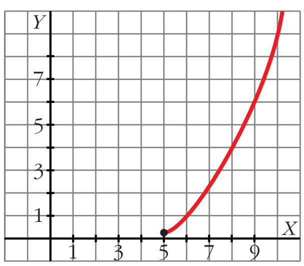
a) $y = f(x - 5)$

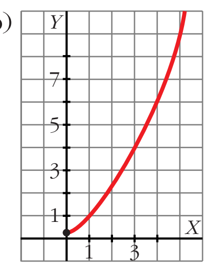
b) $y = f(x + 1)$

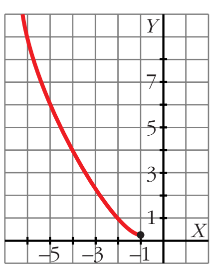
c) $y = f(-x)$

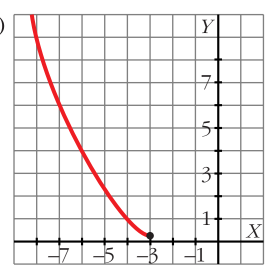
d) $y = f(-x + 2)$



a)


b)


c)


d)


Página 252

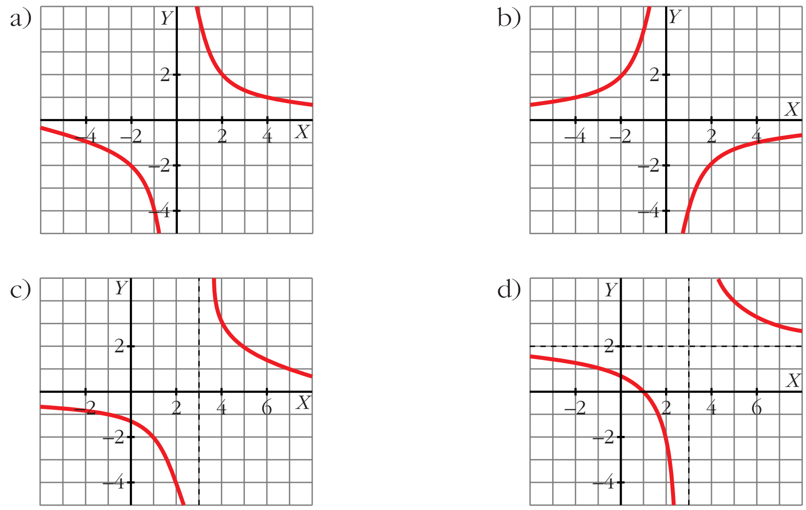
1. **Representa:**

a) $y = \frac{4}{x}$

b) $y = -\frac{4}{x}$

c) $y = \frac{4}{x - 3}$

d) $y = \frac{4}{x - 3} + 2$



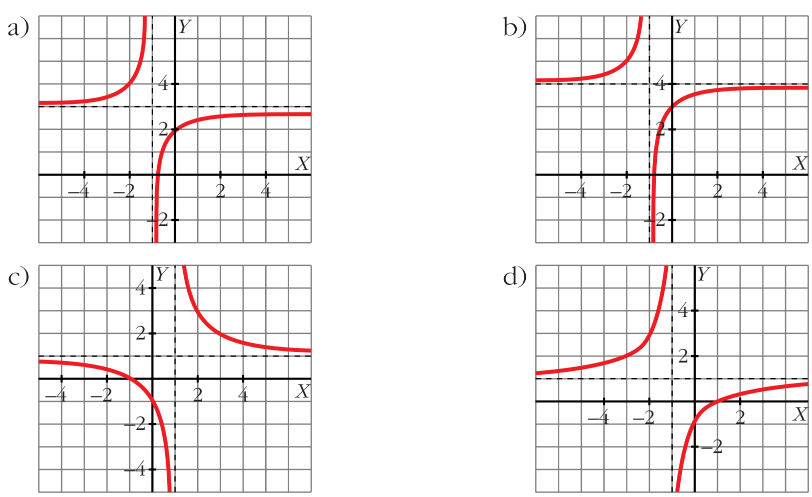
2. **Representa estas funciones:**

a) $y = \dfrac{3x + 2}{x + 1}$

b) $y = \dfrac{4x + 3}{x + 1}$

c) $y = \dfrac{x + 1}{x - 1}$

d) $y = \dfrac{x - 1}{x + 1}$



Página 253

1. **Representa las siguientes funciones:**

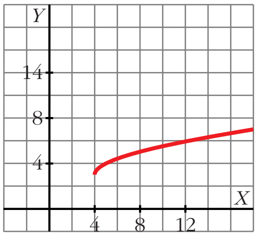
a) $y = 3 + \sqrt{x - 4}$

b) $y = \sqrt{2 - x}$

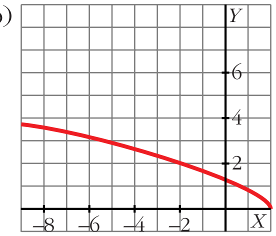
c) $y = \sqrt[3]{-x}$

d) $y = \sqrt[3]{-x} + 2$

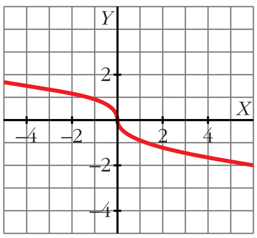
a)



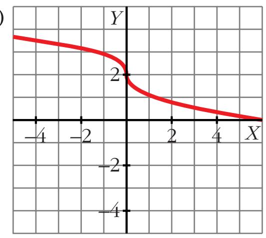
b)



c)



d)



2. Representa:

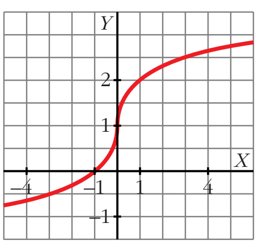
a) $y = \sqrt[3]{x} + 1$

b) $y = \sqrt[3]{x + 1}$

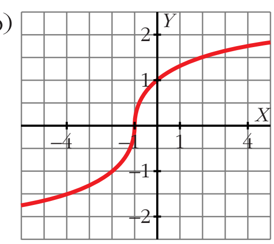
c) $y = \sqrt[3]{-x + 1}$

d) $y = -\sqrt{4 - x}$

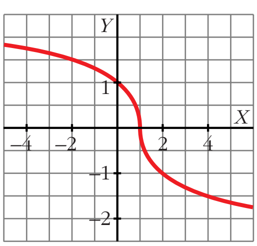
a)



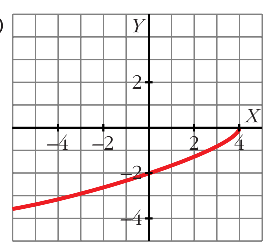
b)



c)



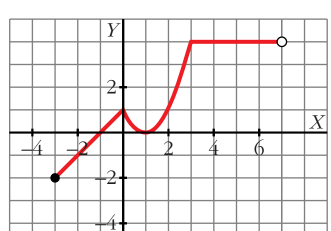
d)



Página 254

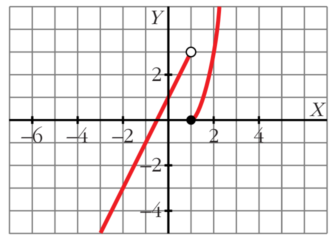
1. Representa esta función:

$$f(x) = \begin{cases} x + 1 & x \in [-3, 0) \\ x^2 - 2x + 1 & x \in [0, 3] \\ 4 & x \in (3, 7) \end{cases}$$



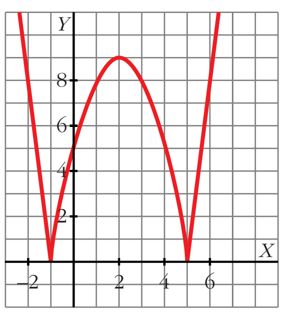
2. **Haz la representación gráfica de la siguiente función:**

b) $g(x) = \begin{cases} 2x + 1 & x < 1 \\ x^2 - 1 & x \geq 1 \end{cases}$

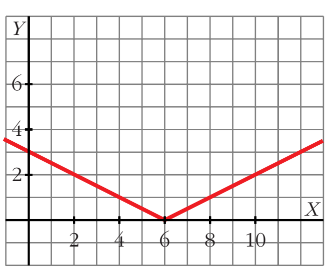


Página 255

1. **Representa:** $y = |-x^2 + 4x + 5|$



2. **Representa gráficamente:** $y = \left|\dfrac{x}{2} - 3\right|$



Página 256

1. **Si** $f(x) = x^2 - 5x + 3$ **y** $g(x) = x^2$, **obtén las expresiones de** $f[g(x)]$ **y** $g[f(x)]$. **Halla** $f[g(4)]$ **y** $g[f(4)]$.

$f[g(x)] = f[x^2] = x^4 - 5x^2 + 3$

$g[f(x)] = g[x^2 - 5x + 3] = (x^2 - 5x + 3)^2$

$f[g(4)] = 179; \quad g[f(4)] = 1$

2. **Si $f(x) = sen\ x$, $g(x) = x^2 + 5$, halla $f \circ g$, $g \circ f$, $f \circ f$ y $g \circ g$.**

Halla el valor de estas funciones en $x = 0$ y $x = 2$.

