

EJERCICIOS DE TRIGONOMETRÍA

Repaso Trigonometría elemental:

1. Completar en el cuaderno la siguiente tabla:

Grados	105°		225°		320°		35°
Radianes		$4\pi/9$ rad		$\pi/15$ rad		1 rad	

2. Uso de la calculadora:

- a) Hallar, con cuatro cifras decimales bien aproximados, el valor de las siguientes razones trigonométricas:

sen 35° cos 70° tg 53° sen 26° 37' cos 78° 34' 8" tg 34° 12' 43"
 sec 12° cosec 23° ctg 54° sen 235° cos 105°

- b) Dadas las siguientes razones trigonométricas, hallar el ángulo agudo α del que proceden:
 sen $\alpha=0,25$ cos $\alpha=0,74$ tg $\alpha=3$ sec $\alpha=1,18$ ctg $\alpha=1,5$

- c) Dado cos $\alpha=0,2$, hallar, mediante calculadora, tg α

- d) Dado sen $\alpha=0,56$, hallar, mediante calculadora, cos α

- e) Dada tg $\alpha=2$, hallar, mediante calculadora, sen α

- f) Dada cosec $\alpha=3$, hallar, mediante calculadora, cos α

- g) Dada sec $\alpha=1,5$, hallar, mediante calculadora, tg α

- h) Dada ctg $\alpha=3$, hallar, mediante calculadora, cosec α

3. Resolver los siguientes **triángulos, rectángulos** en A, aplicando, siempre que sea posible relaciones trigonométricas (¡no el teorema de Pitágoras!); hallar también su área:

- a) $a=320$ m, $B=47^\circ$ (Soluc: $C=43^\circ$; $b\approx 234,03$ m; $c\approx 218,24$ m; $S_{ABC}\approx 25537,64$ m²)
 b) $a=42,5$ m, $b=35,8$ m (Soluc: $B\approx 57^\circ 23' 22''$; $C\approx 32^\circ 36' 38''$; $c\approx 22,90$ m; $S_{ABC}\approx 409,99$ m²)
 c) $b=32,8$ cm, $B=22^\circ$ (Soluc: $C=68^\circ$; $a\approx 87,56$ cm; $c\approx 81,18$ cm; $S_{ABC}\approx 1331,40$ cm²)
 d) $b=8$ mm, $c=6$ mm (Soluc: $B\approx 53^\circ 7' 48''$; $C\approx 36^\circ 52' 12''$; $a=10$ mm; $S_{ABC}=24$ mm²)
 e) $a=8$ km, $b=6$ km (Soluc: $B\approx 48^\circ 35'$; $C\approx 41^\circ 25'$; $c\approx 5,30$ km; $S_{ABC}\approx 15,87$ km²)
 f) $a=13$ m, $c=5$ m (Soluc: $B\approx 67^\circ 22' 48''$; $C\approx 22^\circ 37' 12''$; $b=12$ m; $S_{ABC}\approx 30$ m²)
 g) $c=42,7$ dam, $C=31^\circ$ (Soluc: $B=59^\circ$; $a\approx 82,91$ dam; $b\approx 71,06$ dam; $S_{ABC}\approx 1517,23$ dam²)
 h) $c=124$ dm, $B=67^\circ 21'$ (Soluc: $C\approx 22^\circ 39'$; $a\approx 321,99$ dm; $b\approx 297,16$ dm; $S_{ABC}\approx 18423,9$ dm²)

4. Una escalera de bomberos de 10 m de longitud se ha fijado en un punto de la calzada. Si se apoya sobre una de las fachadas forma un ángulo con el suelo de 45° y si se apoya sobre la otra forma un ángulo de 30°. Hallar la anchura de la calle. ¿Qué altura se alcanza sobre cada fachada?

(Soluc: anchura $\approx 15,73$ m; altura 7,07 y 5 m respectivamente)

Razones trigonométricas en cualquier cuadrante:

5. Expresar los siguientes ángulos como suma de un número entero de vueltas y un ángulo positivo menor de 360° o 2π rad (hacer el dibujo en el caso de los cinco primeros):

a) 1100° b) $19\pi/3$ rad c) 2970° d) -300° e) -1040° f) 10π rad g) $43\pi/4$ rad
h) 3500° i) $32\pi/3$ rad j) -2620° k) $63\pi/5$ rad l) $43\pi/6$ rad m) 4980°

(Soluc: a) 20° ; b) 90° ; c) 60° ; d) 40° ; e) 0 rad; f) $\pi/3$ rad; g) $3\pi/4$ rad; h) 260° ; i) $2\pi/3$ rad; j) 260° ; k) $3\pi/5$ rad; l) $7\pi/6$ rad)

