SOLUCIONES

EJERCICIOS DERIVADAS

Ejercicio nº 1.-

Halla la tasa de variación media de la siguiente función en el intervalo [1, 2] e indica

$$f(x) = 2x^2 - 3x$$

Solución:

$$\text{T.V.M.}\,[1,\ 2] = \frac{f(2)-f(1)}{2-1} = \frac{2-(-1)}{1} = \frac{(2+1)}{1} = \frac{3}{1} = 3$$

Como la tasa de variación media es positiva, la función es creciente en el intervalo [1, 2].

Ejercicio nº 2.-

Halla la función derivada de:

a) $f(x) = 4x^3 - 3x^2 + 2$

b) $f(x) = tg\, x$

Solución:

a) $f'(x) = 12x^2 - 6x$

b) $f'(x) = 1 + tg^2 x = \dfrac{1}{cos^2 x}$

Ejercicio nº 3.-

Halla la función derivada de:

a) $f(x) = \dfrac{1 - x^2}{x - 3}$

b) $f(x) = x\, ln\, x$

Solución:

a) $f'(x) = \dfrac{-2x(x-3) - (1 - x^2)}{(x-3)^2} = \dfrac{-2x^2 + 6x - 1 + x^2}{(x-3)^2} = \dfrac{-x^2 + 6x - 1}{(x-3)^2}$

b) $f'(x) = ln\, x + x \cdot \dfrac{1}{x} = ln\, x + 1$

Ejercicio nº 4.-

Halla *f´(x)* para la función:

$$f(x) = e^{4x^3 - 2x}$$

Solución:

$$f'(x) = e^{4x^3 - 2x} \cdot \left(12x^2 - 2\right)$$

Ejercicio nº 5.-

Halla la ecuación de la recta tangente a la curva *y* = *x*² + 2*x* –1 en el punto de abscisa *x* = 1.

Solución:

- $y' = 2x + 2$
- La pendiente de la recta es $y'(1) = 4$.
- Cuando $x = 1$, $y = 2$
- La recta será:

$$y = 2 + 4(x - 1) = 2 + 4x - 4 = 4x - 2$$

Ejercicio nº 6.-

Halla los puntos de tangente horizontal de la siguiente función y, con ayuda de las ramas infinitas, decide si son máximos o mínimos:

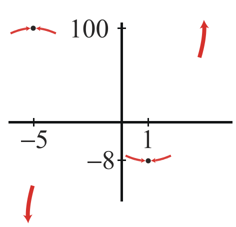
$$f(x) = x^3 + 6x^2 - 15x$$

Solución:

- $f'(x) = 3x^2 + 12x - 15 = 0 \Rightarrow x^2 + 4x - 5 = 0$

$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{16 + 20}}{2} = \frac{-4 \pm 6}{2}; \; x = \frac{-4 \pm \sqrt{16 + 20}}{2} = \frac{-4 \pm 6}{2} \begin{cases} x = 1 \quad \rightarrow \quad \text{Punto } (1, -8) \\ x = -5 \rightarrow \quad \text{Punto } (-5, 100) \end{cases}$$

- $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(x^3 + 6x^2 - 15x\right) = +\infty \qquad \lim\limits_{x \to -\infty} \left(x^3 + 6x^2 - 15x\right) = -\infty$



Máximo en (–5, 100) y mínimo en (1, – 8).

Ejercicio nº 7.-

Halla los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de la función:

$$\boldsymbol{f(x) = (x+2)^2}$$

Solución:

- $f'(x) = 2(x+2)$
- Estudiamos el signo de la derivada:

$$\begin{array}{lllll} 2(x+2)=0 & \Rightarrow & x+2=0 & \Rightarrow & x=-2 \\ 2(x+2)>0 & \Rightarrow & x+2>0 & \Rightarrow & x>-2 \\ 2(x+2)<0 & \Rightarrow & x+2<0 & \Rightarrow & x<-2 \end{array}$$

- La función decrece en $(-\infty, -2)$ y crece en $(-2, +\infty)$ (y tiene un mínimo en $x = 2$).