$f \circ g(x) = sen(x^2 + 5)$; $f \circ g(0) = -0{,}96$; $f \circ g(2) = 0{,}41$

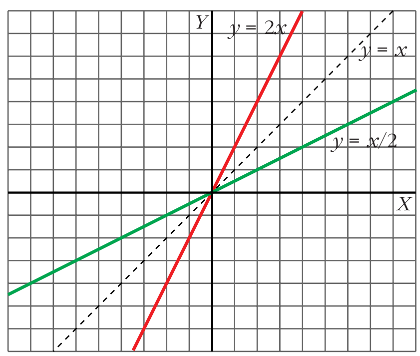
$g \circ f(x) = sen^2 x + 5$; $g \circ f(0) = 5$; $g \circ f(2) = 5{,}83$

$f \circ f(x) = sen(sen\ x)$; $f \circ f(0) = 0$; $f \circ f(2) = 0{,}79$

$g \circ g(x) = (x^2 + 5)^2 + 5$; $g \circ g(0) = 30$; $g \circ g(2) = 86$

Página 257

1. **Representa $y = 2x$, $y = x/2$ y comprueba que son inversas.**



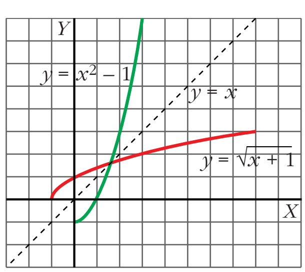
2. **Comprueba que hay que descomponer $y = x^2 - 1$ en dos ramas para hallar sus inversas respecto de la recta $y = x$. Averigua cuáles son.**

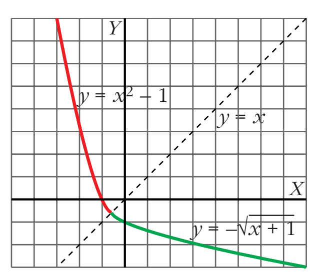
a) $y = x^2 - 1$ si $x \geq 0$

$y^{-1} = \sqrt{x + 1}$

b) $y = x^2 - 1$ si $x < 0$

$y^{-1} = -\sqrt{x + 1}$



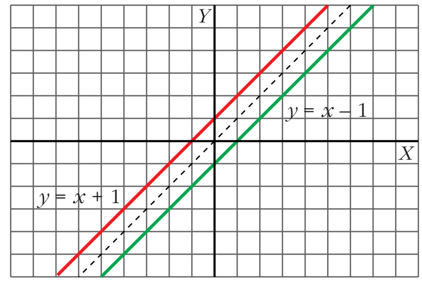


3. **Si $f(x) = x + 1$ y $g(x) = x - 1$, comprueba que $f[g(x)] = x$. ¿Son $f(x)$ y $g(x)$ funciones inversas? Comprueba que el punto $(a, a + 1)$ está en la gráfica de f y que el punto $(a + 1, a)$ está en la gráfica de g.**

Representa las dos funciones y observa su simetría respecto de la recta $y = x$.

$f[g(x)] = f(x-1) = (x-1) + 1 = x$

Son funciones inversas.

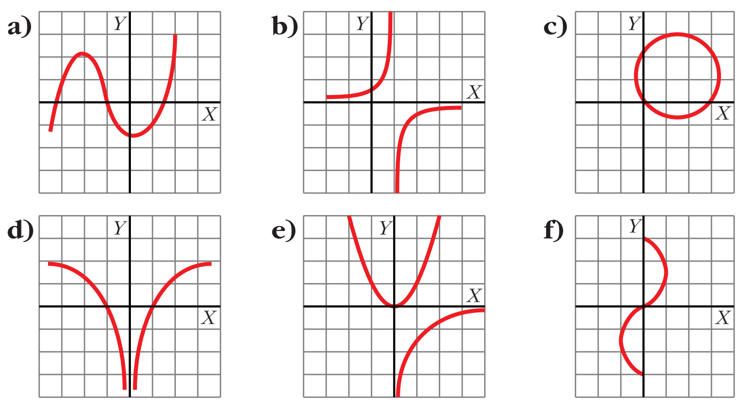


Página 266

EJERCICIOS Y PROBLEMAS PROPUESTOS

PARA PRACTICAR

1 **¿Cuáles de estas gráficas son funciones?**



Son funciones a), b) y d).

2 **Indica si los valores de x: 0; –2; 3,5; $\sqrt{2}$; –0,25 pertenecen al dominio de estas funciones:**

a) $y = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$

b) $y = \dfrac{x}{x^2 - 4}$

c) $y = x - \sqrt{2}$

d) $y = \sqrt{x^2 + 4}$

e) $y = \sqrt{x - 3}$

f) $y = \sqrt{7 - 2x}$

a) 3,5; $\sqrt{2}$

b) Todos salvo –2

c) Todos

d) Todos

e) 3,5

f) Todos

3 **Halla el dominio de definición de las siguientes funciones:**

a) $y = \dfrac{3}{x^2 + x}$ **b)** $y = \dfrac{x}{(x-2)^2}$

c) $y = \dfrac{x-1}{2x+1}$ **d)** $y = \dfrac{1}{x^2 + 2x + 3}$

e) $y = \dfrac{2}{5x - x^2}$ **f)** $y = \dfrac{1}{x^2 - 2}$

a) $\mathbb{R} - \{-1, 0\}$ b) $\mathbb{R} - \{2\}$

c) $\mathbb{R} - \{-1/2\}$ d) $\mathbb{R}$

e) $\mathbb{R} - \{0, 5\}$ f) $\mathbb{R} - \{-\sqrt{2}, \sqrt{2}\}$

4 **Halla el dominio de definición de estas funciones:**

a) $y = \sqrt{3 - x}$ **b)** $y = \sqrt{2x - 1}$

c) $y = \sqrt{-x - 2}$ **d)** $y = \sqrt{-3x}$

a) $(-\infty, 3]$ b) $[1/2, +\infty)$

c) $(-\infty, -2]$ d) $(-\infty, 0]$

5 **Halla el dominio de definición de estas funciones:**

a) $y = \sqrt{x^2 - 9}$ **b)** $= \sqrt{x^2 + 3x + 4}$

c) $y = \sqrt{12x - 2x^2}$ **d)** $y = \sqrt{x^2 - 4x - 5}$

e) $y = \dfrac{1}{\sqrt{4 - x}}$ **f)** $y = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 - 3x}}$

g) $y = \dfrac{-1}{x^3 - x^2}$ **h)** $y = \dfrac{2x}{x^4 - 1}$

a) $x^2 - 9 \geq 0 \rightarrow (x + 3)(x - 3) \geq 0 \rightarrow$ *Dominio* $= (+\infty, -3] \cup [3, +\infty)$

b) $x^2 + 3x + 4 \geq 0 \rightarrow$ *Dominio* $= \mathbb{R}$

c) $12x - 2x^2 \geq 0 \rightarrow 2x(6 - x) \geq 0 \rightarrow$ *Dominio* $= [0, 6]$

d) $x^2 - 4x - 5 \geq 0 \rightarrow (x + 1)(x - 5) \geq 0 \rightarrow$ *Dominio* $= (-\infty, -1] \cup [5, +\infty)$

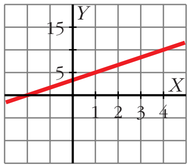
e) $4 - x > 0 \rightarrow 4 > x \rightarrow$ *Dominio* $= (-\infty, 4)$

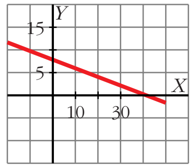
f) $x^2 - 3x > 0 \rightarrow x(x - 3) > 0 \rightarrow$ *Dominio* $= (-\infty, 0) \cup (3, +\infty)$

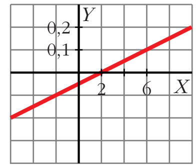
g) $x^3 - x^2 = 0 \rightarrow x^2(x - 1) = 0 \rightarrow x_1 = 0,\ x_2 = 1 \rightarrow$ *Dominio* $= \mathbb{R} - \{0, 1\}$

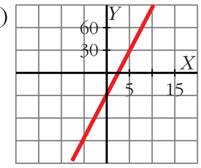
h) $x^4 - 1 = 0 \rightarrow x^4 = 1 \rightarrow x = \pm\sqrt[4]{1} = \pm 1 \rightarrow$ *Dominio* $= \mathbb{R} - \{-1, 1\}$

6 **Elige dos puntos en cada una de estas rectas y escribe su ecuación:**

a) 

b) 

c) 

d) 

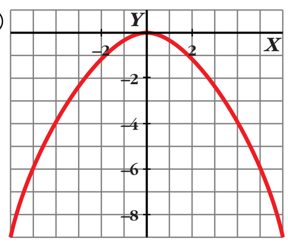
a) $y = \frac{5}{3}x + \frac{10}{3}$ b) $y = -\frac{1}{5}x + 8$

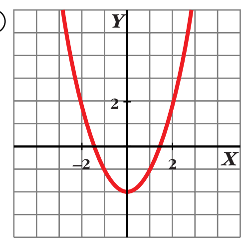
c) $y = 0{,}025x - 0{,}05$ d) $y = 12x - 30$

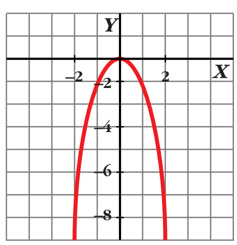
7 **Asocia a cada una de estas parábolas una de estas ecuaciones:**

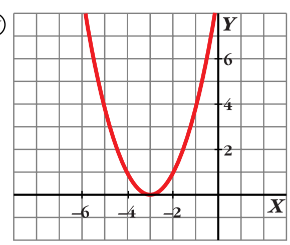
a) $y = x^2 - 2$ **b)** $y = -0{,}25x^2$

c) $y = (x + 3)^2$ **d)** $y = -2x^2$

I 

II 

III 

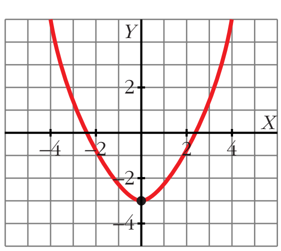
IV 

a) II b) I c) IV d) III

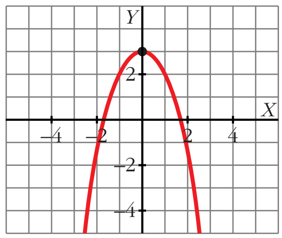
8 **Representa las siguientes parábolas hallando el vértice, los puntos de corte con los ejes de coordenadas y algún punto próximo al vértice:**

a) $y = 0{,}5x^2 - 3$ **b)** $y = -x^2 + 3$

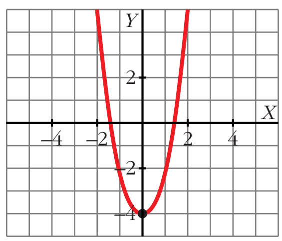
c) $y = 2x^2 - 4$ **d)** $y = -\frac{3x^2}{2}$

a) 

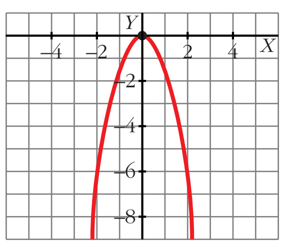
Vértice: $(0, -3)$. Corte con los ejes: $(-\sqrt{6}, 0)$, $(\sqrt{6}, 0)$, $(0, -3)$

b) 

Vértice: $(0, 3)$. Corte con los ejes: $\left(\sqrt{3}, 0\right), \left(-\sqrt{3}, 0\right), (0, 3)$

c) 

Vértice: $(0, -4)$. Corte con los ejes: $\left(\sqrt{2}, 0\right), \left(-\sqrt{2}, 0\right), (0, -4)$

d) 