6. Sobre **papel milimetrado**, y para cada uno de los apartados que figuran a continuación, trazar una circunferencia de radio unidad (usar e indicar una escala conveniente), señalar en ella los ángulos en cuestión (utilizar para ello un transportador de ángulos) y trazar su seno y coseno, medir éstos aproximadamente, y comparar el resultado obtenido con la calculadora:

a) 30° y 150° b) 45° y 225° c) 90° , 180° y 270° d) 60° y 300° e) 0° , 60° y 120°

7. Utilizando la calculadora, construir una tabla de valores apropiada para representar, sobre **papel milimetrado**, las funciones $\sin x$, $\cos x$ y $\tan x$ (Pueden verse dichas gráficas en el anexo final del cuaderno)

8. Sabiendo que $\cos \alpha = -3/5$ y $180^\circ < \alpha < 270^\circ$, calcular las restantes razones trigonométricas.

(Soluc: $\sin \alpha = -4/5$, $\tan \alpha = 4/3$)

9. Sabiendo que $\tan \alpha = -3/4$ y $\alpha \in 4^\circ$ cuadrante, calcular las restantes razones trigonométricas.

(Soluc: $\sin \alpha = -3/5$, $\cos \alpha = 4/5$)

10. Ídem con $\sec \alpha = 2$ y $0 < \alpha < \pi/2$

(Soluc: $\sin \alpha = \sqrt{3}/2$, $\cos \alpha = 1/2$, $\tan \alpha = \sqrt{3}$)

11. Ídem con $\tan \alpha = -3$ y $\pi/2 < \alpha < \pi$

(Soluc: $\sin \alpha = 3\sqrt{10}/10$, $\cos \alpha = -\sqrt{10}/10$)

12. Ídem con $\cos \alpha = 0,2$ y $3\pi/2 < \alpha < 2\pi$

(Soluc: $\sin \alpha = -2\sqrt{6}/5$, $\tan \alpha = -2\sqrt{6}$)

13. Ídem con $\sin \alpha = -0,3$ y $\pi < \alpha < 3\pi/2$

(Soluc: $\cos \alpha = -0,95$, $\tan \alpha = 0,32$)

14. Ídem con $\tan \alpha = 4/3$ y $\pi < \alpha < 3\pi/2$

(Soluc: $\sin \alpha = -4/5$, $\cos \alpha = -3/5$)

15. Calcular las restantes razones trigonométricas sabiendo que:

a) $\cos \alpha = 4/5$ $270^\circ < \alpha < 360^\circ$

f) $\cos \alpha = -1/3$ $\alpha \in 2^\circ$ cuad.

k) $\sec \alpha = -\sqrt{2}$ $\alpha \in 3^\circ$ cuad.

b) $\tan \alpha = 3/4$ $180^\circ < \alpha < 270^\circ$

g) $\operatorname{cosec} \alpha = -2$ $180^\circ < \alpha < 270^\circ$

l) $\operatorname{cosec} \alpha = \sqrt{5}$ $\alpha \in 2^\circ$ cuad.

c) $\sin \alpha = 3/5$ $90^\circ < \alpha < 180^\circ$

h) $\sec \alpha = 1$ $0^\circ < \alpha < 90^\circ$

d) $\operatorname{ctg} \alpha = -2$ $90^\circ < \alpha < 180^\circ$

i) $\tan \alpha = 3/4$ $0^\circ < \alpha < 90^\circ$

e) $\sin \alpha = 1/4$ $\alpha \in 1^\circ$ cuad.

j) $\tan \alpha = 3/4$ $\alpha \in 3^\circ$ cuad.

16. Determinar los valores de $\sin \alpha$ y $\tan \alpha$ sabiendo que $\tan \alpha > 0$ y $\cos \alpha = -5/12$

17. Encontrar el ángulo α y las demás razones trigonométricas sabiendo que $\sin \alpha = 1/2$ y $\cos \alpha = -\sqrt{3}/2$

18. Resolver las siguientes **ecuaciones trigonométricas** sencillas:

a) $\sin x = \frac{1}{2}$ b) $\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ c) $\tan x = 1$ d) $\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ e) $\cos x = \frac{1}{2}$ f) $\tan x = -\sqrt{3}$

Reducción al 1^{er} cuadrante:

19. Hallar, sin calculadora: a) $\sin 570^\circ$ b) $\cos 14520^\circ$ c) $\sin (-120^\circ)$ d) $\cos (-240^\circ)$
e) $\tan 2565^\circ$ f) $\cos 15\pi/2$ rad g) $\sin 55\pi/6$ rad h) $\tan 79\pi$ rad

(Soluc: a) $-1/2$; b) $-1/2$; c) $-\sqrt{3}/2$; d) $-1/2$; e) 1 ; f) 0 ; g) $-1/2$; h) 0)