Ejercicio nº 8.-

Estudia y representa la función:

$$\boldsymbol{f(x) = x^4 + 2x^2 + 1}$$

Solución:

- $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^4+2x^2+1\right)=+\infty;\qquad \lim\limits_{x\to-\infty}\left(x^4+2x^2+1\right)=+\infty$

- Puntos de corte con los ejes:

Con el eje $X \rightarrow$ $x^4 + 2x^2 + 1 = 0$. Cambio $x^2 = z$

$$z^2 + 2z + 1 = 0$$

$$z = \frac{-2 \pm \sqrt{4-4}}{2} = \frac{-2}{2} = -1 \quad \text{(no nos da un valor real para } x\text{)}.$$

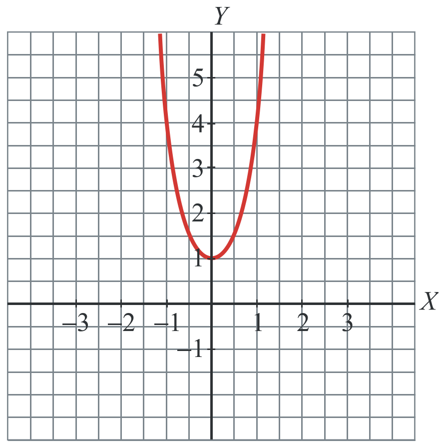
No corta al eje X.

Con el eje $Y \rightarrow x = 0 \rightarrow y = 1 \rightarrow$ Punto $(0, 1)$

- Puntos singulares:

$f'(x) = 4x^3 + 4x = 4x\left(x^2+1\right) = 0 \Rightarrow x = 0 \rightarrow$ Punto $(0, 1)$

- Gráfica:



$f(x)=x^4+2x^2+1$

Ejercicio nº 9.-

Representa gráficamente la siguiente función, estudiando previamente los aspectos que consideres más relevantes:

$$\boldsymbol{f(x)=\frac{x^2}{x+1}}$$

Solución:

- Dominio $=\mathbf{R}-\{-1\}$

- Puntos de corte con los ejes:

  Con el eje $X \rightarrow \quad y=0 \quad \rightarrow \quad \frac{x^2}{x+1}=0 \quad \rightarrow \quad x=0 \quad \rightarrow$ Punto $(0,\ 0)$

  Con el eje $Y \rightarrow \quad x=0 \quad \rightarrow \quad y=0 \quad \rightarrow$ Punto $(0,\ 0)$

- Asíntotas verticales: $x=-1$

  $$\lim_{x\to -1^-} f(x)=-\infty; \qquad \lim_{x\to -1^+} f(x)=+\infty$$

- Asíntota oblicua:

  $$\frac{x^2}{x+1}=x-1+\frac{1}{x+1} \quad \Rightarrow \quad y=x-1 \text{ es asíntota oblicua.}$$

  Si $x \rightarrow +\infty,\ \frac{1}{x+1}>0 \quad \Rightarrow$ La curva está por encima de la asíntota.

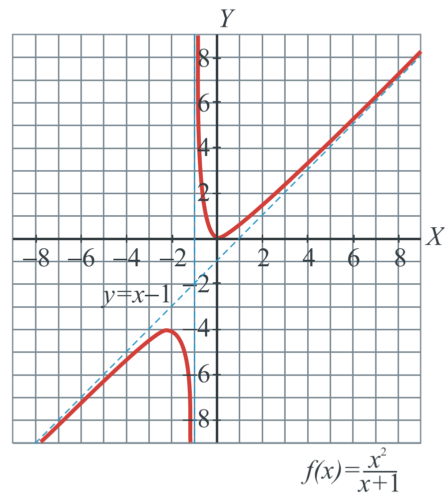
  Si $x \rightarrow -\infty,\ \frac{1}{x+1}<0 \quad \Rightarrow$ La curva está por debajo de la asíntota.

- Puntos singulares:

  $$f'(x)=\frac{2x(x+1)-x^2}{(x+1)^2}=\frac{2x^2+2x-x^2}{(x+1)^2}=\frac{x^2+2x}{(x+1)^2}=\frac{x(x+2)}{(x+1)^2}$$

$$f'(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad x(x+2) = 0 \begin{cases} x = 0 & \rightarrow \quad \text{Punto } (0,\ 0) \\ x = -2 & \rightarrow \quad \text{Punto } (-2,\ -4) \end{cases}$$

- Gráfica:



Ejercicio nº 10.-

Dada la función:

$$\boldsymbol{f(x) = \frac{x^3 - 2}{x}}$$

estudia sus aspectos más relevantes y represéntala gráficamente.