Vértice: $(0, 0)$. Corte con los ejes: $(0, 0)$

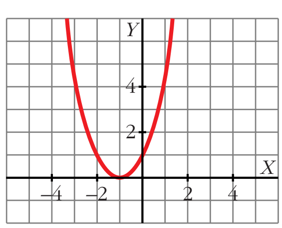
9 **Representa las siguientes funciones:**

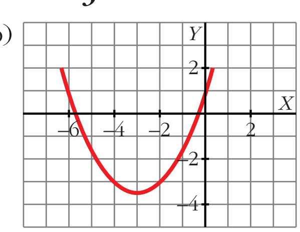
a) $y = x^2 + 2x + 1$

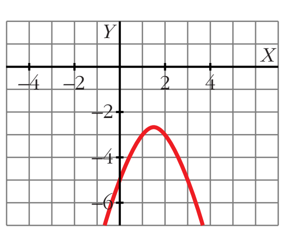
b) $y = \dfrac{x^2}{2} + 3x + 1$

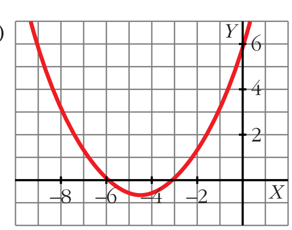
c) $y = -x^2 + 3x - 5$

d) $y = \dfrac{x^2}{3} + 3x + 6$

a) 

b) 

c) 

d) 

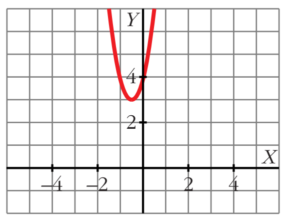
Página 267

10 **En las siguientes parábolas, halla el vértice y comprueba que ninguna de ellas corta al eje de abscisas. Obtén algún punto a la derecha y a la izquierda del vértice y represéntalas gráficamente:**

a) $y = 4(x^2 + x + 1)$ **b)** $y = 5(x + 2)^2 + 1$

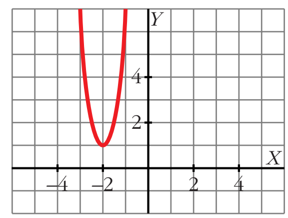
c) $y = -x^2 - 2$ **d)** $y = -\frac{3}{4}(x^2 + 2)$

a)



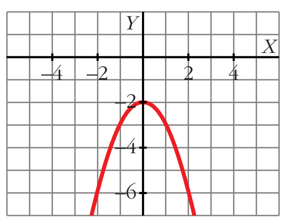
Vértice: $\left(-\frac{1}{2}, 3\right)$

b)



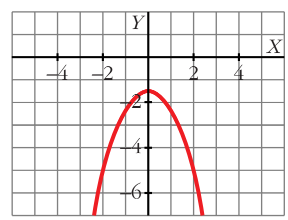
Vértice: $(-2, 1)$

c)



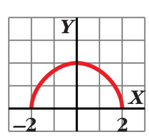
Vértice: $(0, -2)$

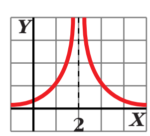
d)

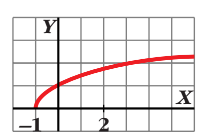


Vértice: $\left(0, -\frac{3}{2}\right)$

11 **Observando la gráfica de estas funciones, indica cuál es su dominio de definición y su recorrido:**







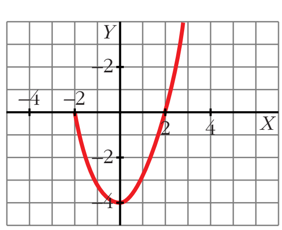
Los dominios son, por orden: $[-2, 2]$; $(-\infty, 2) \cup (2, +\infty)$ y $[-1, +\infty)$.

Los recorridos son, por orden: $[0, 2]$, $(0, +\infty)$ y $[0, +\infty)$.

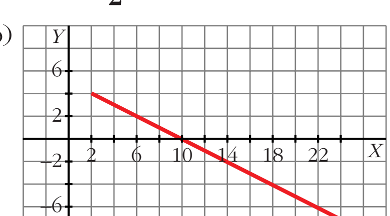
12 **Representa las siguientes funciones en las que se ha restringido voluntariamente su dominio:**

a) $y = x^2 - 4$, **si** $x \in [-2, 3]$ **b)** $y = 5 - \frac{x}{2}$, **si** $x \in [2, +\infty)$

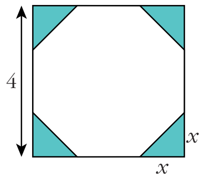
a)



b)



13 **De un cuadrado de 4 cm de lado, se cortan en las esquinas triángulos rectángulos isósceles cuyos lados iguales miden x.**



a) Escribe el área del octógono que resulta en función de x.

b) ¿Cuál es el dominio de esa función? ¿Y su recorrido?

a) $A(x) = 16 - 2x^2$

b) Dominio: $(0, 2)$. Recorrido: $(8, 16)$

14 **Una empresa fabrica envases con forma de prisma de dimensiones x, $x/2$ y $2x$ cm.**

a) Escribe la función que da el volumen del envase en función de x.

b) Halla su dominio sabiendo que el envase más grande tiene 1 l de volumen. ¿Cuál es su recorrido?

a) $V(x) = x^3$

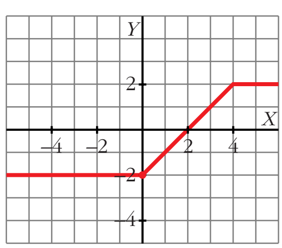
b) Domini: $(0, 10)$. Recorrido: $(0, 1\,000)$

15 **Representa gráficamente las siguientes funciones:**

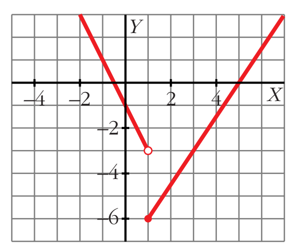
a) $y = \begin{cases} -2 & \text{si } x < 0 \\ x - 2 & \text{si } 0 \le x < 4 \\ 2 & \text{si } x \ge 4 \end{cases}$

b) $y = \begin{cases} -2x - 1 & \text{si } x < 1 \\ (3x - 15)/2 & \text{si } x \ge 1 \end{cases}$

a)



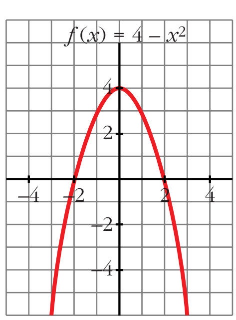
b)



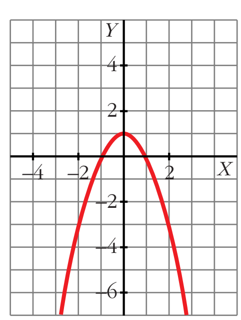
16 **Representa $f(x) = 4 - x^2$ y, a partir de ella, representa:**

a) $g(x) = f(x) - 3$

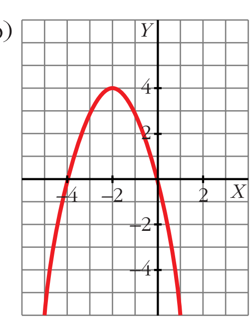
b) $h(x) = f(x + 2)$



a)



b)



17 **Halla el dominio de definición de estas funciones:**

a) $y = \sqrt{x^2 - 2x}$ **b)** $y = \sqrt{x^2 + 3}$

c) $y = \sqrt{5 - x^2}$ **d)** $y = \sqrt{x^2 - 3x + 2}$

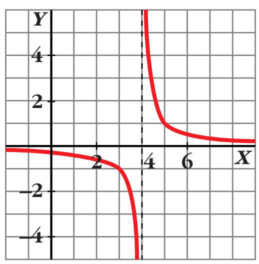
a) $(-\infty, 0] \cup [2, +\infty)$ b) $\mathbb{R}$

c) $[-\sqrt{5}, \sqrt{5}]$ d) $(-\infty, 1] \cup [2, +\infty)$

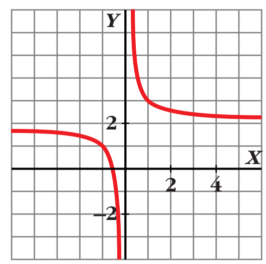
18 **Asocia a cada una de las gráficas una de las siguientes expresiones analíticas:**

a) $y = \dfrac{1}{x} + 2$ **b)** $y = \dfrac{1}{x + 3}$ **c)** $y = \dfrac{1}{x} - 3$ **d)** $y = \dfrac{1}{x - 4}$

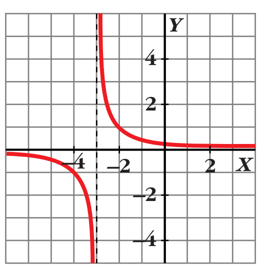
I



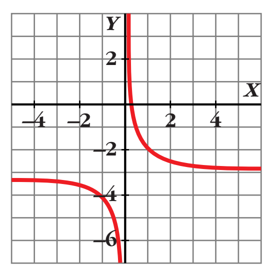
II



III

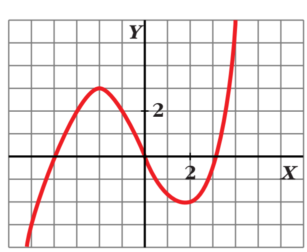


IV



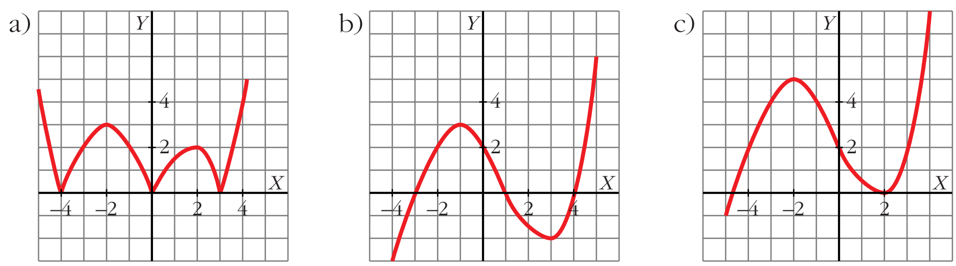
a) II b) III c) IV d) I

19 **Esta es la gráfica de la función** $y = f(x)$**:**



Representa, a partir de ella, las funciones:

a) $y = |f(x)|$ **b)** $y = f(x - 1)$ **c)** $y = f(x) + 2$



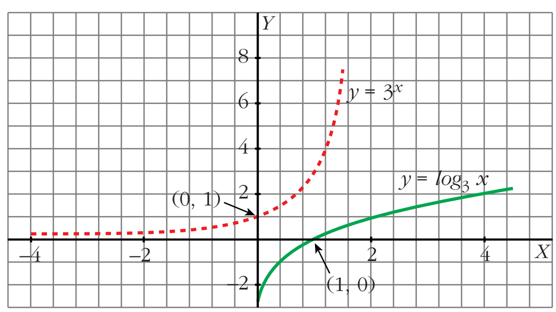
Página 268

20 **Haz una tabla de valores de la función $y = 3^x$. A partir de ella, representa la función $y = log_3\ x$.**