20. Ídem: a) $\cos 225^\circ$ b) $\cos(-60^\circ)$ c) $\tan 120^\circ$ d) $\sin (-1470^\circ)$ e) $\tan 900^\circ$
f) $\sin 19\pi/6$ rad g) $\cos 11\pi$ rad

(Soluc: a) $-\sqrt{2}/2$; b) $1/2$; c) $-\sqrt{3}$; d) $-1/2$; e) 0 ; f) $-1/2$; g) -1)

21. Expresar las siguientes razones en función de la de un ángulo del 1^{er} cuadrante:

a) $\sin 1485^\circ$ b) $\cos 1560^\circ$ c) $\sin 1000^\circ$ (Soluc: $\sin 45^\circ$; $-\cos 60^\circ$; $-\sin 80^\circ$)

22. Ídem: a) $\sin 1300^\circ$ b) $\cos (-690^\circ)$ c) $\tan 170^\circ$ d) $\sin (-1755^\circ)$ e) $\sin (-120^\circ)$ f) $\cotg (-150^\circ)$
g) $\sin 2700^\circ$ h) $\sec (-25^\circ)$ i) $\cos (-30^\circ)$ j) $\operatorname{cosec} 4420^\circ$

23. Expresar seno, coseno y tangente de 1755° en función de un ángulo del 1^{er} cuadrante. Comprobar el resultado con la calculadora.

Razones trigonométricas de adición y sustracción:

24. a) Hallar mediante las fórmulas trigonométricas correspondientes (sin calculadora, y sin utilizar decimales) el seno, coseno y tangente de 75° .

b) Utilizando los resultados anteriores, calcular, de la forma más rápida posible, (sin calculadora y sin utilizar decimales) el seno y la tangente de los siguientes ángulos:

i) 105° ii) 165° iii) 15° iv) 195° v) 135°

(Comprobar todos los resultados con la calculadora)

25. Si $\sin x = 12/13$ y $\sin y = 4/5$, siendo x e $y \in 1^\text{er}$ cuadrante, calcular:

a) $\sin (x+y)$ b) $\sin (x-y)$ c) $\cos (x+y)$ d) $\cos (x-y)$

(Soluc: a) $56/65$; b) $16/65$; c) $-33/65$; d) $63/65$)

26. Si $\tan a = 3/4$, hallar $\tan (a+30^\circ)$ y $\tan (45^\circ - a)$ (Soluc: $\frac{48 + 25\sqrt{3}}{39}$; $\frac{1}{7}$)

27. Hallar el seno y el coseno de 9° y 6° en función de $\cos 36^\circ$

Razones trigonométricas de $-\alpha$, $180-\alpha$, $180+\alpha$, etc:

28. Expresar únicamente en función de las razones trigonométricas de α :

a) $\cos\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right)$ b) $\cos\left(\alpha - \frac{9\pi}{2}\right)$ c) $\tan(\alpha + 5\pi)$ d) $\sin\left(\alpha - \frac{5\pi}{2}\right)$ e) $\tan(360^\circ - \alpha)$

(Soluc: a) $\sin \alpha$; b) $\sin \alpha$; c) $\tan \alpha$; d) $-\cos \alpha$; e) $-\tan \alpha$)

29. Simplificar las siguientes expresiones: a) $\tan(\alpha+180^\circ) + \tan(\alpha-180^\circ) + \tan(\alpha-270^\circ) + \tan(360^\circ - \alpha)$

b) $\sin(\alpha+5\pi) + \sin(\alpha-\pi) + \sin(\alpha+2\pi) + \sin(\alpha+\pi)$

(Soluc: a) $\tan \alpha - \cotg \alpha$; b) $-2 \sin \alpha$)

30. Calcular $\sin(5\pi - x)$ sabiendo que $\cos x = 0,5$

31. Siendo $\tan x = 2/3$ calcular: **a)** $\tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ **b)** $\tan(\pi - x)$ **c)** $\tan(\pi + x)$

32. Sabiendo que $\tan a = 3/2$ calcular: **a)** $\cos(\pi + a)$ **b)** $\cos(2\pi - a)$ **c)** $\sin\left(\frac{\pi}{2} - a\right)$ **d)** $\sin\left(\frac{\pi}{2} + a\right)$
(Soluc: a) $-2\sqrt{13}/13$; b) $2\sqrt{13}/13$; c) $2\sqrt{13}/13$; d) $2\sqrt{13}/13$)

Razones trigonométricas del ángulo doble:

33. Calcular el seno y el coseno de 20° en función de $\sin 10^\circ$, y comprobar el resultado con la calculadora.

34. Hallar $\sin 2x$, $\cos 2x$ y $\tan 2x$, siendo $x \in 1^{\text{er}}$ cuadrante, en cada uno de los siguientes casos:

a) $\sin x = 1/2$ **b)** $\cos x = 3/5$ **c)** $\sin x = 5/13$

(Soluc: a) $\sqrt{3}/2$; $1/2$; $\sqrt{3}$ b) $24/25$; $-7/25$; $-24/7$ c) $120/169$; $119/169$; $120/119$)

35. Dado $a \in 3^{\text{er}}$ cuadrante tal que $\tan a = \frac{\sqrt{3}}{3}$, hallar las razones trigonométricas del ángulo **2a**.