Solución:

- Dominio $= \mathbf{R} - \{0\}$

- Puntos de corte con los ejes:

  Con el eje $X \rightarrow \quad y = 0 \quad \rightarrow \quad \dfrac{x^3 - 2}{x} = 0 \rightarrow x^3 - 2 = 0 \quad \rightarrow$

  $\rightarrow \quad x = \sqrt[3]{2} \approx 1{,}3 \quad \rightarrow \quad$ Punto $(1{,}3;\ 0)$

  Con el eje $Y \rightarrow$ No corta al eje Y, pues $x = 0$ no pertenece al dominio.

- Asíntota vertical: $x = 0$

  $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = +\infty; \qquad \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = -\infty$

- Rama parabólica (pues el grado del numerador es de dos unidades mayor que el del denominador).

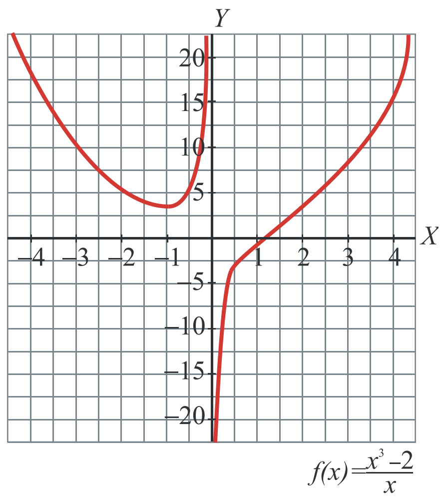
  $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty; \qquad \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$

- Puntos singulares:

$$f'(x) = \frac{3x^2 x - (x^3 - 2)}{x^2} = \frac{3x^3 - x^3 + 2}{x^2} = \frac{2x^3 + 2}{x^2} = \frac{2(x^3 + 1)}{x^2}$$

$$f'(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad 2(x^3 + 1) = 0 \quad \Rightarrow \quad x^3 + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad x^3 = -1 \quad \Rightarrow \quad x = \sqrt[3]{-1} = -1 \quad \rightarrow \quad \text{Punto } (-1, 3)$$

- Gráfica:



<u>Ejercicio nº 11.-</u>

Estudia y representa la siguiente función:

$$\boldsymbol{f(x) = \frac{2x^2}{x^2 - 4}}$$

Solución:

- Dominio $= \mathbf{R} - \{-2, 2\}$

- Puntos de corte con los ejes:

  Con el eje $X \rightarrow y = 0 \rightarrow \frac{2x^2}{x^2 - 4} = 0 \rightarrow 2x^2 = 0 \rightarrow x = 0 \rightarrow$ Punto $(0, 0)$

  Con el eje $Y \rightarrow x = 0 \rightarrow y = 0 \rightarrow$ Punto $(0, 0)$

- Asíntotas verticales: $x = -2, x = 2$

$$\lim_{x \to -2^-} f(x) = +\infty; \qquad \lim_{x \to -2^+} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \to 2^-} f(x) = -\infty; \qquad \lim_{x \to 2^+} f(x) = +\infty$$

  Asíntota horizontal: $y = 2$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 2, \quad \text{con } y > 2$$

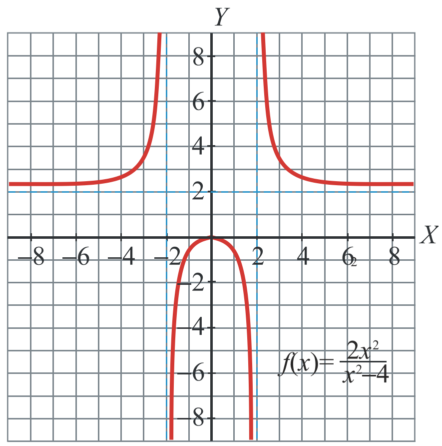
$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = 2, \quad \text{con } y > 2$$

- Puntos singulares:

$$f'(x) = \frac{4x(x^2 - 4) - 2x^2 \cdot 2x}{(x^2 - 4)^2} = \frac{4x^3 - 16x - 4x^3}{(x^2 - 4)^2} = \frac{-16x}{(x^2 - 4)^2}$$

$$f'(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad -16x = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0 \quad \rightarrow \quad \text{Punto } (0,\ 0)$$

- Gráfica:



<u>Ejercicio nº 12-</u>

a) Calcula la tasa de variación media de la función $f(x) = \frac{3}{x}$ en el intervalo [–3,–1]

b) A la vista del resultado obtenido en el apartado anterior, ¿crece o decrece la función en dicho intervalo?