☛ ***Si el punto (2, 9) pertenece a $y = 3^x$, el punto (9, 2) pertenecerá a $y = log_3\ x$.***

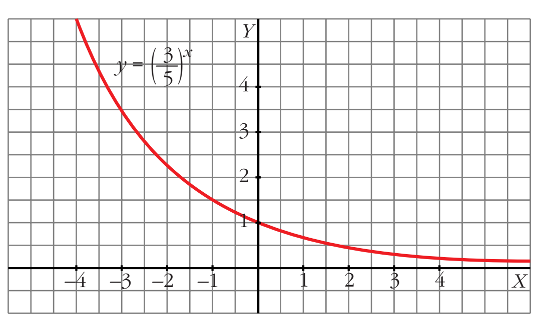
x	–2	–1	0	1	2
3^x	1/9	1/3	1	3	9

x	1/9	1/3	1	3	9
$log_3\ x$	–2	–1	0	1	2

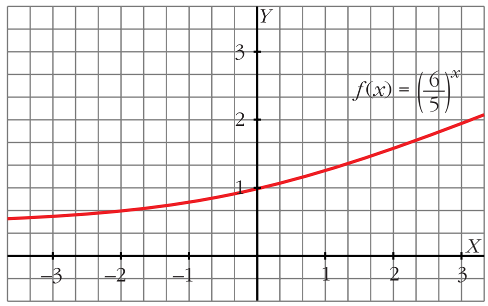


21 **Con ayuda de la calculadora, haz una tabla de valores de la función $y = \left(\frac{3}{5}\right)^x$ y represéntala gráficamente.**

x	–3	–2	–1	0	1	2	3
y	4,63	2,78	1,67	1	0,6	0,36	0,22



22 **Representa la función $y = \left(\frac{6}{5}\right)^x$. ¿Es creciente o decreciente?**



Es una función creciente en todo $\mathbb{R}$.

23 **Considera las funciones f y g definidas por las expresiones $f(x) = x^2 + 1$ y $g(x) = \frac{1}{x}$.**

Calcula:

a) $(f \circ g)(2)$

b) $(g \circ f)(-3)$

c) $(g \circ g)(x)$

d) $(f \circ g)(x)$

a) $\frac{5}{4}$

b) $\frac{1}{10}$

c) $g(g(x)) = x$

d) $f(g(x)) = \frac{1 + x^2}{x^2}$

24 **Dadas las funciones $f(x) = \cos x$ y $g(x) = \sqrt{x}$, halla:**

a) $(f \circ g)(x)$

b) $(g \circ f)(x)$

c) $(g \circ g)(x)$

a) $f[g(x)] = \cos \sqrt{x}$

b) $g[f(x)] = \sqrt{\cos x}$

c) $g[g(x)] = \sqrt[4]{x}$

25 **Halla la función inversa de estas funciones:**

a) $y = 3x$

b) $y = x + 7$

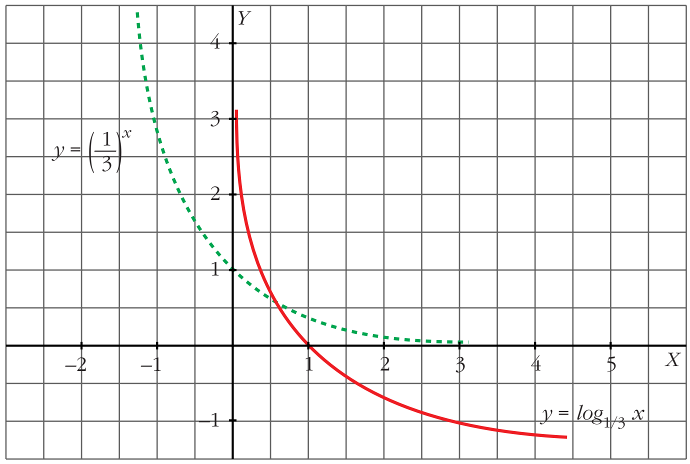
c) $y = 3x - 2$

a) $x = 3y \rightarrow y = \frac{x}{3} \rightarrow f^{-1}(x) = \frac{x}{3}$

b) $x = y + 7 \rightarrow y = x - 7 \rightarrow f^{-1}(x) = x - 7$

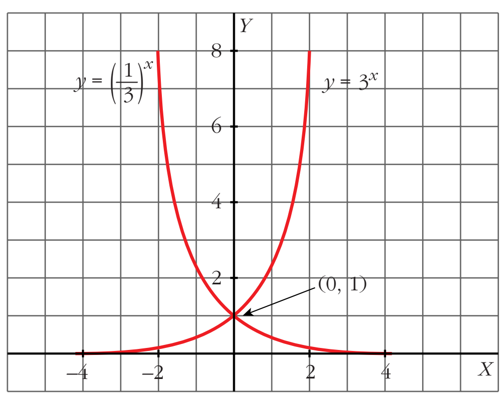
c) $x = 3y - 2 \rightarrow y = \frac{x+2}{3} \rightarrow f^{-1}(x) = \frac{x+2}{3}$

26 **Representa la gráfica de $y = log_{1/3}\, x$ a partir de la gráfica de $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$.**



27 **Comprueba que las gráficas de $y = 3^x$ e $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ son simétricas respecto al eje OY.**

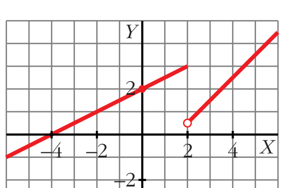
☛ ***Represéntalas en los mismos ejes.***



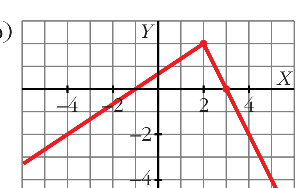
PARA RESOLVER

28 **Representa: a)** $y = \begin{cases} x/2 + 2 & \text{si } x \le 2 \\ x - 3/2 & \text{si } x > 2 \end{cases}$ **b)** $y = \begin{cases} (2x + 2)/3 & \text{si } x < 2 \\ -2x + 6 & \text{si } x \ge 2 \end{cases}$

a)



b)



29 **Dibuja la gráfica de las siguientes funciones:**

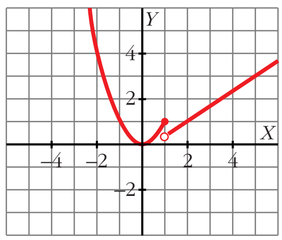
a) $y = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \le 1 \\ (2x-1)/3 & \text{si } x > 1 \end{cases}$

b) $y = \begin{cases} x^2 - 2x & \text{si } x \le 2 \\ 3 & \text{si } x > 2 \end{cases}$

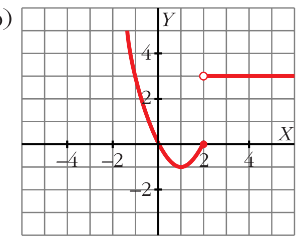
c) $y = \begin{cases} -x^2 - 4x - 2 & \text{si } x < -1 \\ x^2 & \text{si } x \ge -1 \end{cases}$

d) $y = \begin{cases} -x^2 & \text{si } x < 0 \\ x^2 & \text{si } x \ge 0 \end{cases}$

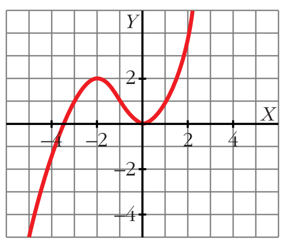
a)



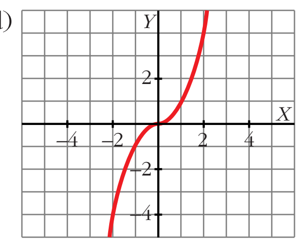
b)



c)



d)

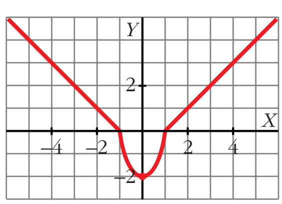


30 **Representa:**

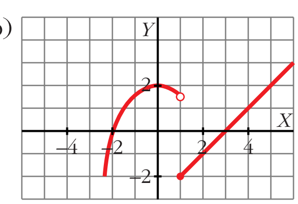
a) $y = \begin{cases} -x - 1 & \text{si } x \le -1 \\ 2x^2 - 2 & \text{si } -1 < x < 1 \\ x - 1 & \text{si } x \ge 1 \end{cases}$

b) $y = \begin{cases} (-x^2/2) + 2 & \text{si } x < 1 \\ x - 3 & \text{si } x \ge 1 \end{cases}$

a)



b)