(Soluc: $\sin 2a = \sqrt{3}/2$; $\cos 2a = 1/2$)

35b Obtener gráficamente, utilizando la circunferencia trigonométrica, el ángulo **a** del ejercicio anterior.

(Soluc: $a = 210^\circ$)

36. Expresar $\sin 3a$ y $\cos 3a$ en función de $\sin a$ y $\cos a$ respectivamente

(Soluc: $\sin 3a = 3\sin a - 4\sin^3 a$; $\cos 3a = 4\cos^3 a - 3\cos a$)

37. Si $\cos \alpha = 1/5$ y $\alpha \in 1^{\text{er}}$ cuadrante, calcular las razones trigonométricas del ángulo $90^\circ - 2\alpha$

(Soluc: $-23/25$; $4\sqrt{6}/25$)

38. Si $\cotg \alpha = 4/3$, hallar $\cos 2\alpha$ (Soluc: $7/25$)

39. Sabiendo que $\tan 2a = \sqrt{3}$, hallar $\sin a$ y $\cos a$, sabiendo que $a < 90^\circ$. ¿De qué ángulo **a** se trata?

(Soluc: $\sin a = 1/2$; $\cos a = \sqrt{3}/2$; $a = 30^\circ$)

Razones trigonométricas del ángulo mitad:

40. Calcular $\tan \pi/8$ (Soluc: $\sqrt{2} - 1$)

41. Dado $\alpha \in 4^\circ$ cuadrante tal que $\sec \alpha = 2$, hallar $\cos \alpha/2$

(Soluc: $\cos \frac{\alpha}{2} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$)

41b Obtener gráficamente, utilizando la circunferencia trigonométrica, el ángulo α del ejercicio anterior. Comprobar, a continuación, mediante fórmulas trigonométricas (sin calculadora) el resultado anterior.

(Soluc: $\alpha = 300^\circ$)

42. Sea un ángulo a situado en el 2º cuadrante tal que $\operatorname{tg} a = -3/4$. Hallar las razones trigonométricas del ángulo $a/2$.

$$\left(\text{Soluc: } \operatorname{sen} \frac{a}{2} = \frac{3\sqrt{10}}{10}; \operatorname{cos} \frac{a}{2} = \frac{\sqrt{10}}{10} \right)$$

- 42b Comprobar con la calculadora el resultado del ejercicio anterior. (Soluc: $a \approx 143^\circ 7' 48''$)

43. Dado $a \in 3^{\text{er}}$ cuadrante tal que $\operatorname{sen} a = -1/2$, hallar las razones de $a/2$. ¿De qué ángulo a se trata?

$$\left(\text{Soluc: } \operatorname{sen} \frac{a}{2} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}; \operatorname{cos} \frac{a}{2} = \frac{-\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}; a = 210^\circ \right)$$

44. Volver a hacer el ejercicio 38, pero aplicando las fórmulas del ángulo mitad (Ayuda: para ello, plantear el cambio de variable $a = \alpha/2$).

45. Dado $a \in 4^\circ$ cuadrante con $\operatorname{tg} a = -\sqrt{3}$, hallar las razones de $a/2$

$$\left(\text{Soluc: } \operatorname{sen} \frac{a}{2} = \frac{1}{2}; \operatorname{cos} \frac{a}{2} = -\frac{\sqrt{3}}{2}; \operatorname{tg} \frac{a}{2} = -\frac{\sqrt{3}}{3} \right)$$

- 45b Obtener gráficamente, utilizando la circunferencia trigonométrica, el ángulo a del ejercicio anterior. Comprobar, a continuación, mediante fórmulas trigonométricas (sin calculadora) los resultados anteriores. (Soluc: $a = 300^\circ$)

46. Dado $\alpha \in 3^{\text{er}}$ cuadrante tal que $\operatorname{cos} \alpha = -1/2$, hallar, utilizando la fórmula correspondiente (resultados simplificados y racionalizados; no vale utilizar decimales), y **por este orden**:

a) $\operatorname{sen} 2\alpha$ (Soluc: $\sqrt{3}/2$)

b) $\operatorname{cos} \alpha/2$ (Soluc: $-1/2$)

c) $\operatorname{sen} (\alpha - 30^\circ)$ (Soluc: $-1/2$)

d) $\operatorname{tg} (\alpha + 60^\circ)$ (Soluc: $-\sqrt{3}$)

- e) Razonar mediante la circunferencia goniométrica (no vale con calculadora) de qué α se trata.