Solución:

a) T.V.M. $[-3,\ -1] = \frac{f(-1) - f(-3)}{-1 - (-3)} = \frac{-3 - (-1)}{-1 + 3} = \frac{-3 + 1}{2} = \frac{-2}{2} = -1$

b) Como la tasa de variación media es negativa, la función es decreciente en el intervalo dado.

<u>Ejercicio nº 13.-</u>

Halla la función derivada de las siguientes funciones:

a) $f(x) = 2x^5 + \frac{x}{3}$

b) $f(x) = sen\ x$

Solución:

a) $f'(x) = 10x^4 + \frac{1}{3}$

b) $f'(x) = \cos x$

Ejercicio nº 14.-

Calcula $f'(x)$ en cada caso:

a) $f(x) = \dfrac{3x^2}{2x+3}$

b) $f(x) = \sqrt[3]{x} \cdot sen\, x$

Solución:

a) $f'(x) = \dfrac{6x(2x+3) - 3x^2 \cdot 2}{(2x+3)^2} = \dfrac{12x^2 + 18x - 6x^2}{(2x+3)^2} = \dfrac{6x^2+18x}{(2x+3)^2}$

b) $f'(x) = x^{1/3} \cdot sen\, x$

$$f'(x) = \frac{1}{3}x^{-2/3} sen\, x + x^{1/3} \cdot \cos x = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}\, sen\, x + \sqrt[3]{x} \cdot \cos x$$

Ejercicio nº 15.-

Calcula la función derivada de:

$$f(x) = sen\left(\frac{x+1}{2x-3}\right)$$

Solución:

$$f'(x) = \cos\left(\frac{x+1}{2x-3}\right) \cdot \frac{(2x-3) - (x+1)2}{(2x-3)^2} = \frac{2x-3-2x-2}{(2x-3)^2} \cdot \cos\left(\frac{x+1}{2x-3}\right) =$$

$$= \frac{-5}{(2x-3)^2} \cdot \cos\left(\frac{x+1}{2x-3}\right)$$

Ejercicio nº 16.-

Escribe la ecuación de la recta tangente a la curva y = x^3 –2x en el punto de abscisa $x = 2$.

Solución:

- $y' = 3x^2 - 2$
- La pendiente de la recta es $y'(2) = 10$.
- Cuando $x = 2$, $y = 4$.
- La ecuación de la recta será:

$$y = 4 + 10(x-2) = 4 + 10x - 20 = 10x - 16$$

Ejercicio nº 17.-

Determina los puntos de tangente horizontal de la función:

$$f(x) = \frac{x^3}{x+2}$$

Solución:

- $f'(x) = \dfrac{3x^2(x+2) - x^3}{(x+2)^2} = \dfrac{3x^3 + 6x^2 - x^3}{(x+2)^2} = \dfrac{2x^3 + 6x^2}{(x+2)^2}$

- $f'(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad 2x^3 + 6x^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x^2(2x+6) = 0 \begin{cases} x = 0 \rightarrow & \text{Punto } (0,\ 0) \\ x = -3 \rightarrow & \text{Punto } (-3,\ 27) \end{cases}$

<u>Ejercicio nº 18.-</u>

Estudia el crecimiento y el decrecimiento de la siguiente función:

$$\boldsymbol{f(x) = 3x^2 - 2x + 1}$$

Solución:

- $f'(x) = 6x - 2$
- Estudiamos el signo de la derivada:

  $6x - 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \dfrac{1}{3}$

  $6x - 2 > 0 \quad \Rightarrow \quad 6x > 2 \quad \Rightarrow \quad x > \dfrac{2}{6} \Rightarrow x > \dfrac{1}{3}$

  $6x - 2 < 0 \quad \Rightarrow \quad 6x < 2 \quad \Rightarrow \quad x < \dfrac{1}{3}$

- La función decrece en $\left(-\infty,\ \dfrac{1}{3}\right)$, crece en $\left(\dfrac{1}{3}, +\infty\right)$ $\left(\text{y tiene un mínimo en } x = \dfrac{1}{3}\right)$.