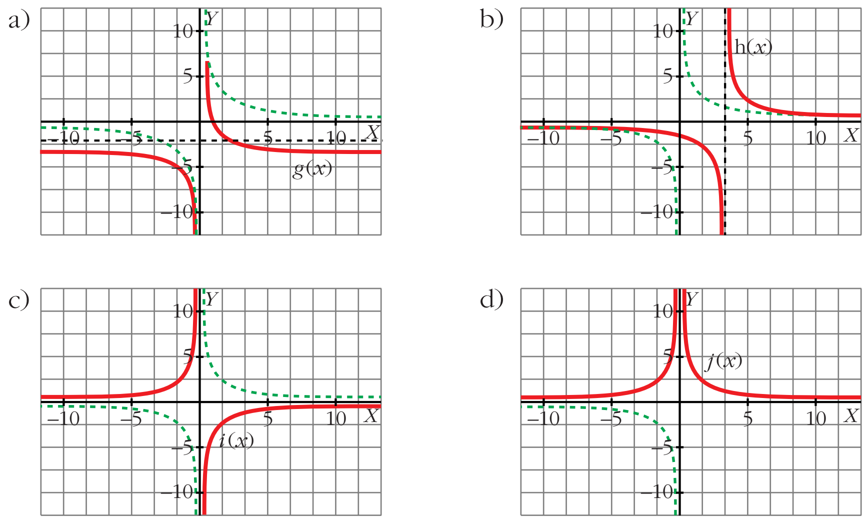
31 **A partir de la gráfica de $f(x) = 1/x$, representa:**

a) $g(x) = f(x) - 2$

b) $h(x) = f(x - 3)$

c) $i(x) = -f(x)$

d) $j(x) = |f(x)|$

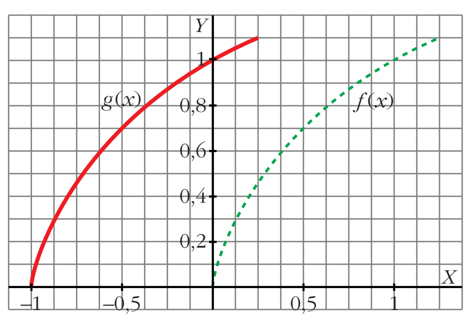


32 **Representa la función $f(x) = \sqrt{x}$ y dibuja, a partir de ella:**

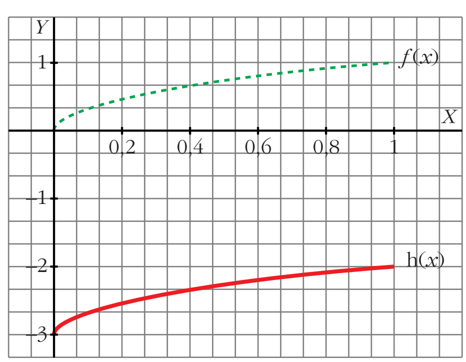
a) $g(x) = \sqrt{x + 1}$

b) $h(x) = \sqrt{x} - 3$

a)



b)



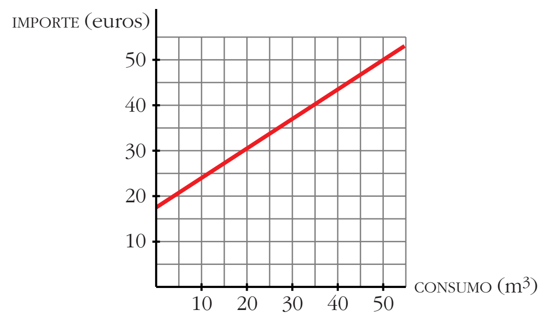
33 **La factura del gas de una familia, en septiembre, ha sido 24,82 euros por 12 m^3, y en octubre, 43,81 por 42 m^3.**

a) Escribe la función que da el importe de la factura según los m^3 consumidos y represéntala.

b) ¿Cuánto pagarán si consumen 28 m^3?

a) $y = 24,82 + 0,633(x - 12)$

$y(28) = 34,94$ euros



b) $y = 24,82 + 0,633(x - 12) = 0,633x + 17,22$

34 **El precio del billete de una línea de cercanías depende de los kilómetros recorridos. Por 57 km he pagado 2,85 euros y por 168 km, 13,4 euros. Calcula el precio de un billete para una distancia de 100 km. ¿Cuál es la función que nos indica el precio según los kilómetros recorridos?**

$$y = 2,85 + 0,095(x - 57)$$

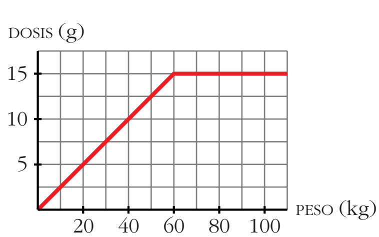
$$y(100) = 6,94 \text{ euros}$$

La función es: $y = 2,85 + 0,095(x - 57) = 0,095x - 2,565$

Página 269

35 **La dosis de un medicamento es 0,25 g por cada kilo de peso del paciente, hasta un máximo de 15 g. Representa la función *peso del paciente-cantidad de medicamento* y halla su expresión analítica.**

$y = 0,25x$ hasta un máximo de 15 g: $0,25x = 15 \;\to\; x = 60$ kg



$$y = \begin{cases} 0,25x & 0 < x < 60 \\ 15 & x \geq 60 \end{cases}$$

36 **Los gastos fijos mensuales de una empresa por la fabricación de x televisores son $G = 3\,000 + 25x$, en miles de euros, y los ingresos mensuales son $I = 50x - 0{,}02x^2$, también en miles de euros.**

¿Cuántos televisores deben fabricarse para que el beneficio (ingresos menos gastos) sea máximo?

La función *Beneficio* viene dada por la expresión:

$$B = I - G = 50x - 0{,}02x^2 - 3\,000 - 25x = -0{,}02x^2 + 25x - 3\,000$$

Se trata de una parábola con las ramas hacia abajo.

El máximo de la función se encuentra en el vértice:

$$x_0 = \frac{-b}{2a} = \frac{-25}{-0{,}04} = 625$$

El beneficio máximo se obtendrá para 625 televisores.

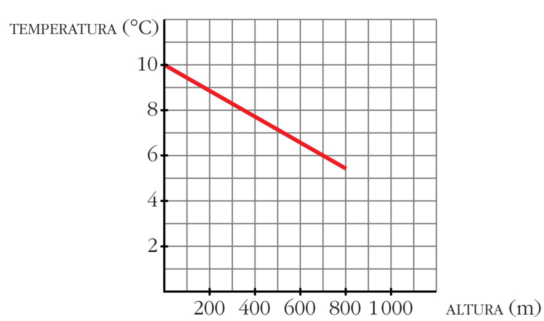
37 **Midiendo la temperaura a diferentes alturas, se ha observado que por cada 180 m de ascenso el termómetro baja 1 °C.**

Si en la base de una montaña de 800 m estamos a 10 °C, ¿cuál será la temperatura en la cima?

Representa gráficamente la función *altura-temperatura* y busca su expresión analítica.

☛ ***Haz una tabla de valores y represéntala.***

$T(h) = 10 - \dfrac{h}{180}$; $T(800) = 5{,}56$ °C



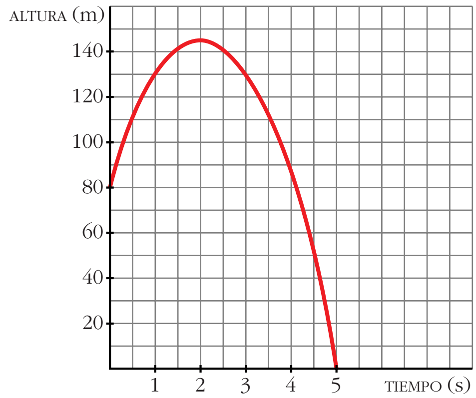
38 **Una pelota es lanzada verticalmente hacia arriba desde lo alto de un edificio. La altura que alcanza viene dada por la fórmula $h = 80 + 64t - 16t^2$ (t en segundos y h en metros).**

a) Dibuja la gráfica en el intervalo [0, 5].

b) Halla la altura del edificio.

c) ¿En qué instante alcanza su máxima altura?

a)



b) 80 metros.

c) 2 segundos.

39 **El precio de venta de un artículo viene dado por la expresión $p = 12 - 0{,}01x$ (x = número de artículos fabricados; p = precio, en cientos de euros).**

a) Si se fabrican y se venden 500 artículos, ¿cuáles serán los ingresos obtenidos?

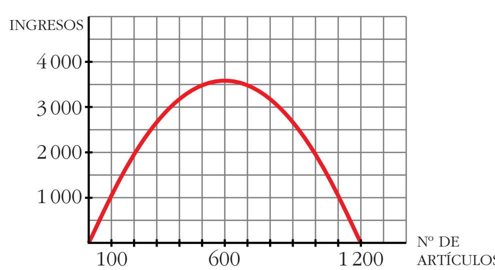
b) Representa la función *Nº de artículos-Ingresos*.

c) ¿Cuántos artículos se deben fabricar para que los ingresos sean máximos?

a) Si se venden 500 artículos, su precio será:

$$12 - 0{,}01 \cdot 500 = 7 \text{ cientos de euros} \rightarrow \text{Ingresos} = 350\,000 \text{ €}$$

b)



$I(x) = p \cdot x = 12x - 0{,}01x^2$

c) Deben fabricar 600 artículos para obtener los ingresos máximos (360 000 euros).

40 **Un fabricante vende mensualmente 100 electrodomésticos a 400 euros cada uno y sabe que por cada 10 euros de subida venderá 2 electrodomésticos menos.**

a) ¿Cuáles serán los ingresos si sube los precios 50 euros?

b) Escribe la función que relaciona la subida de precio con los ingresos mensuales.

c) ¿Cuál debe ser la subida para que los ingresos sean máximos?

a) En este caso vendería 90 electrodomésticos a 450 euros cada uno; luego los ingresos serían de $450 \cdot 90 = 40\,500$ euros.

b) $I(x) = (400 + 10x)(100 - 2x) = -20x^2 + 200x + 40\,000$

(x = decenas de euros)

c) El máximo se alcanza en el vértice de la parábola:

$$x = \frac{-b}{2a} = \frac{-200}{-40} = 5 \ \rightarrow \ 50 \text{ euros}$$

41 **El coste de producción de x unidades de un producto es igual a $(1/4)x^2 + 35x + 25$ euros y el precio de venta de una unidad es $50 - x/4$ euros.**

a) Escribe la función que nos da el beneficio total si se venden las x unidades producidas.

b) Halla el número de unidades que deben venderse para que el beneficio sea máximo.

☛ ***Los ingresos por la venta de x unidades son $x(50 - x/4)$ euros.***

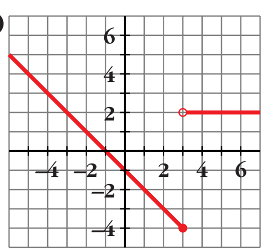
a) $B(x) = 50x - \dfrac{x^2}{4} - \left(\dfrac{1}{4}x^2 + 35x + 25\right) = -\dfrac{x^2}{2} + 15x - 25$

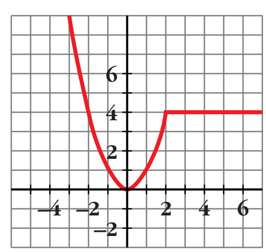
b) El máximo se alcanza en el vértice de la parábola: $x = \dfrac{-15}{-1} = 15$

Deben venderse 15 unidades.