(Soluc: 240°)

47. Ídem, dado $\alpha \in 4^\circ$ cuadrante tal que $\operatorname{tg} \alpha = -\sqrt{3}$

a) $\operatorname{cos} (\alpha + 30^\circ)$ (Soluc: $\sqrt{3}/2$)

b) $\operatorname{tg} (\alpha - 45^\circ)$ (Soluc: $2 + \sqrt{3}$)

c) $\operatorname{sen} (\alpha + 1650^\circ)$ (Soluc: $1/2$)

d) $\operatorname{sen} \alpha/2$ (Soluc: $1/2$)

e) $\operatorname{cos} 2\alpha$ (Soluc: $-1/2$)

- f) Razonar (sin calculadora) de qué α se trata. (Soluc: 300°)

48. Ídem con $\alpha \in 3^{\text{er}}$ cuadrante tal que $\operatorname{sec} \alpha = -3$

a) $\operatorname{sen} (\alpha - 60^\circ)$ (Soluc: $(\sqrt{3} - 2\sqrt{2})/6$)

b) $\operatorname{tg} (\alpha + 45^\circ)$ (Soluc: $-(9 + 4\sqrt{2})/7$)

c) $\operatorname{cos} (\alpha - 2640^\circ)$ (Soluc: $(1 - 2\sqrt{6})/6$)

d) $\operatorname{cos} \alpha/2$ (Soluc: $-\sqrt{3}/3$)

e) $\operatorname{sen} 2\alpha$ (Soluc: $4\sqrt{2}/9$)

- f) Razonar, mediante calculadora y circunferencia trigonométrica, de qué α se trata. (Soluc: $\approx 250^\circ 31' 44''$)

Transformación de sumas en productos:

49. Transformar en producto y calcular (comprobar con la calculadora):

a) $\sin 75^\circ - \sin 15^\circ$ b) $\cos 75^\circ + \cos 15^\circ$ c) $\cos 75^\circ - \cos 15^\circ$

(Soluc: a) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ b) $\frac{\sqrt{6}}{2}$ c) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$)

Identidades trigonométricas:

50. Simplificar:

a) $\frac{\sin 4\alpha + \sin 2\alpha}{\cos 4\alpha + \cos 2\alpha} =$

(Soluc: $\operatorname{tg} 3\alpha$)

b) $\frac{\sin 2\alpha}{1 - \cos^2 \alpha} =$

(Soluc: $2 \operatorname{ctg} \alpha$)

c) $\frac{2 \cos (45^\circ + \alpha) \cos (45^\circ - \alpha)}{\cos 2\alpha} =$

(Soluc: 1)

d) $2 \operatorname{tg} x \cos^2 \frac{x}{2} - \sin x =$

(Soluc: $\operatorname{tg} x$)

e) $2 \operatorname{tg} \alpha \sin^2 \frac{\alpha}{2} + \sin \alpha =$

(Soluc: $\operatorname{tg} \alpha$)

f) $\frac{\cos(a+b) + \cos(a-b)}{\sin(a+b) + \sin(a-b)} =$

(Soluc: $\operatorname{ctg} a$)

51. Demostrar las siguientes identidades:

a) $\frac{1 - \cos 2\alpha}{\sin^2 \alpha + \cos 2\alpha} = 2 \operatorname{tg}^2 \alpha$

b) $\sin 2\alpha \cos \alpha - \sin \alpha \cos 2\alpha = \sin \alpha$

c) $\cos \alpha \cos (\alpha - \beta) + \sin \alpha \sin (\alpha - \beta) = \cos \beta$

d) $\sin \alpha + \cos \alpha = \sqrt{2} \cos \left(\frac{\pi}{4} - \alpha \right)$

e) $\frac{2 \sin \alpha - \sin 2\alpha}{2 \sin \alpha + \sin 2\alpha} = \frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha} = \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}$

f) $\sin^2 \frac{\alpha + \beta}{2} - \sin^2 \frac{\alpha - \beta}{2} = \sin \alpha \sin \beta$

Ecuaciones trigonométricas:

52. Resolver las siguientes ecuaciones trigonométricas elementales:

a) $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$

b) $\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

c) $\operatorname{ctg} x = -\sqrt{3}$

d) $\sin x = \frac{1}{3}$

e) $\cos x = -\frac{4}{5}$

f) $\sin x = 0$

g) $\cos x = -1$

h) $\operatorname{cosec} x = -2$

(Sol: $x = k \cdot 180^\circ$)