<u>Ejercicio nº 19.-</u>

Estudia y representa la siguiente función:

$$\boldsymbol{f(x) = x^3 - 4x^2 + 4x}$$

Solución:

- $\lim\limits_{x \to +\infty} (x^3 - 4x^2 + 4x) = +\infty; \qquad \lim\limits_{x \to -\infty} (x^3 - 4x^2 + 4x) = -\infty$

- Puntos de corte con los ejes:

  Con el eje $X \rightarrow \quad x^3 - 4x^2 + 4x = x(x^2 - 4x + 4) = 0 \begin{cases} x = 0 \rightarrow & \text{Punto } (0,\ 0) \\ x = 2 \rightarrow & \text{Punto } (2,\ 0) \end{cases}$

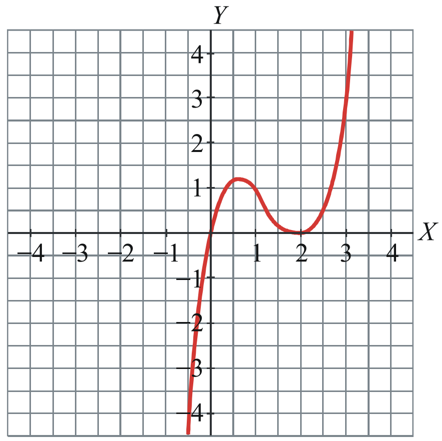
  Con el eje $Y \rightarrow \quad x = 0 \quad \rightarrow \quad y = 0 \quad \rightarrow \quad$ Punto $(0,\ 0)$

- Puntos singulares:

$$f'(x) = 3x^2 - 8x + 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{8 \pm \sqrt{64 - 48}}{6} = \frac{8 \pm 4}{6} \quad \begin{cases} x = 2 \\ x = \frac{4}{6} = \frac{2}{3} \end{cases}$$

Puntos $(2,\ 0)$ y $\left(\frac{2}{3},\ \frac{32}{27}\right)$.

- Gráfica:



$f(x)=x^3-4x^2+4x$

Ejercicio nº 20.-

Estudia y representa la función:

$$\boldsymbol{f(x) = \frac{x+3}{x-1}}$$

Solución:

- Dominio $= \mathbf{R} - \{1\}$

- Puntos de corte con los ejes:

  Con el eje $X \;\rightarrow\; y = 0 \;\rightarrow\; \frac{x+3}{x-1} = 0 \;\Rightarrow\; x + 3 = 0 \;\Rightarrow\; x = -3 \;\rightarrow\;$ Punto $(-3,\ 0)$

  Con el eje $Y \;\rightarrow\; x = 0 \;\rightarrow\; y = \frac{3}{-1} = -3 \;\rightarrow\;$ Punto $(0,\ -3)$

- Asíntota vertical: $x = 1$

  $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = -\infty; \qquad \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = +\infty$

  Asíntota horizontal: $y = 1$

  $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1,$ con $y > 1$

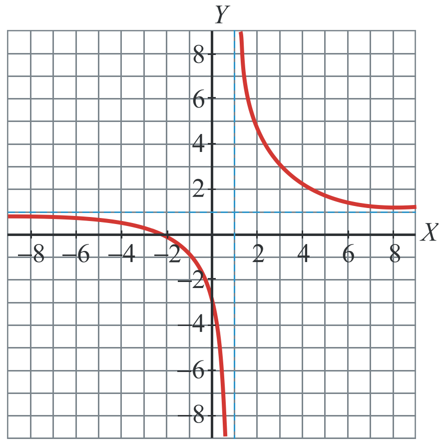
  $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 1,$ con $y < 1$

- Puntos singulares:

$$f'(x)=\frac{x-1-(x+3)}{(x-1)^2}=\frac{x-1-x-3}{(x-1)^2}=\frac{-4}{(x-1)^2}\neq 0$$

No tiene puntos singulares.

- Gráfica:



$f(x)=\frac{x+3}{x-1}$

Ejercicio nº 21.-

Representa gráficamente la siguiente función, estudiando los aspectos que consideres más relevantes:

$$\boldsymbol{f(x)=\frac{x^3+2}{x}}$$

Solución:

- Dominio $= \mathbf{R} - \{0\}$

- Puntos de corte con los ejes:

Con el eje $X \rightarrow y=0 \quad \rightarrow \quad \frac{x^3+2}{x}=0 \quad \rightarrow \quad x^3+2=0 \quad \rightarrow$

$\rightarrow x=\sqrt[3]{-2}\approx -1{,}3 \quad \rightarrow \quad$ Punto $(-1{,}3;\, 0)$

Con el eje $Y \rightarrow$ No corta el eje Y, pues $x=0$ no está en el dominio.

- Asíntota vertical: $x=0$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=-\infty; \qquad \lim_{x\to 0^+} f(x)=+\infty$$

Rama parabólica (pues el grado del numerador es dos unidades mayor que el del denominador).