42 **Busca la expresión analítica de estas funciones:**

a)



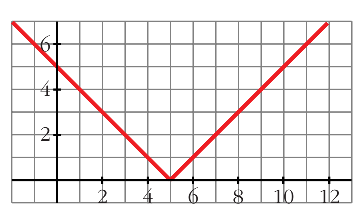


a) $f(x) = \begin{cases} -x - 1 & \text{si } x \le 3 \\ 2 & \text{si } x > 3 \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \le 2 \\ 4 & \text{si } x > 2 \end{cases}$

43 **Representa la función $y = |x - 5|$ y comprueba que su expresión analítica en intervalos es:**

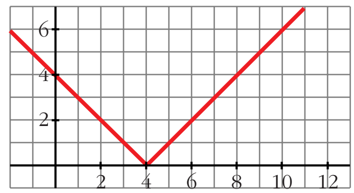
$$y = \begin{cases} -x + 5 & \text{si } x < 5 \\ x - 5 & \text{si } x \ge 5 \end{cases}$$



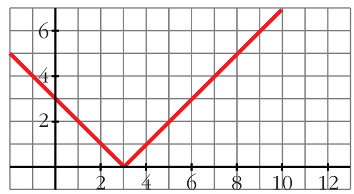
44 **Representa las siguientes funciones y defínelas por intervalos:**

a) $y = |4 - x|$ **b)** $y = |x - 3|$

a) $y = \begin{cases} 4 - x & \text{si } x < 4 \\ -4 + x & \text{si } x \geq 4 \end{cases}$



b) $y = \begin{cases} -x + 3 & \text{si } x < 3 \\ x - 3 & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$

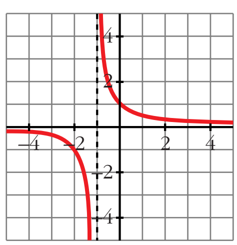


45 **Representa las siguientes funciones:**

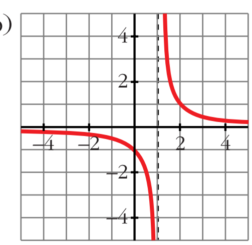
a) $y = \dfrac{1}{x + 1}$ **b)** $y = \dfrac{1}{x - 1}$

c) $y = \dfrac{-1}{x}$ **d)** $y = \dfrac{-1}{x - 3}$

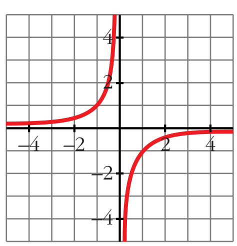
a)



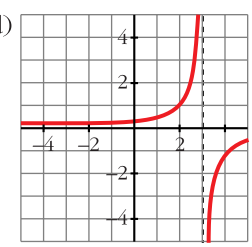
b)



c)



d)

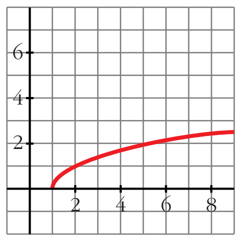


46 **Representa las siguientes funciones:**

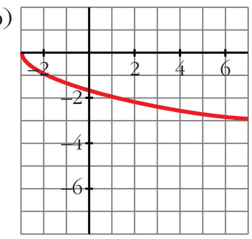
a) $y = \sqrt{x - 1}$ **b)** $y = -\sqrt{x + 3}$

c) $y = 2 + \sqrt{x}$ **d)** $y = 1 - \sqrt{x}$

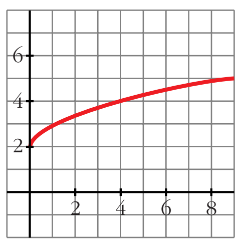
a)



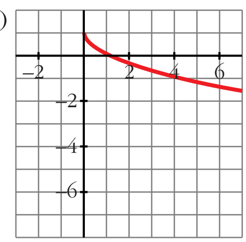
b)



c)



d)

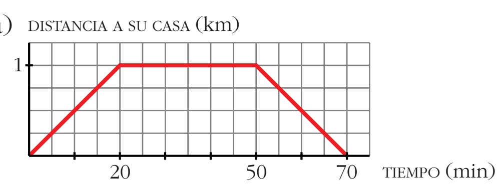


47 **Elena va a visitar a su amiga Ana y tarda 20 minutos en llegar a su casa, que está a 1 km de distancia. Está allí media hora y en el camino de vuelta emplea el mismo tiempo que en el de ida.**

a) Representa la función *tiempo-distancia*.

b) Busca su expresión analítica.

a)



b) $f(x) = \begin{cases} (1/20)x & \text{si} \quad 0 \le x \le 20 \\ 1 & \text{si} \quad 20 < x \le 50 \\ -1/20\,(x - 70) & \text{si} \quad 50 < x \le 70 \end{cases}$

Página 270

48 **Representa y define como funciones “a trozos”:**

a) $y = \left| \dfrac{x-3}{2} \right|$

b) $y = |3x + 6|$

c) $y = \left| \dfrac{2x-1}{3} \right|$

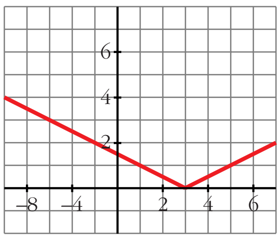
d) $y = |-x - 1|$

☛ ***Mira el ejercicio resuelto número 6.***

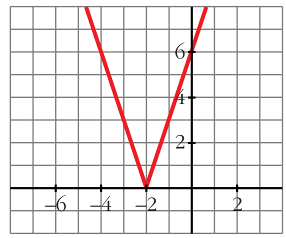
a) $y = \begin{cases} -\dfrac{x-3}{2} & \text{si } x < 3 \\[2mm] \dfrac{x-3}{2} & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$

b) $y = \begin{cases} -3x - 6 & \text{si } x < -2 \\ 3x + 6 & \text{si } x \geq -2 \end{cases}$

a)



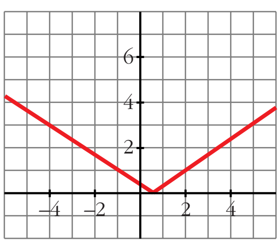
b)



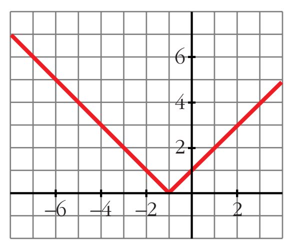
c) $y = \begin{cases} \dfrac{-2x+1}{3} & \text{si } x < \dfrac{1}{2} \\[2mm] \dfrac{2x-1}{3} & \text{si } x \geq \dfrac{1}{2} \end{cases}$

d) $y = \begin{cases} -x - 1 & \text{si } x < -1 \\ x + 1 & \text{si } x \geq -1 \end{cases}$

c)



d)

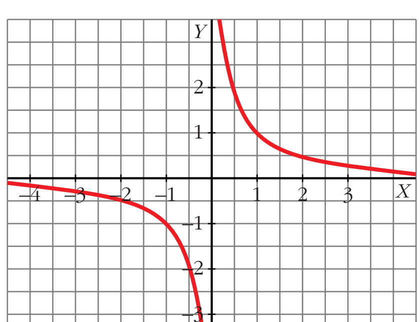


49 **Utilizando la relación $\dfrac{\textbf{Dividendo}}{\textbf{divisor}}$ = cociente + $\dfrac{\textbf{resto}}{\textbf{divisor}}$ podemos escribir la función $\boldsymbol{y = \dfrac{2x+3}{x+1}}$ de esta forma:**

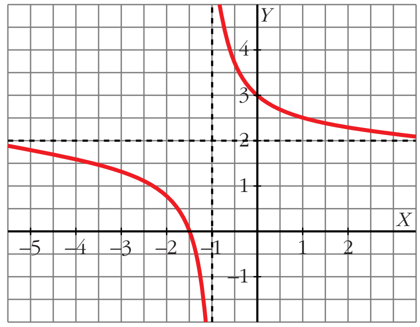
$$\boldsymbol{y = 2 + \frac{1}{x+1}}$$

Comprueba que su gráfica coincide con la de $\boldsymbol{y = 1/x}$ trasladada 1 unidad hacia la izquierda y 2 hacia arriba.

$y = \dfrac{1}{x}$

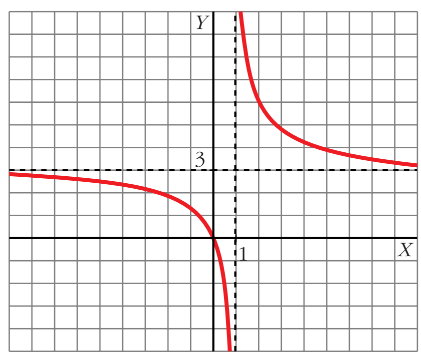


$y = 2 + \dfrac{1}{x + 1}$

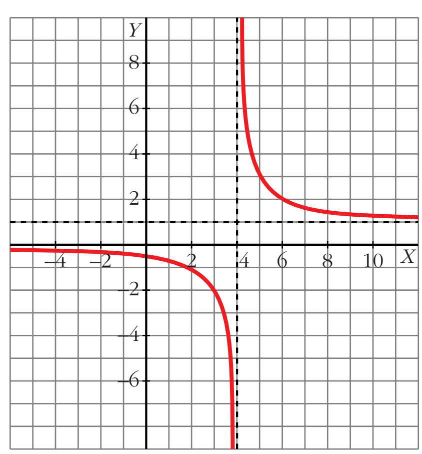


50 Representa las funciones $y = \dfrac{3x}{x - 1}$, $y = \dfrac{x - 2}{x - 4}$ utilizando el procedimiento del problema anterior.

$y = \dfrac{3x}{x - 1} = 3 + \dfrac{3}{x - 1}$



$y = \dfrac{x - 2}{x - 4} = 1 + \dfrac{2}{x - 4}$



51 **Con las funciones $f(x) = x - 5$, $g(x) = \sqrt{x}$, $h(x) = \dfrac{1}{x+2}$, hemos obtenido, por composición, estas otras:**

$$p(x) = \sqrt{x-5} \qquad q(x) = \sqrt{x} - 5 \qquad r(x) = \frac{1}{\sqrt{x}+2}$$

Explica cómo, a partir de f, g y h, se pueden obtener p, q y r.