(Sol: $x = (2k+1) \cdot 180^\circ$)

i) $\sec x = -\frac{2\sqrt{3}}{3}$

j) $\operatorname{tg} x = \sqrt{3}$

k) $\operatorname{cosec} x = \frac{1}{2}$

(Sol: $\overline{A}$ soluc)

l) $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

m) $\cos 3x = \frac{\sqrt{3}}{2}$

(Sol: $x = 10^\circ + k \cdot 120^\circ$; $x = 110^\circ + k \cdot 120^\circ$)

n) $\sin \left(x + \frac{\pi}{4} \right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

53. Resolver las siguientes ecuaciones trigonométricas:

a) $\sin x + \cos x = \sqrt{2}$ (Sol: $x = 45^\circ + k \cdot 360^\circ$)

b) $\sin x - 2 \cos 2x = -\frac{1}{2}$

(Sol: $30^\circ, 150^\circ, \approx 311^\circ 24' 35''$ y $\approx 228^\circ 35' 25''$)

- c) $\sin x \cos x = \frac{1}{2}$ (Sol: $x=45^\circ+k\cdot 180^\circ$)
- d) $\sin 2x = \cos x$
(Sol: $x=30^\circ+k\cdot 360^\circ$; $x=150^\circ+k\cdot 360^\circ$; $x=90^\circ+k\cdot 180^\circ$)
- e) $\sqrt{3} \sin x + \cos x = 1$ (Sol: $x=k\cdot 360^\circ$; $x=120^\circ+k\cdot 360^\circ$)
- f) $2\cos^2 x - \sin^2 x + 1 = 0$ (Sol: $x=90^\circ+k\cdot 180^\circ$)
- g) $\sin^2 x - \sin x = 0$ (Sol: $x=k\cdot 180^\circ$; $x=90^\circ+k\cdot 360^\circ$)
- h) $2\cos^2 x - \sqrt{3} \cos x = 0$
(Sol: $x=90^\circ+k\cdot 180^\circ$; $x=30^\circ+k\cdot 360^\circ$; $x=330^\circ+k\cdot 360^\circ$)
- i) $\sin^2 x - \cos^2 x = 1$ (Sol: $x=90^\circ+k\cdot 180^\circ$)
- j) $\cos^2 x - \sin^2 x = 0$ (Sol: $x=45^\circ+k\cdot 90^\circ$)
- k) $2\cos^2 x + \sin x = 1$
(Sol: $x=90^\circ+k\cdot 360^\circ$; $x=210^\circ+k\cdot 360^\circ$; $x=330^\circ+k\cdot 360^\circ$)
- l) $3\operatorname{tg}^2 x - \sqrt{3} \operatorname{tg} x = 0$
(Sol: $x=k\cdot 180^\circ$; $x=30^\circ+k\cdot 360^\circ$; $x=210^\circ+k\cdot 360^\circ$)
- m) $\sin\left(\frac{\pi}{4} + x\right) - \sqrt{2} \sin x = 0$ (Sol: $x=45^\circ+k\cdot 180^\circ$)
- n) $\sin\left(\frac{\pi}{6} - x\right) + \cos\left(\frac{\pi}{3} - x\right) = \frac{1}{2}$
(Sol: $x=60^\circ+k\cdot 360^\circ$; $x=300^\circ+k\cdot 360^\circ$)
- o) $\sin 2x - 2\cos^2 x = 0$ (Sol: $x=90^\circ+k\cdot 180^\circ$; $x=45^\circ+k\cdot 180^\circ$)
- p) $\cos 2x - 3\sin x + 1 = 0$ (Sol: $x=30^\circ+k\cdot 360^\circ$; $x=150^\circ+k\cdot 360^\circ$)
- q) $4\sin^2 x \cos^2 x + 2\cos^2 x - 2 = 0$ (Sol: $x=k\cdot 180^\circ$; $x=45^\circ+k\cdot 90^\circ$)
- r) $4\sin^2 x + \sin x \cos x - 3\cos^2 x = 0$
(Sol: $x=36^\circ 52' 11,6'' + k\cdot 180^\circ$; $x=135^\circ + k\cdot 180^\circ$)
- s) $\cos^2 \frac{x}{2} + \cos x = \frac{1}{2}$ (Sol: $x=90^\circ+k\cdot 180^\circ$)
- t) $\operatorname{tg}^2 \frac{x}{2} + 1 = \cos x$ (Sol: $x=k\cdot 360^\circ$)
- u) $2\sin^2 \frac{x}{2} + \cos 2x = 0$
(Sol: $x=90^\circ+k\cdot 180^\circ$; $x=60^\circ+k\cdot 360^\circ$; $x=300^\circ+k\cdot 360^\circ$)
- v) $\cos 2x + 3\sin x = 2$
- w) $\operatorname{tg} 2x \operatorname{tg} x = 1$
- x) $\cos x \cos 2x + 2\cos^2 x = 0$
- y) $2\sin x = \operatorname{tg} 2x$
- z) $\sqrt{3} \sin \frac{x}{2} + \cos x = 1$
- α) $\sin 2x \cos x = 6\sin^3 x$
- β) $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - x\right) + \operatorname{tg} x = 1$
- γ) $\sin x - \sqrt{3} \cos x = 2$ (Sol: $x=150^\circ+k\cdot 360^\circ$)