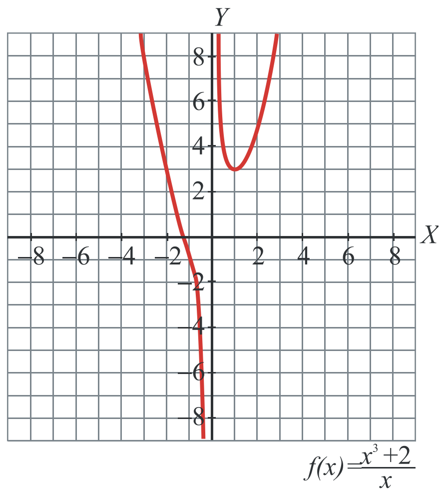
$$\lim_{x\to +\infty} f(x)=+\infty; \qquad \lim_{x\to -\infty} f(x)=+\infty$$

- Puntos singulares:

$$f'(x) = \frac{3x^2 \cdot x - (x^3+2)}{x^2} = \frac{3x^3 - x^3 - 2}{x^2} = \frac{2x^3-2}{x^2} = \frac{2(x^3-1)}{x^2}$$

$$f'(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad 2(x^3-1) = 0 \quad \Rightarrow \quad x^3 - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \sqrt[3]{1} = 1 \quad \rightarrow \quad \text{Punto } (1, 3)$$

- Gráfica:



Ejercicio nº 22.-

Estudia y representa la función:

$$\boldsymbol{f(x) = \frac{x^2}{x^2 - 1}}$$

Solución:

- Dominio = **R** − {−1, 1}

- Puntos de corte con los ejes:

Con el eje $Y \quad \rightarrow \quad x = 0 \quad \rightarrow \quad y = 0 \quad \rightarrow \quad$ Punto $(0, 0)$

Con el eje $X \quad \rightarrow \quad y = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{x^2}{x^2-1} = 0 \quad \rightarrow \quad x = 0 \quad \rightarrow \quad$ Punto $(0, 0)$

- Asíntotas verticales: $x = -1$, $x = 1$

$\lim_{x \to -1^-} f(x) = +\infty; \qquad \lim_{x \to -1^+} f(x) = -\infty$

$\lim_{x \to 1^-} f(x) = -\infty; \qquad \lim_{x \to 1^+} f(x) = +\infty$

Asíntota horizontal: $y = 1$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 1, \quad \text{con } y > 1$$

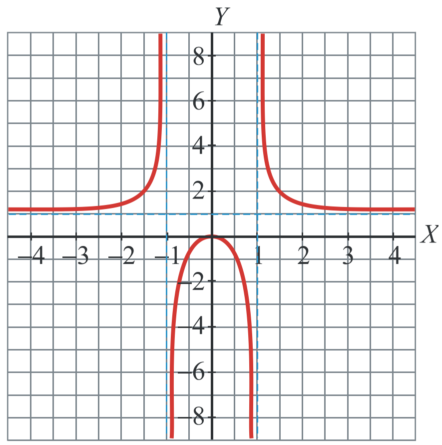
$$\lim_{x \to -\infty} f(\ ) = 1, \quad \text{con } y > 1$$

- Puntos singulares:

$$f'(x) = \frac{2x(x^2-1) - x^2 \cdot 2x}{(x^2-1)^2} = \frac{2x^3 - 2x - 2x^3}{(x^2-1)^2} = \frac{-2x}{(x^2-1)^2}$$

$$f'(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad -2x = 0 \quad \to \quad x = 0 \quad \to \quad \text{Punto } (0,\ 0)$$

- Gráfica:



$f(x)=\dfrac{x^2}{x^2-1}$

Ejercicio nº 23.-

Estudia dónde crece y dónde decrece la función:

$$\boldsymbol{f(x) = 3 + 12x - 3x^2}$$

Solución:

- $f'(x) = 12 - 6x$
- Estudiamos el signo de la derivada:

$12 - 6x = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 2$

$12 - 6x > 0 \quad \Rightarrow \quad 12 > 6x \quad \Rightarrow \quad 6x < 12 \quad \Rightarrow \quad x < 2$

$12 - 6x < 0 \quad \Rightarrow \quad 12 < 6x \quad \Rightarrow \quad 6x > 12 \quad \Rightarrow \quad x > 2$

- La función es creciente en $(-\infty,\ 2)$ y decreciente en $(2\ +\infty)$ (y tiene un máximo en $x = 2$).