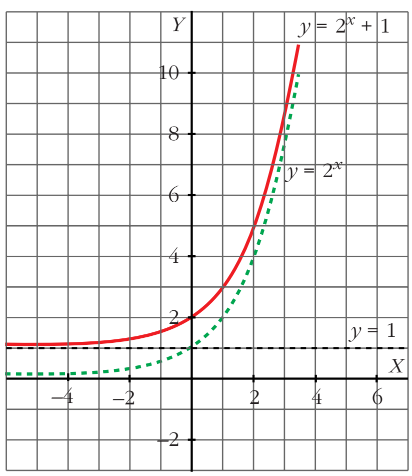
$$p = g \circ f \qquad q = f \circ g \qquad r = h \circ g$$

52 **Representa las funciones:**

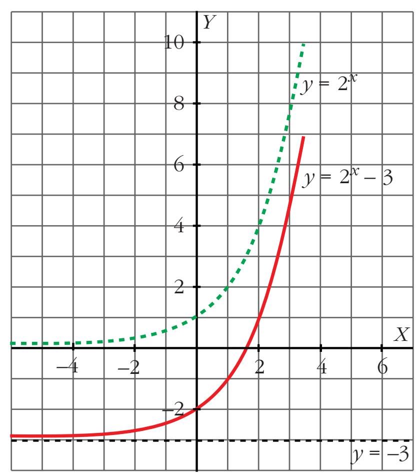
a) $y = 2^x + 1$ **b)** $y = 2^x - 3$

☛ ***Utiliza la gráfica de $y = 2^x$.***

a)



b)

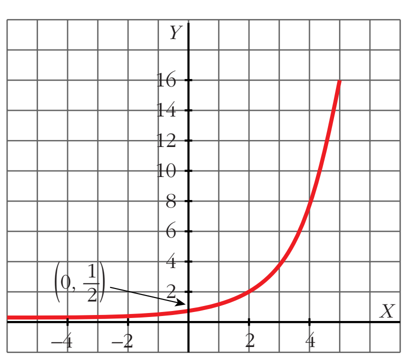


53 **Representa las siguientes funciones:**

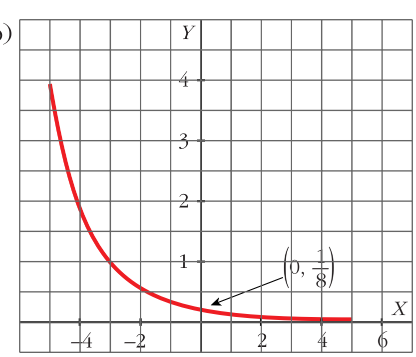
a) $y = 2^{x-1}$ **b)** $y = \left(\dfrac{1}{2}\right)^{x+3}$

c) $y = 1 - 2^x$ **d)** $y = 2^{-x}$

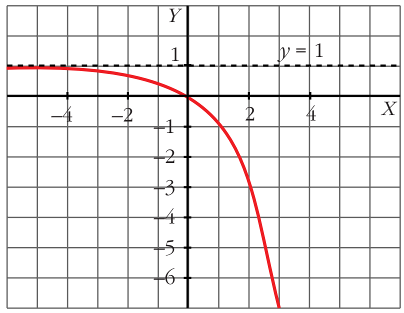
a)



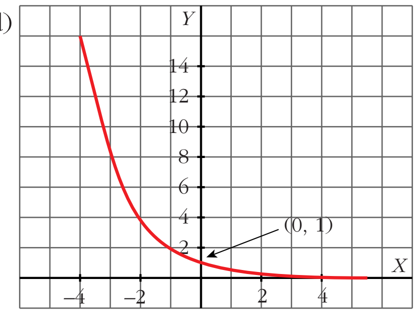
b)



c)



d)



54 **De la función exponencial $f(x) = k a^x$ conocemos $f(0) = 5$ y $f(3) = 40$. ¿Cuánto valen k y a?**

$f(0) = 5 \;\rightarrow\; 5 = k$

$f(3) = 40 \;\rightarrow\; 40 = 5 \cdot a^3 \;\rightarrow\; a = 2$

La función es $f(x) = 5 \cdot 2^x$

55 **Halla la función inversa de las siguientes funciones:**

a) $y = 3 \cdot 2^{x-1}$ **b)** $y = 1 + 3^x$

a) $x = 3 \cdot 2^{y-1}$; $\dfrac{x}{3} = 2^{y-1}$; $log_2 \dfrac{x}{3} = y - 1$

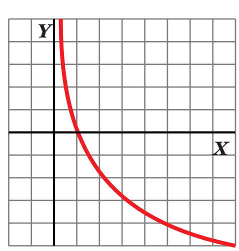
$y = 1 + log_2 \dfrac{x}{3} \;\rightarrow\; f^{-1}(x) = 1 + log_2 \dfrac{x}{3}$

b) $x = 1 + 3^y$; $x - 1 = 3^y$; $log_3 (x - 1) = y \;\rightarrow\; f^{-1}(x) = log_3 (x - 1)$

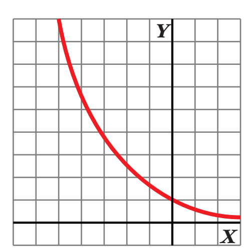
56 **Estas gráficas corresponden a funciones del tipo $y = a^x$, $y = log_a x$.**

Identifícalas e indica, en cada caso, si es $a > 1$ o $0 < a < 1$.

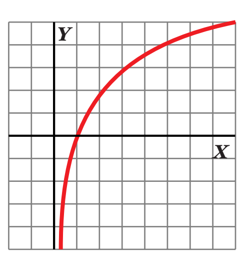
1)



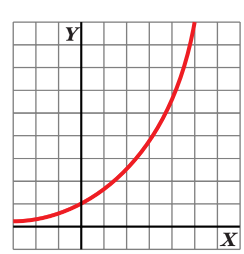
2)



3)



4)



1) $y = log_a\, x,\ \ 0 < a < 1$ 2) $y = a^x,\ \ 0 < a < 1$

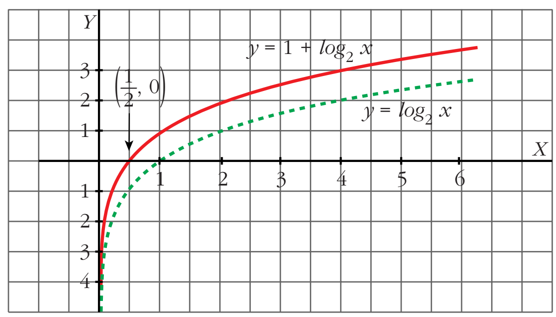
3) $y = log_a\, x,\ \ a > 1$ 4) $y = a^x,\ \ a > 1$

57 **Representa estas funciones a partir de la gráfica de $y = log_2\, x$:**

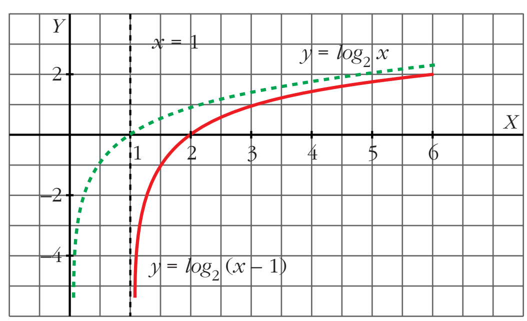
a) $\boldsymbol{y = 1 + log_2\, x}$ **b)** $\boldsymbol{y = log_2\, (x - 1)}$

☛ ***En b), el dominio es $(1, +\infty)$.***

a) $y = 1 + log_2\, x$

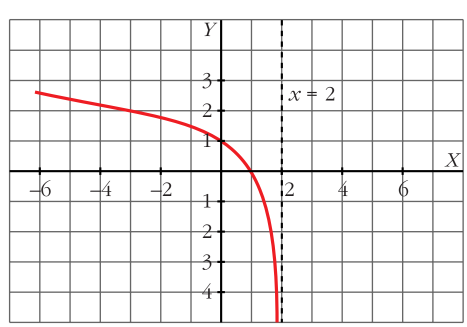


b) $y = log_2\, (x - 1)$



58 **¿Cuál es el dominio de esta función?: $y = log_2\, (2 - x)$. Represéntala.**

Dominio: $(-\infty, 2)$



59 **La gráfica de una función exponencial del tipo $y = ka^x$ pasa por los puntos (0; 0,5) y (1; 1,7).**

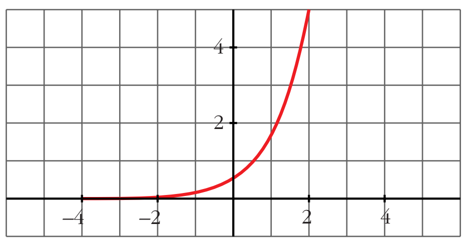
a) Calcula k y a.

b) Representa la función.

a) $\left.\begin{array}{l} 0,5 = k \cdot a^0 \\ 1,7 = k \cdot a^1 \end{array}\right\} \begin{array}{l} 0,5 = k \\ 1,7 = k \cdot a \end{array} \rightarrow \begin{array}{l} k = 0,5 \\ a = 3,4 \end{array}$

La función es $y = 0,5 \cdot (3,4)^x$

b)



60 **Se llama inflación a la pérdida de valor del dinero; es decir, si un artículo que costó 100 euros al cabo de un año cuesta 106 euros, la inflación ha sido del 6%.**

Suponiendo que la inflación se mantiene constante en el 6% anual, ¿cuánto costará dentro de 7 años un terreno que hoy cuesta cinco mil euros?

Para un capital C y una inflación del 6% durante x años, el valor de ese capital será:

$$C' = C \cdot (1,06)^x$$

Para $x = 7$ años y $C = 5\,000$ euros:

$$C' = 5\,000 \cdot (1,06)^7 = 7\,518 \text{ euros}$$

Página 271

61 **En el contrato de trabajo de un empleado figura que su sueldo subirá un 6% anual.**

a) Si empieza ganando 10 000 euros anuales, ¿cuánto ganará dentro de 10 años?

b) Calcula cuánto tiempo tardará en duplicarse su sueldo.

a) $10\,000 \cdot (1,06)^{10} \approx 17\,908,48$ euros

b) $1,06^x = 2 \rightarrow x \approx 12$ años tardará en duplicarse.