54. Resolver las siguientes ecuaciones, transformando las sumas y diferencias en productos:

- a) $\sin 3x - \sin x = \cos 2x$
- b) $\frac{\sin 5x + \sin 3x}{\cos x + \cos 3x} = 1$
- c) $\frac{\sin 3x + \sin x}{\cos 3x - \cos x} = \sqrt{3}$
- d) $\sin 3x - \cos 3x = \sin x - \cos x$

Resolución de triángulos oblicuángulos:

55. Resolver los siguientes triángulos y hallar su área (con * se indica el caso dudoso):

- a) $a=6$ m, $B=45^\circ$, $C=105^\circ$ (Soluc: $A=30^\circ$, $b=8,49$ m, $c=11,59$ m, $S=24,60$ m²)
- b) $a=10$ dam, $b=7$ dam, $C=30^\circ$ (Soluc: $c=5,27$ dam, $B=41^\circ 38'$, $A=108^\circ 22'$)
- c) $b=35,42$ dm, $A=49^\circ 38'$, $B=70^\circ 21'$ (Soluc: $C=60^\circ 1'$, $a=28,66$ dm, $c=32,58$ dm, $S=439,94$ dm²)
- d) $a=13$ m, $b=14$ m, $c=15$ m (Soluc: $A=53^\circ 7' 48''$, $B=59^\circ 29' 23''$, $C=67^\circ 22' 48''$, $S=84$ m²)
- * e) $a=42$, $b=32$, $B=40^\circ 32'$ (Soluc: $A_1=58^\circ 32'$, $C_1=80^\circ 56'$, $c_1=48,62$
 $A_2=121^\circ 27'$, $C_2=18^\circ$, $c_2=15,22$)
- f) $a=15$, $b=22$, $c=17$ (Soluc: $A=42^\circ 54'$, $B=86^\circ 38'$, $C=50^\circ 28'$)
- g) $a=10$ mm, $b=7$ mm, $C=60^\circ$ (Soluc: $8,89$ mm, $A=77^\circ$, $B=43^\circ$, $S=30,31$ mm²)
- h) $a=10$, $b=9$, $c=7$ (Soluc: $A=76^\circ 13'$, $B=60^\circ 57'$, $C=42^\circ 50'$)
- * i) $a=60$ cm, $b=40$ cm, $A=42^\circ$ (Soluc: $B=26^\circ 30'$, $c=83,43$ cm, $C=111^\circ 30'$, $S=116,5$ cm²)
- * j) $a=40$ cm, $b=60$ cm, $A=72^\circ$ (Soluc: $\nexists$ soluc)
- * k) $a=50$, $b=60$, $A=42^\circ$ (Soluc: $B_1=53^\circ 24'$, $C_1=84^\circ 36'$, $c_1=74,39$ $B_2=126^\circ 36'$, $C_2=11^\circ 24'$, $c_2=30,39$)
- l) $A=30^\circ$, $B=45^\circ$, $b=\sqrt{2}$ m (Soluc: $C=105^\circ$, $a=1$ m, $c=1,93$ m, $S=0,68$ m²)
- m) $b=3$ hm, $c=2$ hm, $A=60^\circ$ (Soluc: $a=\sqrt{7}$ hm, $B=79^\circ$, $C=40^\circ 54'$, $S=3\sqrt{3}/2$ hm²)
- n) $A=30^\circ$, $b=\sqrt{3}$, $c=1$
- * o) $a=4$, $b=5$, $B=30^\circ$
- p) $a=1792$, $b=4231$, $c=3164$
- * q) $a=12$ hm, $b=57$ hm, $A=150^\circ$ (Soluc: $\nexists$ soluc)
- r) $a=72$, $b=57$, $C=75^\circ 47'$

56. Resolver el triángulo ABC sabiendo que su perímetro es 24 cm, es rectángulo en A y $\sin B = 3/5$
(Soluc: $a=10$ cm, $b=6$ cm, $c=8$ cm)

57. Calcular el área de un triángulo de datos $a=8$ m, $B=30^\circ$, $C=45^\circ$

58. En un paralelogramo ABCD el lado AB mide 6 cm, el AD 8 cm, y el ángulo $A=30^\circ$. Hallar sus diagonales.

59. Hallar los lados de un triángulo sabiendo que su área mide 18 cm^2 y dos de sus ángulos $A=30^\circ$ y $B=45^\circ$
(Soluc: $a\approx 5,13$ cm, $b\approx 7,26$ cm, $c\approx 9,92$ cm)

60. **TEORÍA:** Demostrar, utilizando el teorema del coseno, que el triángulo de lados 9, 12 y 15 es rectángulo.