62 **Utiliza la calculadora en radianes para obtener el valor de y en cada una de estas expresiones:**

a) $y = arc\ sen\ 0{,}8$

b) $y = arc\ sen\ (-0{,}9)$

c) $y = arc\ cos\ 0{,}36$

d) $y = arc\ cos\ (-0{,}75)$

e) $y = arc\ tg\ 3{,}5$

f) $y = arc\ tg\ (-7)$

a) $0{,}93\ rad \to 53°\ 7'\ 48''$

b) $-1{,}12\ rad \to -64°\ 9'\ 29''$

c) $1{,}20\ rad \to 68°\ 53'\ 59''$

d) $2{,}42\ rad \to 138°\ 35'\ 25''$

e) $1{,}29\ rad \to 74°\ 3'\ 17''$

f) $-1{,}43\ rad \to -81°\ 52'\ 11''$

63 **Obtén el valor de estas expresiones en grados, sin usar la calculadora:**

a) $y = arc\ sen\ \frac{\sqrt{3}}{2}$

b) $y = arc\ cos\ \frac{1}{2}$

c) $y = arc\ tg\ 1$

d) $y = arc\ sen\ (-1)$

e) $y = arc\ cos\ \left(-\frac{1}{2}\right)$

f) $y = arc\ tg\ \sqrt{3}$

a) 60°

b) 60°

c) 45°

d) –90°

e) 120°

f) 60°

64 **Calcula x en las siguientes expresiones:**

a) $arc\ sen\ x = 45°$

b) $arc\ cos\ x = 30°$

c) $arc\ tg\ x = -72°$

d) $arc\ sen\ x = 75°$

e) $arc\ cos\ x = \frac{\pi}{3}$ rad

f) $arc\ tg\ x = 1{,}5$ rad

a) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

b) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

c) –3,078

d) 0,966

e) $\frac{1}{2}$

f) 14,101

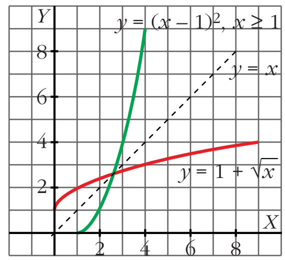
CUESTIONES TEÓRICAS

65 **Si $f(x) = 2^x$ y $g(x) = log_2\ x$, ¿cuál es la función $(f \circ g)(x)$? ¿Y $(g \circ f)(x)$?**

$(f \circ g)(x) = (g \circ f)(x) = x$

66 **Dada la función $f(x) = 1 + \sqrt{x}$, halla $f^{-1}(x)$. Representa las dos funciones y comprueba su simetría respecto de la bisectriz del 1^er^ cuadrante.**

$f^{-1}(x) = (x - 1)^2, \ \ x \geq 1$



67 **Dada la función $y = a^x$, contesta:**

a) ¿Puede ser negativa la y? ¿Y la x?

b) ¿Para qué valores de a es creciente?

c) ¿Cuál es el punto por el que pasan todas las funciones del tipo $y = a^x$?

d) ¿Para qué valores de x se verifica $0 < a^x < 1$ siendo $a > 1$?

a) La y no puede ser negativa, la x sí.

b) $a > 1$

c) $(0, 1)$

d) Para $x < 0$.

68 **Una parábola corta al eje de abscisas en $x = 1$ y en $x = 3$. La ordenada del vértice es $y = -4$. ¿Cuál es la ecuación de esa parábola?**

$$y = k(x - 1)(x - 3) = k(x^2 - 4x + 3)$$

Vértice $\rightarrow x = \frac{4}{2} = 2 \rightarrow y(2) = -k = -4 \rightarrow k = 4$

La ecuación es: $y = 4(x^2 - 4x + 3) = 4x^2 - 16x + 12$

PARA PROFUNDIZAR

69 **Halla el dominio de definición de las siguientes funciones:**

a) $y = \sqrt{\dfrac{x+3}{x-2}}$ **b)** $y = \sqrt{\dfrac{x-9}{x}}$

a) $\dfrac{x+3}{x-2} \geq 0$ $\begin{cases} \left.\begin{cases} x+3 \geq 0 \\ x-2 > 0 \end{cases}\right\} x > 2 \\ \left.\begin{cases} x+3 \leq 0 \\ x-2 < 0 \end{cases}\right\} x \leq -3 \end{cases}$ Dominio $= (-\infty, -3] \cup (2, +\infty)$

b) $\dfrac{x-9}{x} \geq 0$ $\begin{cases} \left.\begin{cases} x-9 \geq 0 \\ x > 0 \end{cases}\right\} x \geq 9 \\ \left.\begin{cases} x-9 \leq 0 \\ x < 0 \end{cases}\right\} x < 0 \end{cases}$ Dominio $= (-\infty, 0) \cup [9, +\infty)$

70 **Representa y define como funciones “a trozos”:**

a) $y = |x^2 - 4|$

b) $y = |x^2 - 2x - 4|$

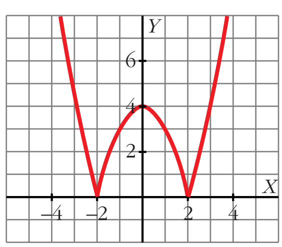
c) $y = \left|-\dfrac{x^2}{2} + 2\right|$

d) $y = |x^2 + 2x - 2|$

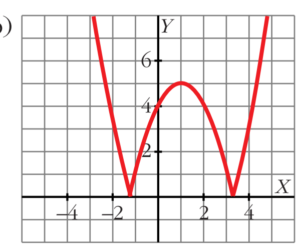
a) $y = \begin{cases} x^2 - 4 & \text{si } x < -2 \\ -x^2 + 4 & \text{si } -2 \leq x \leq 2 \\ x^2 - 4 & \text{si } x > 2 \end{cases}$

b) $y = \begin{cases} x^2 - 2x - 4 & \text{si } x < -1{,}2 \\ -x^2 + 2x + 4 & \text{si } -1{,}2 \leq x \leq 3{,}2 \\ x^2 - 2x - 4 & \text{si } x > 3{,}2 \end{cases}$

a)



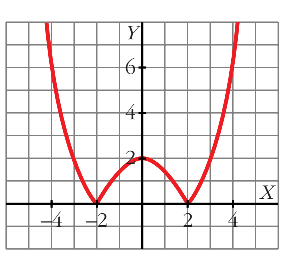
b)



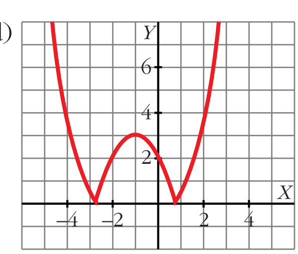
c) $y = \begin{cases} (x^2/2) - 2 & \text{si } x < -2 \\ (-x^2/2) + 2 & \text{si } -2 \leq x \leq 2 \\ (x^2/2) - 2 & \text{si } x > 2 \end{cases}$

d) $y = \begin{cases} x^2 + 2x - 2 & \text{si } x < -2{,}7 \\ -x^2 - 2x + 2 & \text{si } -2{,}7 \leq x \leq 0{,}7 \\ x^2 + 2x - 2 & \text{si } x > 0{,}7 \end{cases}$

c)



d)



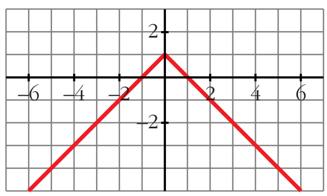
71 **Representa estas funciones y exprésalas en intervalos:**

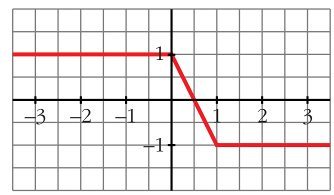
a) $\boldsymbol{y = 1 - |x|}$

b) $\boldsymbol{y = |x - 1| - |x|}$

a) $y = \begin{cases} 1 - x & \text{si } x \geq 0 \\ 1 + x & \text{si } x < 0 \end{cases}$

b) $y = \begin{cases} 1 & \text{si } x \leq 0 \\ 1 - 2x & \text{si } 0 < x < 1 \\ -1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$





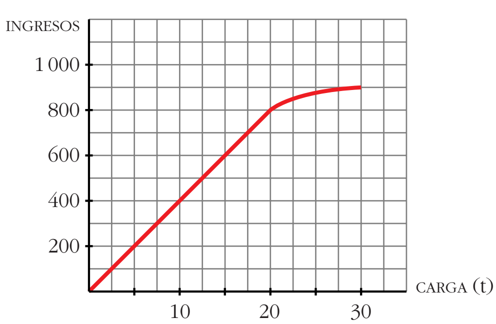
72 **Las tarifas de una empresa de transportes son:**

- **40 euros por tonelada de carga si esta es menor o igual a 20 t.**
- **Si la carga es mayor que 20 t, se restará, de los 40 euros, tantos euros como toneladas sobrepasen las 20.**

a) Dibuja la función *ingresos de la empresa según la carga que transporte* (carga máxima: 30 t).

b) Obtén la expresión analítica.

a)



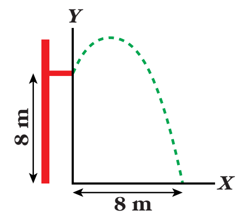
b) $f(x) = \begin{cases} 40x & \text{si } 0 \leq x \leq 20 \\ [40 - (x - 20)]x & \text{si } 20 < x \leq 30 \end{cases}$

Es decir:

$$f(x) = \begin{cases} 40x & \text{si } 0 \leq x \leq 20 \\ 60x - x^2 & \text{si } 20 < x \leq 30 \end{cases}$$

PARA PENSAR UN POCO MÁS

73 **En una piscina hay un trampolín a 8 m del agua. Un nadador se lanza tomando impulso y elevándose 1 m antes de empezar a caer. El nadador alcanza el agua a 8 m del borde del trampolín.**



a) Si tomamos como origen de coordenadas la proyección del extremo del trampolín sobre el agua y el vértice de la parábola es (a, b), ¿cuánto vale b?

b) La ecuación del movimiento es $y = k(x - \alpha)^2 + 9$. Justifícala y halla k y α.

a) $b = 8 + 1 = 9$

b) El vértice es $(\alpha, 9)$, por eso la ecuación es $y = k(x - \alpha)^2 + 9$.

$$\left.\begin{array}{l} \text{Como } y(0) = 8 \rightarrow 8 = k\alpha^2 + 9 \\ \text{Como } y(8) = 0 \rightarrow 0 = k(8 - \alpha)^2 + 9 \end{array}\right\} \begin{array}{l} k = -1/\alpha^2 \\ k = -9/(8 - \alpha)^2 \end{array}$$

$$-\frac{1}{\alpha^2} = \frac{-9}{(8 - \alpha)^2} \rightarrow (8 - \alpha)^2 = 9\alpha^2 \rightarrow 8\alpha^2 + 16\alpha - 64 = 0$$

$$\alpha^2 + 2\alpha - 8 = 0 \rightarrow \alpha = \begin{cases} 2 \rightarrow k = -1/4 \\ -4 \text{ (vemos por la gráfica que no vale)} \end{cases}$$

La ecuación será, por tanto:

$$y = -\frac{1}{4}(x - 2)^2 + 9$$