* 61. Uno de los lados de un triángulo es doble que el otro, y el ángulo comprendido vale 60° . Hallar los otros dos ángulos. (Soluc: 30° y 60°)

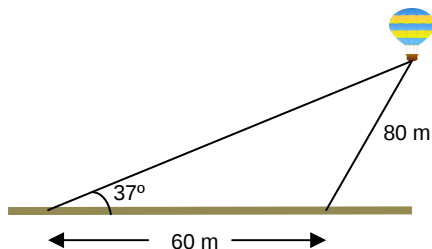
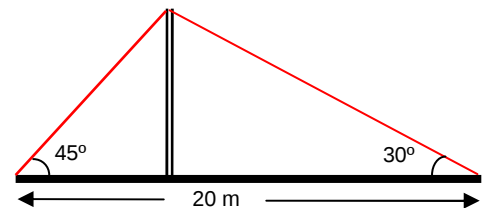
Problemas de planteamiento:

62. Un grupo decide escalar una montaña de la que desconocen la altura. A la salida del pueblo han medido el ángulo de elevación, que resulta ser 30° . A continuación han avanzado 100 m hacia la base de la montaña y han vuelto a medir el ángulo de elevación, siendo ahora 45° . Calcular la altura de la montaña.
(Soluc: $\approx 136,60$ m)

63. Rosa y Juan se encuentran a ambos lados de la orilla de un río, en los puntos A y B respectivamente. Rosa se aleja hasta un punto C distante 100 m del punto A desde la que dirige visuales a los puntos A y B que forman un ángulo de 20° y desde A ve los puntos C y B bajo un ángulo de 120° . ¿Cuál es la anchura del río? (Soluc: $\approx 53,21$ m)

64. Tres pueblos A, B y C están unidos por carreteras rectas y llanas. La distancia AB es de 6 km, la BC es 9 km y el ángulo que forman AB y BC es de 120° . ¿Cuánto distan A y C? (Soluc: ≈ 13 km 77 m)

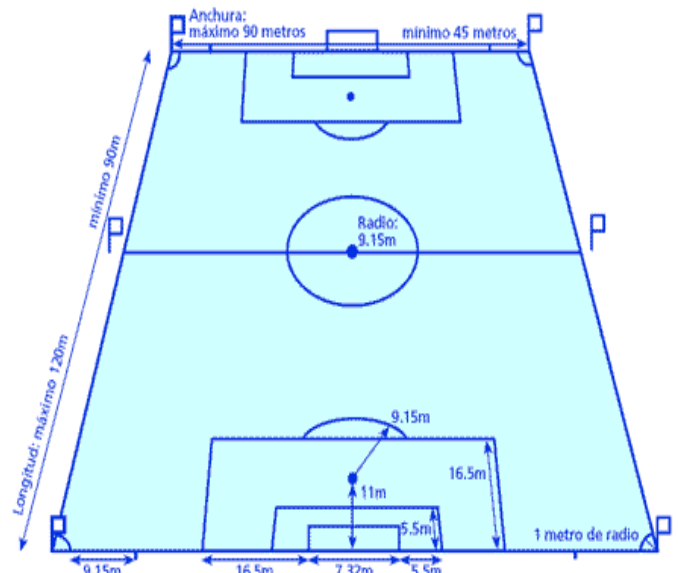
65. Se ha colocado un cable sobre un mástil que lo sujeta, como muestra la figura. ¿Cuánto miden el cable y el mástil?
(Sol: cable=25 m; mástil $\approx 7,32$ m)



66. Un globo aerostático está sujeto al suelo mediante dos cables de acero, en dos puntos que distan 60 m. El cable más corto mide 80 m y el ángulo que forma el otro cable con el suelo es de 37° . Hallar la altura del globo y la longitud del cable más extenso. (Sol: $\approx 71,80$ m y $119,31$ m, respectivamente)

67. Se lanza una falta desde un punto situado a 25 m y 28 m de ambos postes de una portería reglamentaria de fútbol, es decir, 7,32 m de longitud. ¿Bajo qué ángulo se verá la portería desde dicho punto? (Hacer un dibujo previo que explique la situación). ¿A qué distancia se encuentra del centro de la portería?
(Sol: $\approx 14^\circ 29' 54''$)

Si el punto estuviera a 26 y 27 m, ¿tendría más ángulo de tiro? La distancia, ¿sería menor?



68. Desde la puerta de una casa, A, se ve el cine B, que está a 120 m, y el quiosco C, que está a 85 m, bajo un ángulo $B\hat{A}C = 40^\circ$. ¿Qué distancia hay entre el cine y el quiosco? (Hacer un dibujo previo que explique la situación).
(Sol: $\approx 77,44$ m)